№ 603.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

Второй серіи

I-го семестра № 3.

ОДЕССА.
Типографія „Техникъ"—Екатерининская, 58.
1914.

Второй серіи I-го семестра № 3.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

Элементарной Математики.

№ 603.

Число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія $x+2y+3z=m$.

Проф. В. П. Ермакова.

Обозначимъ черезъ $f(m)$ число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія:

$$x+2y+3z=m. \tag{1}$$

Рѣшенія разобьемъ на двѣ группы. Къ первой группѣ отнесемъ такія рѣшенія, въ которыхъ $z=0$, ко второй группѣ — остальныя рѣшенія.

Число рѣшеній первой группы равно числу цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія

$$x+2y=m.$$

Это число равно цѣлому числу, содержащемуся въ дроби $\frac{m+2}{2}$. Обозначимъ его черезъ $E\frac{m+2}{2}$.

Во второй группѣ $z=z'+1$, гдѣ z' можетъ сводиться къ нулю. Поэтому число рѣшеній второй группы равно числу цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія:

$$x+2y+3z'=m-3.$$

Это число, согласно нашему обозначенію, равно $f(m-3)$. Отсюда имѣемъ:

$$f(m)=f(m-3)+E\frac{m+2}{2}.$$

Изъ этого равенства получается такое:

$$f(m+6)=f(m)+E\frac{m+5}{2}+E\frac{m+8}{2}.$$

Изъ двухъ чиселъ $m+5$ и $m+8$ одно четное, другое нечетное; поэтому

$$E\frac{m+5}{2}+E\frac{m+8}{2}=\frac{(m+5)+(m+8)-1}{2}=m+6.$$

Итакъ, имѣемъ:

$$f(m+6)=f(m)+m+6. \qquad (2)$$

Обозначимъ цѣлое число, содержащееся въ дроби $\frac{(m+3)^2+3}{12}$, черезъ

$$E\frac{(m+3)^2+3}{12}.$$

Имѣемъ:

$$(m+9)^2=(m+3)^2+12(m+6).$$

Отсюда находимъ:

$$E\frac{(m+9)^2+3}{12}=E\frac{(m+3)^2+3}{12}+m+6. \qquad (3)$$

Положимъ

$$\varphi(m)=f(m)-E\frac{(m+3)^2+3}{12}. \qquad (4)$$

Изъ равенствъ (2) и (3) находимъ:

$$\varphi(m+6)=\varphi(m). \qquad (5)$$

Легко показать непосредственнымъ подсчетомъ, что $\varphi(m)$ обращается въ нуль, когда $m=1$, 2, 3, 4, 5 или 6 *). Тогда на основаніи равенства (5) заключаемъ, что $\varphi(m)$ обращается въ нуль при вся-

---

*) Напримѣръ, при $m=2$ уравненіе $x+2y+3z=2$ имѣетъ только двѣ системы рѣшеній (0, 1, 0) и (2, 0, 0); слѣдовательно,

$$f(2)=2;\quad E\frac{(m+3)^2+3}{12}=E(7/3)=2;\ \varphi(2)=0.$$

комъ значеніи m. Поэтому изъ опредѣленія (4) $\varphi(m)$ имѣемъ:

$$f(m) = E\,\frac{(m+3)^2+3}{12}\,.$$

Такъ выражается число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія (1).

Двухсотлѣтіе закона большихъ чиселъ *).

Академика А. А. Маркова.

Многоуважаемое собраніе!

Съ математической точки зрѣнія закономъ большихъ чиселъ, въ широкомъ смыслѣ, можно назвать совокупность предѣльныхъ теоремъ исчисленія вѣроятностей, которая раздѣляется на двѣ группы теоремъ или, если хотите, на двѣ теоремы, но съ измѣняемыми условіями. Первая группа, которая образуетъ законъ большихъ чиселъ въ тѣсномъ смыслѣ и которой, главнымъ образомъ, посвящена моя рѣчь, указываетъ намъ вѣроятности, сколь угодно близкія къ достовѣрности, выражаемой числомъ единица. Во второй группѣ предѣломъ вѣроятности является извѣстный интегралъ Лапласа. О теоремахъ второй группы я также скажу нѣсколько словъ, имѣя въ виду сочетаніе ихъ съ теоремой Якова Бернулли, которая, какъ простѣйшая, дала начало всей совокупности теоремъ, объединенныхъ названіемъ „законъ большихъ чиселъ“, и среди нихъ занимаетъ, можно сказать, главное мѣсто по своимъ приложеніямъ.

Яковъ Бернулли.

Теорема Я. Бернулли опубликована въ 1713 году въ „Ars conjectandi“. Но найдена имъ она была, конечно, гораздо раньше. Яковъ

*) 1-го декабря 1913 г. въ большомъ Конференцъ-Залѣ Императорской Академіи Наукъ состоялось торжественное собраніе въ ознаменованіе двухсотлѣтія закона большихъ чиселъ; на этомъ собраніи были произнесены слѣдующія рѣчи: А. В. Васильевъ — «Вопросы теоріи вѣроятностей до теоремы Якова Бернулли», А. А. Марковъ — «Очеркъ развитія закона большихъ чиселъ, какъ совокупности математическихъ теоремъ», А. А. Чупровъ — «Законъ большихъ чиселъ въ современной наукѣ».

Настоящая статья представляетъ собою рѣчь академика А. А. Маркова, которую онъ любезно предоставилъ „Вѣстнику Опытной Физики“.

Бернулли скончался въ августѣ 1705 года, и трудъ его „Ars conjectandi“ былъ изданъ черезъ 8 лѣтъ послѣ его смерти племянникомъ его Николаемъ Бернулли. Но еще въ письмахъ къ Лейбницу отъ 3-го октября 1703 г. и 20 апрѣля 1704 г. онъ говоритъ о своей теоремѣ, что 12 лѣтъ тому назадъ онъ показывалъ доказательство ея брату своему Ивану, и что тотъ нашелъ доказательство правильнымъ: „Dixi autem in istis me posse demonstrare; viditque demonstrationem jam ante duodecennium Frater et approbavit“. Наконецъ въ „Ars conjectandi“ онъ отодвигаетъ на двадцать лѣтъ назадъ отъ времени выполненія этого труда то время, когда онъ, если не доказалъ, то началъ доказывать свою теорему. Вотъ его слова: „Hoc igitur est illud Problema, quod evulgandum hoc loco proposui, postquam jam per vicennium pressi“.

Установить годъ, когда Бернулли пришелъ къ своей теоремѣ, мы не можемъ, и не съ этимъ годомъ связываемъ мы сегодняшнее торжество. А связываемъ мы его съ годомъ опубликованія теоремы, т. е. съ годомъ выхода въ свѣтъ „Ars conjectandi“. Этотъ годъ — 1713-ый — указанъ на самой книгѣ и подтверждается двумя письмами Николая Бернулли къ Монморту, помѣщенными во второмъ изданіи труда Монморта „Essay d'analyse sur les jeux de hazard“, которое появилось въ концѣ того же 1713 года. Въ письмѣ отъ 23-го января 1713 года Николай Бернулли упоминаетъ, что „Ars conjectandi“ печатается, и что тамъ содержится особая теорема, которую онъ по справедливости сближаетъ со своими вычисленіями, не имѣющими силы настоящаго доказательства. Въ письмѣ отъ 9-го сентября того же года Николай Бернулли сообщаетъ уже, что этотъ трудъ только-что вышелъ въ свѣтъ. (Тѣмъ же числомъ помѣчены письма Ивана и Николая Бернулли къ Лейбницу, содержащія извѣщенія о выходѣ въ свѣтъ „Ars conjectandi“). Онъ прибавляетъ, что Монмортъ не найдетъ тамъ ничего новаго. Но такое мнѣніе Н. Бернулли не доказываетъ, что Монмортъ вполнѣ зналъ уже теорему Бернулли. Оно объясняется тѣмъ, что Н. Бернулли не придавалъ ей большого значенія или считалъ для Монморта достаточными указанія, данныя имъ по памяти въ предыдущемъ письмѣ, гдѣ теорема была намѣчена.

Теорему Я. Бернулли можно формулировать такъ: „Если производится неограниченный рядъ испытаній и при всѣхъ этихъ испытаніяхъ нѣкоторое событіе имѣетъ одну и ту же вѣроятность, то при достаточно большомъ числѣ ихъ можно утверждать съ вѣроятностью, сколь угодно близкой къ достовѣрности, что отношеніе числа появленій событія къ числу испытаній отклонится отъ вѣроятности событія менѣе, чѣмъ на данное число, какъ бы мало оно ни было“. Теорема эта и ея доказательство находятся въ концѣ 4-ой части „Ars conjectandi“, русскій переводъ которой нынѣ выпущенъ въ свѣтъ Академіей. Изъ разсужденій Я. Бернулли, предшествующихъ доказательству теоремы, видно, что онъ придавалъ ей большое значеніе, разсматривая ее, какъ фундаментъ при разысканіи вѣроятностей по наблюденіямъ — a posteriori.

Свою теорему онъ поясняетъ такимъ примѣромъ. Въ сосудѣ перемѣшаны бѣлые и черные шары. Отношеніе числа бѣлыхъ шаровъ къ числу всѣхъ шаровъ въ сосудѣ равно $^2/_5$, а для черныхъ подобное же отношеніе $^3/_5$, такъ что вѣроятность вынуть изъ него бѣлый шаръ равна $^2/_5$, а черный $^3/_5$. Положимъ теперь, что намъ эти отношенія, — иначе сказать, эти вѣроятности — неизвѣстны, а мы можемъ только производить въ неограниченномъ числѣ испытанія, состоящія въ выниманіи одного шара. Цвѣта вынутыхъ шаровъ записываются для памяти и подсчета вынутыхъ бѣлыхъ и черныхъ шаровъ, а сами шары постоянно возвращаются обратно въ сосудъ, чтобы сохранялось неизмѣннымъ какъ число бѣлыхъ, такъ и число черныхъ шаровъ въ сосудѣ. Спрашивается, можемъ ли мы разсчитывать по этимъ записямъ, составляя отношеніе числа вынутыхъ бѣлыхъ шаровъ къ числу всѣхъ вынутыхъ шаровъ, подойти сколь угодно близко къ неизвѣстной намъ вѣроятности бѣлаго шара? Утвердительный отвѣтъ на этотъ вопросъ дается теоремой Бернулли. Въ частности, согласно вычисленіямъ Бернулли, тотъ, кто знаетъ, что бѣлые шары составляютъ $^2/_5$ всѣхъ шаровъ въ сосудѣ, можетъ съ вѣроятностью, отличающеюся отъ достовѣрности менѣе, чѣмъ на $^1/_{1000}$, утверждать, что при 25 550 записяхъ, т. е. когда будетъ вынуто и отмѣчено столько шаровъ, отношеніе числа вынутыхъ бѣлыхъ шаровъ къ числу всѣхъ вынутыхъ шаровъ будетъ лежать между $^{19}/_{50}$ и $^{21}/_{50}$, — иначе сказать, будетъ отклоняться отъ $^2/_5$ менѣе, чѣмъ на $^1/_{50}$. Если же увеличивать число записей, то можно вѣроятность утвержденія приблизить сколь угодно къ достовѣрности, т. е. вмѣсто $^1/_{1000}$ взять $^1/_{10000}$, $^1/_{100000}$, и въ то же время сколь угодно приблизить къ нулю допускаемое отклоненіе отъ $^2/_5$, т. е. замѣнить $^1/_{50}$ любымъ меньшимъ числомъ.

Доказательство Я. Бернулли элементарно и строго, но соединено съ однимъ ограничительнымъ условіемъ относительно числа испытаній.

Съ теоремой Якова Бернулли тѣсно связанъ вопросъ о вычисленіи вѣроятности, что разность между отношеніемъ числа появленій событія къ числу испытаній и вѣроятностью событія не выходитъ изъ опредѣленныхъ границъ. Нетрудно представить эту вѣроятность точною формулою. Вычисленія по точной формулѣ сводятся къ простымъ ариѳметическимъ дѣйствіямъ. Но въ случаѣ большого числа испытаній, эти дѣйствія оказываются весьма обременительными и, можно сказать, даже невыполнимыми. Поэтому приходится тогда обратиться къ приближеннымъ формуламъ, которыя упрощаютъ вычисленіе, сокращая его. Попытку упростить пользованіе точною формулою, замѣняя ее приближенною, мы встрѣчаемъ уже въ упомянутомъ письмѣ Николая Бернулли къ Монморту отъ 23-го января 1713 года. Она относится къ интересному вопросу объ устойчивости распредѣленія новорожденныхъ по полу. Но ей нельзя придавать большого значенія, если не считать только, что она привлекла къ вопросу о вычисленіи вѣроятности вниманіе Моавра, съ именемъ котораго связана извѣстная общая тригонометрическая формула.

Моавру при содѣйствіи Стирлинга удалось получить для разсматриваемой вѣроятности (по крайней мѣрѣ, въ простѣйшемъ случаѣ, когда вѣроятность событія равна половинѣ) приближенное выраженіе въ видѣ того интеграла, который нынѣ мы называемъ интеграломъ Лапласа. Выводы Моавра можно найти въ трудѣ его „Miscellanea analytica“ 1730 года.

Разработкой методовъ приближеннаго вычисленія вѣроятностей вообще особенно много и съ успѣхомъ занимались Лапласъ и Пуассонъ, дѣятельность которыхъ относится уже къ концу XVIII и первой половинѣ XIX вѣка. Напомню, что классическій трудъ Лапласа „Théorie analytique des probabilités“ появился первымъ изданіемъ въ 1812 и вторымъ въ 1814 году; а „Recherches sur la probabilité des jugements, en matière criminelle et en matière civile“ Пуассона — въ 1837 году.

Вопросъ о приближенномъ вычисленіи вѣроятности не составляетъ цѣли моей рѣчи; я коснулся его только потому что приближенное вычисленіе при надлежащей оцѣнкѣ погрѣшности можетъ вести къ предѣльнымъ теоремамъ. Такъ, оно даетъ для теоремы Бернулли доказательство Лапласа, соединенное съ выводомъ простѣйшаго случая второй предѣльной теоремы. Этотъ простѣйшій случай относится къ той же разности, какъ и теорема Бернулли, и также рѣчь идетъ о вѣроятности, что эта разность лежитъ въ опредѣленныхъ границахъ. Но въ теоремѣ Бернулли разсматриваются постоянныя границы, во второй же предѣльной теоремѣ онѣ берутся пропорціональными единицѣ, дѣленной на корень квадратный изъ числа испытаній, которое попрежнему предполагается возрастающимъ безгранично. Теорема гласитъ, что при достаточно большомъ числѣ испытаній вѣроятность ненарушенія намѣченныхъ границъ будетъ сколь угодно близка къ интегралу Лапласа.

Сочетая вторую теорему съ теоремой Бернулли, можно придти, такъ сказать, ко второй ступени теоремы Бернулли. Я не стану формулировать ее, но приведу указанія, на основаніи которыхъ это нетрудно сдѣлать. Замѣните каждое отдѣльное испытаніе цѣлою совокупностью испытаній, число которыхъ можно увеличивать безгранично. Затѣмъ разсматривайте неограниченный рядъ такихъ совокупностей. Наконецъ, вмѣсто первоначальнаго событія разсматривайте новое, состоящее въ томъ, что результаты опредѣленной совокупности не нарушатъ указанныхъ границъ. Тогда теорема Бернулли приведетъ ко второй ея ступени, при чемъ вѣроятность первоначальнаго событія замѣнится предѣльною величиною вѣроятности новаго событія, т. е. интеграломъ Лапласа.

Пуассонъ воспользовался приближеннымъ вычисленіемъ для другой цѣли: для обобщенія теоремы Бернулли. Ему принадлежитъ и названіе „законъ большихъ чиселъ“. Я не буду говорить о томъ, какой смыслъ придавалъ этому названію самъ Пуассонъ и какое значеніе его изслѣдованія имѣютъ для статистики; а остановлюсь только на теоремѣ, которую въ настоящее время математики называютъ теоремой Пуассона и закономъ большихъ чиселъ. Отъ теоремы Бернулли она отличается тѣмъ, что вѣроятность событія не предполагается въ ней одинаковой для всѣхъ испытаній, а можетъ имѣть свою особую величину для каждаго испытанія. При такомъ измѣненіи основного условія, для перехода отъ теоремы Бернулли къ теоремѣ Пуассона, слѣдуетъ только въ заключительныхъ словахъ теоремы вмѣсто постоянной общей вѣроятности событія взять среднюю ариѳметическую вѣроятностей. Пуассонъ не доказалъ своей теоремы, такъ какъ онъ ограничился приближеннымъ вычисленіемъ, не оцѣнивая надлежащимъ образомъ погрѣшности его.

Первое доказательство теоремы Пуассона было дано въ 1846 г. незабвеннымъ Пафнутіемъ Львовичемъ Чебышевымъ въ краткой, но примѣчательной замѣткѣ „Demonstration élémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités", помѣщенной въ 33-мъ томѣ журнала Крелля. Замѣтка эта названа „extrait d'un mémoire russe sur l'analyse élémentaire de la théorie des probabilités". Но ни въ какомъ другомъ трудѣ Чебышева мы не находимъ такого доказательства. Остается только предположить, что оно извлечено изъ мемуара, который не былъ напечатанъ, или изъ магистерской диссертаціи Чебышева „Опытъ елементарнаго анализа теоріи вѣроятности", но такъ, что тамъ его не осталось.

Кстати упомяну, что въ томъ же 1846 году появился прекрасный трудъ другого покойнаго академика Виктора Яковлевича Буняковскаго „Основанія математической теоріи вѣроятностей".

Черезъ двадцать лѣтъ послѣ перваго Чебышевъ далъ второе доказательство теоремы Пуассона. Оно помѣщено на русскомъ языкѣ въ „Математическомъ Сборникѣ" за 1866 годъ подъ заглавіемъ „О среднихъ величинахъ" и на французскомъ языкѣ въ журналѣ Ліувилля за 1867 г. Это второе доказательство, основанное на разсмотрѣніи математическаго ожиданія одного квадрата, отличается поразительной простотой и даетъ теорему болѣе общую, чѣмъ теорема Пуассона, такъ какъ здѣсь рѣчь идетъ уже не о числѣ появленій событія, а о суммѣ различныхъ величинъ. Надо, однако, замѣтить, что основные его пункты были указаны еще въ 1853 году французскимъ математикомъ Бьенэмэ въ мемуарѣ „Considerations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés", который былъ написанъ по поводу спора Бьенэмэ съ Коши о преимуществахъ метода наименьшихъ квадратовъ. Мемуаръ этотъ въ свое время былъ помѣщенъ въ „Comptes-Rendus" (томъ 37) и затѣмъ перепечатанъ въ журналѣ Ліувилля за 1867 г. какъ разъ передъ мемуаромъ Чебышева, безъ указанія, однако, на существующую между ними связь.

Впослѣдствіи Чебышевъ въ краткой замѣткѣ, которая была прочитана имъ въ августѣ 1873 года на съѣздѣ въ Ліонѣ и напечатана также въ журналѣ Ліувилля за 1874 годъ, отмѣчая эту связь, самъ назвалъ свое второе доказательство однимъ изъ результатовъ новаго метода, который далъ Бьенэмэ въ упомянутомъ мемурѣ.

Этотъ методъ — методъ моментовъ или математическихъ ожиданій — можно охарактеризовать такъ: разсматриваются математическія ожиданія различныхъ функцій нѣкоторой величины и по нимъ дѣлаются заключенія относительно вѣроятности тѣхъ или иныхъ предположеній о ней. Хотя Чебышевъ приписалъ этотъ методъ Бьенэмэ, но я считаю болѣе правильнымъ называть его методомъ Бьенэмэ-Чебышева, а иногда называю и просто методомъ Чебышева, такъ какъ въ мемуарѣ Бьенэмэ находятся только зачатки его, а значеніе онъ пріобрѣлъ благодаря трудамъ Чебышева. Во-первыхъ, Чебышевъ связалъ этотъ методъ съ особаго рода задачами на maxima и minima, подобными задачамъ варіаціоннаго исчисленія, но съ замѣной условія непрерывности функцій требованіемъ неизмѣнности ихъ знака, согласно тому, что массы и вѣроятности не могутъ быть отрицательными. Во-вторыхъ, Чебышевъ показалъ, что методъ математическихъ ожиданій можетъ вести не только къ первой, но и ко второй предѣльной теоремѣ.

Замѣчу еще слѣдующее: Бьенэмэ скончался въ 1878 году 82 лѣтъ отъ роду. Въ „Comptes-Rendus" за 1878 годъ мы находимъ замѣтку Гурнери, посвященную его памяти. Въ ней приведены слова Лямэ, который въ 1851 г. называлъ Бьенэмэ почти единственнымъ представителемъ теоріи вѣроятностей во Франціи; упомянуто объ его спорѣ съ Коши и о томъ, что относящійся къ этому спору мемуаръ Бьенэмэ помѣщенъ въ „Comptes-Rendus" за 1853 г. и въ журналѣ Ліувилля за 1867 г.; упомянуто даже о томъ, что Бьенэмэ зналъ разные языки и что въ 1858 г. онъ перевелъ на французскій языкъ одинъ мемуаръ Чебышева. Но ни слова нѣтъ о томъ, чтобы онъ далъ какой-то новый методъ.

Дальнѣйшее развитіе закона большихъ чиселъ я отношу уже къ настоящему времени. Распространяться о немъ я не буду; скажу только, что оно состоитъ въ расширеніи области примѣнимости предѣльныхъ теоремъ и, въ особенности, въ распространеніи ихъ на связанныя испытанія и связанныя величины, при чемъ съ успѣхомъ примѣняется не только методъ Лапласа и его послѣдователей, но и методъ Чебышева.

Заканчивая рѣчь, возвращаюсь къ Якову Бернулли. Въ біографіяхъ его упоминается, что, слѣдуя примѣру Архимеда, онъ завѣщалъ начертить на его памятникѣ логариѳмическую спираль и сдѣлать надпись „Eadem mutata resurgo". Надпись эта, конечно, указываетъ на найденныя имъ свойства кривой. Но она имѣетъ и другой смыслъ. Въ ней выражается надежда Бернулли на воскресеніе и вѣчную жизнь. Мы можемъ сказать, что надежда его осуществляется. Со времени смерти Бернулли прошло болѣе 200 лѣтъ; однако, онъ живетъ и будетъ жить въ своей теоремѣ.

Природа X-лучей.

А. Риги.

(Вступительная рѣчь, читанная при открытіи I-го Италіанскаго Конгресса по радіологіи, состоявшагося 12 октября 1913 г. въ Миланѣ).

Гг. италіанскіе радіологи!

Избравъ меня въ прошломъ году почетнымъ предсѣдателемъ Вашего новаго и уже цвѣтущаго общества, Вы оказали мнѣ этимъ столь большую честь, что я не счелъ возможнымъ уклониться отъ приглашенія открыть Ваши труды научнымъ докладомъ, хотя я чувствую себя совершенно чужимъ въ области наукъ біологическихъ и медицинскихъ, которыми Вы владѣете основательно.

Не ждите отъ меня академической рѣчи изысканнаго стиля, въ которыхъ, по моему мнѣнію, во всякомъ случаѣ нѣтъ необходимости въ настоящую эпоху кипучаго научнаго изслѣдованія и прогресса. Я предпочитаю изложить нѣкоторый вопросъ, представляющій для Васъ интересъ, въ самой простой формѣ и пожертвовать красотой и изяществомъ фразъ для ясности и точности изложенія.

Къ счастью, выборъ темы не представляетъ для меня никакого затрудненія. Въ той самой научной области, въ которой было сдѣлано открытіе чудесныхъ лучей, искусно примѣняемыхъ Вами на благо страждущаго человѣчества, въ послѣдніе мѣсяцы и, пожалуй, даже недѣли получены новые и чрезвычайно важные результаты, которые отчасти подымаютъ завѣсу таинственности, окутывавшую до настоящаго времени явленія, открытыя Рёнтгеномъ.

Я вкратцѣ сообщу Вамъ объ этихъ результатахъ и о главныхъ слѣдствіяхъ, которыя изъ нихъ вытекаютъ относительно вѣроятной природы *X*-лучей; такимъ путемъ я буду въ состояніи коснуться родственной Вамъ области, оставаясь, однако, въ предѣлахъ той науки, которой я посвятилъ всѣ свои силы.

Извѣстный Вюрцбургскій (нынѣ Мюнхенскій) физикъ открылъ, что вблизи разрядной трубки, окруженной со всѣхъ сторонъ непрозрачными тѣлами, нѣкоторыя вещества — въ особенности, такія, которыя фосфоресцируютъ также подъ дѣйствіемъ свѣта, — становятся свѣтящимися. Путемъ остроумныхъ изысканій Рёнтгенъ обнаружилъ, что отъ такой трубки исходятъ новаго рода лучи, которые обладаютъ нѣкоторыми свойствами свѣта и катодныхъ лучей (отъ наличности этихъ послѣднихъ въ трубкѣ зависитъ существованіе новыхъ лучей), — точнѣе говоря, обладаютъ фосфорогенической и фотографической способностью. Но самое характерное свойство этихъ лучей состоитъ въ ихъ необыкновенной способности проникать сквозь всякаго рода тѣла и, вообще, тѣмъ глубже, чѣмъ меньше плотность вещества. Спустя короткое время, Рёнтгену удалось показать, что новые лучи, названные имъ *X*-лучами, не обнаруживаютъ главныхъ свѣтовыхъ явленій, какъ отраженіе, преломленіе и т. д. Наконецъ, онъ убѣдился, что контуры тѣней, отбрасываемыхъ на фосфоресцирующія тѣла или на фотографическіе препараты, доказываютъ, что эти лучи совершенно прямолинейны, и что они идутъ прямо отъ точекъ внутри разрядной трубки, гдѣ катодные лучи задерживаются стѣнкой или же тѣломъ, помѣщеннымъ спеціально для этого опыта, — такъ называемымъ антикатодомъ.

Какъ извѣстно, эти знаменитые катодные лучи, изученіе которыхъ привело вскорѣ къ результатамъ, могущимъ измѣнить въ корнѣ наши основныя философскія представленія, представляютъ собой не что иное, какъ прямолинейные пути, пробѣгаемые съ головокружительной скоростью извѣстными частичками — такъ называемыми электронами. Эти послѣдніе суть атомы неизвѣстнаго первичнаго вещества, называемаго электричествомъ, — вѣрнѣе, отрицательнымъ электричествомъ, — и въ то же время, согласно мнѣнію, которое отнынѣ можно считать общепризнаннымъ, представляютъ собой элементы, изъ которыхъ построены атомы матеріи. Въ электронахъ и въ ихъ движеніяхъ нужно искать первопричины всѣхъ явленій физическаго міра.

Нѣтъ необходимости говорить здѣсь объ электрическихъ явленіяхъ, которыя обнаруживаются X-лучами и которыя черезъ нѣсколько дней послѣ того, какъ было опубликовано первое сообщеніе Рёнтгена, были открыты одновременно русскимъ физикомъ, швейцарскимъ и французскимъ и авторомъ настоящей статьи. Эти явленія представляютъ лишь спеціальный интересъ, хотя они даютъ весьма чувствительный и точный методъ для изученія новыхъ лучей. Сейчасъ же должно было показаться въ высшей степени вѣроятнымъ, что между задержкой электроновъ у антикатода и возникновеніемъ X-лучей существуетъ такое же отношеніе, какъ между причиной и слѣдствіемъ. Тѣмъ болѣе, что наши физическія теоріи (замѣтимъ, что онѣ, вообще, заслуживаютъ большаго довѣрія, чѣмъ другія теоріи, принимаемыя безъ колебанія въ другихъ наукахъ) уже доказали, что всякое измѣненіе скорости наэлектризованнаго тѣла порождаетъ въ міровомъ эѳирѣ одно изъ тѣхъ электромагнитныхъ возмущеній, которыя въ томъ случаѣ, если онѣ обладаютъ періодическимъ или колебательнымъ характеромъ, вызываютъ возникновеніе свѣтовыхъ волнъ. X-лучи могутъ отличаться отъ свѣтовыхъ лучей отсутствіемъ періодичности; этимъ объяснялось бы, почему X-лучи не даютъ извѣстныхъ оптическихъ явленій.

До самаго послѣдняго времени это было общепризнанной гипотезой. Другая гипотеза, согласно которой X-лучи имѣютъ корпускулярную природу, не имѣла успѣха. Менѣе, чѣмъ когда-либо, она можетъ быть защищаема теперь, послѣ открытія новыхъ фактовъ, которые я Вамъ сейчасъ изложу. Эти факты, напротивъ, наводятъ на мысль о существованіи еще болѣе глубокой связи между X-лучами и свѣтомъ.

Но даже независимо отъ этихъ новыхъ фактовъ нужно замѣтить, что предположеніе объ отсутствіи у X-лучей характера колебаній не является необходимымъ. Чтобы понять ихъ свойства, достаточно допустить, что они обладаютъ чрезвычайно малой длиной волны. Я поясню свою мысль при помощи одной довольно употребительной аналогіи.

Звуковыя волны испытываютъ правильное отраженіе, когда онѣ падаютъ на тѣло достаточно большихъ размѣровъ въ родѣ стѣны, большой металлической пластинки и т. д., но не на тѣло очень малыхъ размѣровъ,—напримѣръ, на вбитый въ землю вертикальный колъ. Дѣло въ томъ, что для образованія отраженной волны требуется схожденіе достаточнаго числа элементарныхъ сферическихъ волнъ, производимыхъ каждой малой частью тѣла, въ которое ударяютъ падающія волны. Для этого, въ свою очередь, необходимо, чтобы отражающее тѣло было тѣмъ большихъ размѣровъ, чѣмъ больше длина самой волны, т. е. чѣмъ ниже звукъ. Очень высокій звукъ можетъ испытать отраженіе и отъ такой преграды, которая слишкомъ мала, чтобы вызвать правильное отраженіе низкаго звука.

Я не буду объяснять здѣсь, что такое длина волны, такъ какъ, чтобы получить о ней представленіе, достаточно наблюдать волны, образуемыя брошеннымъ камнемъ на спокойной поверхности воды. Подобно тому какъ эти волны представляютъ собой приподнятыя рельефныя кольца, чередующіяся съ полыми, точно такъ же и звуковыя волны въ воздухѣ суть сферическіе слои, въ которыхъ воздухъ попеременно то нѣсколько сжатъ, то слегка разрѣженъ. И какъ на водѣ длина волны равна разстоянію между двумя послѣдовательными приподнятыми кольцами или двумя полыми, точно такъ же длина звуковой волны равна разстоянію между двумя послѣдовательными сжатыми слоями или двумя разрѣженными.

Длина волны, соотвѣтствующая звукамъ, могущимъ быть воспринятыми ухомъ, заключается въ предѣлахъ между нѣсколькими миллиметрами и двадцатью метрами съ небольшимъ, тогда какъ длина волны свѣтовыхъ колебаній столь мала, что ее удобнѣе выражать въ десятитысячныхъ доляхъ миллиметра. Отсюда слѣдуетъ, что правильное отраженіе свѣта не имѣетъ мѣста только въ томъ случаѣ, если тѣло, на которое падаетъ свѣтъ, имѣетъ чрезвычайно малые размѣры.

Въ оптическихъ явленіяхъ прямолинейное распространеніе свѣта совершенно прекращается, если пользоваться очень малыми свѣтящимися источниками, очень тонкими непрозрачными тѣлами *) или очень узкими щелями. Въ этихъ случаяхъ происходятъ такъ называемыя явленія дифракціи, изученіе которыхъ въ значительной степени способствовало выясненію волнообразной природы свѣта. Эти явленія были открыты уже давно: въ первый разъ диффракція наблюдалась монахомъ Гримальди (Grimaldi) въ Болоньѣ два съ половиною вѣка тому назадъ.

Аналогичнымъ образомъ достаточно допустить, что X-лучи имѣютъ еще гораздо меньшую длину волны, чѣмъ лучи свѣта. Если, съ другой стороны, промежутки между молекулами достаточно велики сравнительно съ длиной волны X-лучей, и каждая молекула дѣйствуетъ независимо, то мы поймемъ, что при своихъ чрезвычайно малыхъ размѣрахъ она не можетъ вызвать отраженія, а даетъ только диффракцію.

Нѣкоторые физики пытались получить явленіе диффракціи, пропуская X-лучи черезъ очень тонкія щели; ихъ усилія не были совершенно безуспѣшны и теперь могутъ быть лучше оцѣнены. Но окончательно и съ полной несомнѣнностью колебательный характеръ X-лучей былъ установленъ помощью опыта, произведеннаго въ Мюнхенѣ Лауе (Laue), Фридрихомъ (Friedrich) и Книппингомъ (Knipping) и вскорѣ повтореннаго, дополненнаго и изслѣдованнаго другими учеными.

Несмотря на огромное значеніе слѣдствій, вытекающихъ изъ этого опыта, онъ самъ по себѣ очень простъ, и для непосвященныхъ можетъ показаться лишеннымъ особаго значенія, какъ это, впрочемъ, нерѣдко бываетъ въ подобныхъ случаяхъ. Этотъ опытъ можно въ немногихъ словахъ описать такъ, чтобы всякій желающій могъ его повторить **).

Берутъ небольшое кристаллическое тѣло, — напримѣръ, кусокъ каменной соли, прозрачнаго минерала, которымъ пользовался Меллони (Melloni) въ своихъ классическихъ изслѣдованіяхъ. Посредствомъ нѣсколькихъ параллельныхъ свинцовыхъ пластинокъ это тѣло защищаютъ

---

*) Въ родѣ паутины.

**) См. статьи объ интерференціи рёнтгеновскихъ лучей Г. Лёви и М. Якобсона въ №№ 580 и 583 — 584 „Вѣстника“.

отъ дѣйствія X-лучей, которые выходятъ изъ трубки, обычно служащей для этой цѣли. Всѣ эти свинцовыя діафрагмы имѣютъ по очень маленькой дырочкѣ. Когда всѣ отверстія расположены по одной прямой, то на кристаллъ падаетъ очень тонкій пучекъ лучей.

На нѣкоторомъ разстояніи помѣщаютъ фотографическую пластинку такимъ образомъ, чтобы она также была защищена свинцовыми пластинками. Она окружена черной бумагой, — понятно, для какой цѣли.

Послѣ экспозиціи, продолжающейся нѣсколько часовъ, и обработки пластинки помощью обыкновенныхъ проявителей и фиксаторовъ мы найдемъ на ней, кромѣ чернаго пятна, которое образуется отъ прямого дѣйствія пучка X-лучей, встрѣчающаго пластинку, еще извѣстное число другихъ пятенъ различной интенсивности, распредѣленныхъ правильнымъ образомъ соотвѣтственно съ симметріей данной кристаллической структуры. Явленіе происходитъ почти такъ, какъ если бы мы пользовались вмѣсто X-лучей свѣтовыми лучами и по пути ихъ помѣстили брилліантъ, который своими многочисленными гранями производилъ бы различные отраженные пучки.

Изученіе этого опыта и другихъ аналогичныхъ выяснило, что эти явленія происходятъ вслѣдствіе диффракціи, но отличаются гораздо болѣе сложнымъ характеромъ, чѣмъ явленія въ обыкновенной (диффракціонной) рѣшеткѣ, такъ какъ активные элементы здѣсь распредѣлены не по одной поверхности, а въ пространствѣ.

При всей сложности этого явленія я надѣюсь, что мнѣ сейчасъ удастся при помощи аналогій дать Вамъ о немъ достаточно ясное представленіе. Мое объясненіе, можетъ быть, покажется вамъ слишкомъ элементарнымъ и несоотвѣтствующимъ уровню вашихъ научныхъ знаній; но я разсчитываю на Ваше снисхожденіе, потому что я въ данномъ случаѣ преслѣдую одну лишь цѣль — не слишкомъ утомлять Ваше вниманіе.

Я уже упомянулъ раньше, что одинъ вертикальный колъ не даетъ замѣтнаго отраженія звука; густой же частоколъ вполнѣ можетъ породить эхо. Разсмотримъ теперь промежуточный случай, а именно множество кольевъ, поставленныхъ по одной линіи на извѣстномъ разстояніи одинъ отъ другого. Когда звуковыя волны достигаютъ кола, онъ становится, въ свою очередь, источникомъ вторичныхъ волнъ, которыя распространяются по всѣмъ направленіямъ. Если бы колья были поставлены вплотную, безъ промежутковъ, то изъ совокупности этихъ элементарныхъ волнъ образовались бы отраженныя волны. Но благодаря существованію промежутковъ недостаетъ тѣхъ элементарныхъ волнъ, которыя соотвѣтствуютъ отсутствующимъ кольямъ; однако, если эти промежутки достаточно малы, то конечный результатъ выражается почти только въ простомъ уменьшеніи напряженности отраженной волны. Строго говоря, можно убѣдиться, что, помимо этой полуотраженной волны, звукъ распространяется еще и въ другихъ опредѣленныхъ направленіяхъ; но это имѣетъ мало значенія. Мы можемъ поэтому утверждать, что рядъ кольевъ, разстоянія между которыми не слишкомъ велики, производитъ такое же дѣйствіе, какъ сплошной частоколъ.

Предположимъ теперь, что за разсматриваемой линіей кольевъ находится нѣсколько другихъ линій, параллельныхъ первой и на равныхъ разстояніяхъ одна отъ другой. Эти новыя линіи также будутъ производить отраженныя волны, и всѣ эти волны распространяются въ одномъ и томъ же направленіи, а именно въ томъ, которое опредѣляется извѣстными законами отраженія. Если онѣ достигаютъ уха наблюдателя, то послѣдній воспринимаетъ распространяемый ими звукъ.

Теперь мы пришли къ тому пункту, который требуетъ отъ насъ особаго вниманія. А именно, необходимо понять, что напряженность звукового воспріятія зависитъ отъ разстоянія, которое отдѣляетъ одну линію отъ слѣдующей.

Для этого необходимо принять во вниманіе, что волны, отражаемыя различными линіями кольевъ, распространяются всѣ въ одномъ и томъ же направленіи, но достигаютъ уха наблюдателя въ различные моменты. Въ самомъ дѣлѣ, волны отъ одной какой-либо линіи приходятъ позже тѣхъ, которыя исходятъ отъ слѣдующей, ближайшей къ наблюдателю линіи, и раньше волнъ, отражаемыхъ болѣе удаленными линіями. При одинаковомъ направленіи приходящихъ волнъ или падающихъ волнъ промежутокъ между моментами прибытія двухъ отраженныхъ волнъ, которыя произведены двумя слѣдующими одна за другой линіями, но соотвѣтствуютъ одной и той же падающей волнѣ, зависитъ, очевидно, отъ разстоянія между этими двумя линіями.

Теперь предположимъ, что этотъ промежутокъ времени случайно равенъ половинѣ періода звукового колебанія. Въ такомъ случаѣ отраженныя волны отъ двухъ сосѣднихъ линій должны взаимно уничтожать одна другую, и происходитъ такъ называемая интерференція: если волны, идущія отъ одной линіи, доносятъ до уха наблюдателя сжатіе воздуха, то волны отъ другой линіи производятъ разрѣженіе, и обратно. Если же указанный промежутокъ времени равенъ цѣлому періоду звукового колебанія или кратному его, то отраженныя волны отъ всѣхъ линій приходятъ къ наблюдателю съ согласными фазами и ихъ дѣйствія складываются. Понятно поэтому, что при отраженіи съ наибольшей напряженностью существуетъ опредѣленное соотношеніе между длиной волны и разстояніемъ между двумя линіями.

Все сказанное можно въ существенномъ примѣнить также и къ свѣтовымъ волнамъ и даже къ *X*-лучамъ, если толко примемъ, что эти послѣдніе имѣютъ колебательный характеръ (какъ это строго вытекаетъ изъ описаннаго выше опыта). Съ этой цѣлью мы замѣнимъ колья, которые служили намъ въ акустическомъ опытѣ, составляющими элементами кристаллическихъ тѣлъ.

Какъ уже давно извѣстно, для объясненія физическихъ свойствъ и чудесной архитектуры кристалловъ нужно допустить, что ихъ молекулы распредѣлены весьма правильнымъ образомъ. Въ наиболѣе простыхъ случаяхъ — такимъ именно простѣйшимъ случаемъ является каменная соль — мы должны приписать молекуламъ пространственное распредѣленіе, которое можно назвать кубическимъ и которое мы поясним съ помощью слѣдующей модели.

Вообразимъ множество равныхъ между собой кубиковъ; поставимъ нѣкоторое число ихъ на столъ вплотную другъ къ другу такъ, чтобы между ними не оставалось промежутковъ и чтобы они образовали какъ бы шахматную доску. На каждый кубикъ поставимъ еще по одному кубику и образуемъ такимъ образомъ второй слой, который займетъ то мѣсто, гдѣ находился бы нижнiй слой, если бы онъ былъ перемѣщенъ вертикально вверхъ. Такимъ же образомъ построимъ послѣдующiе верхнiе слои. Если мы вообразимъ, что всѣ кубики внезапно исчезли и во всѣхъ точкахъ, гдѣ находились ихъ вершины, мы помѣстимъ мысленно по молекулѣ, то получимъ правильную структуру кристалла каменной соли.

Можно также допустить, — Браггъ (W. L. Bragg) считаетъ даже эту гипотезу болѣе вѣроятной, чѣмъ предыдущую, — что въ каждой разсматриваемой точкѣ находится не по молекулѣ, но по атому хлора или натрiя въ случаѣ каменной соли, при чемъ атомы этихъ двухъ родовъ чередуются между собой какъ въ направленiяхъ реберъ кубиковъ, такъ и по направленiямъ ихъ дiагоналей.

Описанный выше опытъ находитъ удовлетворительное объясненiе, если мы примемъ колебательную природу *X*-лучей (и трудно даже понять, какъ его можно было бы объяснить другимъ образомъ). Въ этомъ смыслѣ мы въ правѣ сказать, что такой выводъ доказывается описаннымъ опытомъ, а именно слѣдующимъ образомъ.

По отношенiю къ весьма короткимъ волнамъ, которыя соотвѣтствуютъ *X*-лучамъ, молекулы или атомы, распредѣленные въ пространствѣ только-что описаннымъ образомъ, играютъ роль кольевъ въ нашемъ гипотетическомъ звуковомъ опытѣ. Всѣ частицы, расположенныя въ одной плоскости, и тѣ, которыя находятся въ плоскостяхъ, параллельныхъ первой, вызовутъ отраженiе лучей и произведутъ изображенiе на фотографической пластинкѣ, если уголъ паденiя лучей и разстоянiя между указанными плоскостями имѣютъ такiя значенiя, что фазы отраженныхъ волнъ согласуются между собой.

Если взятый пучокъ лучей не однороденъ, а состоитъ, напримѣръ, подобно бѣлому свѣту, изъ очень большого числа лучей различной длины волны, то можетъ получиться не одно, а множество изображенiй. Но даже и съ одной только длиной волны получается нѣсколько изображенiй, потому что системы равноотстоящихъ плоскостей, на которыхъ распредѣлены молекулы кристалла, можно представлять себѣ на тысячу различныхъ ладовъ. Согласно законамъ кристаллографiи, возможныя для этихъ плоскостей орiентировки совпадаютъ съ возможными гранями кристалла. Однако, достаточно видимое изображенiе даютъ только такiя системы плоскостей, на которыхъ промежутки между молекулами не слишкомъ велики.

Благодаря изслѣдованiямъ, произведеннымъ въ другихъ областяхъ физики, намъ съ нѣкоторымъ приближенiемъ извѣстны разстоянiя между молекулами различныхъ тѣлъ; напримѣръ, въ случаѣ каменной соли можно допустить, что на протяженiи одного миллиметра находятся около трехъ миллiоновъ молекулъ на равныхъ разстоянiяхъ между собой. Зная число молекулъ, мы можемъ при помощи описаннаго опыта вычислить длину волны; оказывается, что въ среднемъ длина волны *X*-лучей въ тысячу разъ меньше, чѣмъ длина волны видимыхъ лучей.

Аналогично со спектромъ свѣта можно говорить также о спектрѣ *X*-лучей, которые могутъ быть разсматриваемы, какъ ультра-ультрафiолетовые лучи. Можно, напримѣръ, сказать, что трубка съ платиновымъ антикатодомъ даетъ спектръ, аналогичный спектру бѣлаго свѣта, но съ нѣкоторыми болѣе выраженными линіями. Это значитъ, что испускаемые X-лучи имѣютъ волны различной длины и потому различную проникающую силу, и что нѣкоторые изъ этихъ лучей, имѣющіе опредѣленную длину волны, обладаютъ особенно большой напряженностью. Эти лучи характерны для платины, тогда какъ другія вещества характеризуются другими лучами. Напримѣръ, антикатодъ изъ родія испускаетъ, главнымъ образомъ, лучи съ двумя длинами волнъ, которыя мало различаются между собой, но которымъ соотвѣтствуетъ весьма неодинаковая напряженность.

Во многихъ случаяхъ тѣсное родство между X-лучами и свѣтовыми лучами можетъ оказаться полезнымъ для выясненія различныхъ опытовъ,—въ особенности, такихъ, при которыхъ происходитъ поглощеніе лучей; сюда, напримѣръ, относится свойство алюминіевой пластинки, которою такъ часто пользуются въ медицинѣ, чтобы задерживать менѣе проникающіе лучи. Эти лучи могли бы нанести кожѣ гораздо болѣе тяжелыя и глубокія поврежденія, чѣмъ цѣлый день, проведенный на Альпахъ на солнцѣ. Пластинка дѣйствуетъ подобно синему стеклу, помѣщенному по пути пучка бѣлаго свѣта. Но, примѣняя эти аналогіи, не слѣдуетъ забывать, что въ оптическихъ опытахъ мы обыкновенно пользуемся совершенно чистыми и прозрачными серединами, тогда какъ по отношенію къ X-лучамъ всѣ тѣла представляютъ собой мутную средину, потому что каждая молекула отражаетъ лучи по всѣмъ направленіямъ, часто измѣняя при этомъ длину волны и проникающую силу луча.

Итакъ, природа лучей, открытыхъ Р ё н т г е н о м ъ, не должна уже больше считаться таинственной. Когда Вы направляете на человѣческое тѣло лучи, исходящіе отъ антикатода вашихъ мощныхъ трубокъ, то Вы посылаете на чувствительныя или фосфоресцирующія пластинки, можно сказать, пучокъ невидимаго свѣта, чтобы изучить самыя недоступныя части человѣческаго тѣла по ихъ тѣнямъ. Когда Вы подвергаете больные органы благотворному дѣйствію лучей, чтобы уничтожить глубоко сидящіе корни болѣзни, то Вы практикуете, нѣкоторымъ образомъ, лѣченіе свѣтомъ.

Все это, строго говоря, только вѣроятно, а не установлено съ полной достовѣрностью; да врядъ ли полная достовѣрность можетъ когда-либо быть достигнута человѣкомъ. Однако, гипотеза, согласно которой X-лучи имѣютъ такую же природу, какъ свѣтовые лучи, и подобно имъ представляютъ собой распространяющіяся въ эѳирѣ электромагнитныя волны, является наиболѣе логическимъ выводомъ изъ новыхъ фактовъ. Польза этой гипотезы несомнѣнна, такъ какъ она можетъ служить руководящей нитью для новыхъ изслѣдованій и привести даже къ важнымъ результатамъ.

Вамъ такъ часто приходится пользоваться рёнтгеновскими лучами, что Вы, быть можетъ, будете имѣть случай открыть какія-нибудь новыя свойства этихъ лучей. Тогда заслуги Вашего общества, которому несомнѣнно предстоитъ блестящая будущность на благо медицинской науки, будутъ очень велики и въ той наукѣ, которую я люблю выше всего. Такова моя надежда и сердечное пожеланіе.

Второй Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики.

(27/XII 1913 г. — 3/I 1914 г.)

Проф. Д. Синцова.

Краткія свѣдѣнія о Съѣздѣ уже сообщены мною въ „Вѣстникѣ Опытной Физики"; напечатаны и его резолюціи. Остается поэтому дать общій обзоръ работы Съѣзда, — можетъ быть, подѣлиться своими впечатлѣніями. Послѣднее, впрочемъ, для меня довольно затруднительно, потому что я самъ состоялъ членомъ Организаціоннаго Комитета и потому не могу быть вполнѣ безпристрастнымъ. Съ этой стороны очень цѣннымъ матеріаломъ, — въ высшей степени полезнымъ для устроителей слѣдующаго Съѣзда, — должна послужить та анкета, о которой говорилъ на послѣднемъ засѣданіи почтенный предсѣдатель Организаціоннаго Комитета проф. Б. К. Млодзѣевскій, просившій участниковъ Съѣзда сообщить Организаціонному Комитету о вынесенныхъ впечатлѣніяхъ и о тѣхъ недостаткахъ, которые они замѣтили въ организаціи Съѣзда.

Офиціально Съѣздъ открытъ былъ 27 декабря, но наканунѣ офиціальнаго открытія въ „Альпійской Розѣ" происходило обычное собраніе „для предварительнаго ознакомленія", не особенно, впрочемъ, многолюдное, — оно привлекло человѣкъ 200. Сначала слышны были опасенія, что Съѣздъ окажется малолюднымъ вслѣдствіе отвлеченія части возможныхъ участниковъ назначеннымъ на то же время въ Петербургѣ I-ымъ Съѣздомъ преподавателей физики, химіи и космографіи. Эти опасенія, однако, не оправдались, — Московскій Съѣздъ оказался все же достаточно многолюднымъ: число его членовъ достигло 1061 и такимъ образомъ оказалось немногимъ ниже числа членовъ I-го Съѣзда, не имѣвшаго такого конкуррента.

I. Общія собранія.

Первое засѣданіе состоялось 27 декабря въ Большой аудиторіи Московскихъ Высшихъ женскихъ курсовъ. Объявивъ Съѣздъ открытымъ, предсѣдатель Организаціоннаго Комитета Б. К. Млодзѣевскій привѣтствовалъ отъ его имени собравшихся въ Москву, указалъ на сочувствіе, съ которымъ съ разныхъ сторонъ отнеслись къ устройству Съѣзда, и остановился на томъ значеніи, которое получили съѣзды въ русской общественной жизни послѣдняго времени. Достаточно отмѣтить, что на рождественскихъ праздникахъ въ Москвѣ и Петербургѣ работало одновременно не менѣе шести съѣздовъ разнаго рода, изъ которыхъ три посвящены были вопросамъ научно-учебнымъ и педагогическимъ. И это явленіе не только русское, но и повсемѣстное. Но въ Россіи обширность страны, сравнительно слабое развитіе городской жизни и связанная съ этими двумя условіями большая разъединенность культурныхъ дѣятелей дѣлаетъ съѣзды еще болѣе важнымъ факторомъ общественной жизни. По отношенію къ преподавателямъ математики легко могло бы показаться, что они всего менѣе нуждаются въ общеніи. Обыкновенно думаютъ, что уже давно — въ геометріи едва ли не съ Евклида — содержаніе математики опредѣлилось съ такою ясностью и облеклось въ такія точныя и строгія формы, что преподавателямъ математики остается только вести своихъ учениковъ по прямой и ровной дорогѣ къ совершенно точно намѣченной цѣли. Къ нашему величайшему счастью, на самомъ дѣлѣ это далеко не такъ, — къ счастью потому, что, если бы это было вѣрно, то это значило бы, что математическія науки, какъ учебный предметъ, умерли, что изученіе ихъ въ школахъ имѣетъ основаніемъ не растущее значеніе ихъ для человѣчества, а почтительное уваженіе къ ихъ прошлому. Въ дѣйствительности это совсѣмъ не такъ. Именно въ послѣднія десятилѣтія сдѣланы такія открытія, которыя не только измѣнили кореннымъ образомъ наши воззрѣнія по ряду основныхъ вопросовъ, но вызвали коренной переворотъ въ методикѣ математики (труды италіанскихъ и нѣмецкихъ ученыхъ о системѣ геометрическихъ аксіомъ и объ ихъ взаимоотношеніяхъ, въ связи съ чѣмъ сталъ на очередь и тщательно изученъ вопросъ о роли логики и интуиціи въ геометріи; ученіе о трансфинитныхъ числахъ и безконечныхъ множествахъ въ области ариѳметики и анализа; проникновеніе во всѣ отдѣлы математики идеи преобразованія и т. д.). Ораторъ указалъ на движеніе въ пользу реформы (Reformbewegung) въ Германіи и на дѣятельность учрежденной на Римскомъ Конгрессѣ Международной Комиссіи по преподаванію математики, — очерку дѣятельности которой былъ посвященъ состоявшійся послѣ перерыва мой докладъ.

Но сперва — вслѣдъ за рѣчью проф. Б. К. Млодзѣевскаго — произведено было избраніе въ предсѣдатели Съѣзда товарища предсѣдателя I-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики Михаила Григорьевича Попруженко. Затѣмъ слѣдовали привѣтствія открывшемуся Съѣзду представителя Министерства Народнаго Просвѣщенія П. А. Некрасова, директора Московскихъ Высшихъ женскихъ курсовъ С. А. Чаплыгина, привѣтствовавшаго Съѣздъ отъ имени Совѣта и Попечительнаго Совѣта Курсовъ и пожелавшаго ему успѣха въ его дѣятельности. „Считаю особымъ счастьемъ и особою для себя честью привѣтствовать Съѣздъ въ стѣнахъ нашего дорогого учрежденія. Добро пожаловать, господа!“ — заключилъ свое привѣтствіе директоръ Курсовъ, въ новомъ*) прекрасномъ аудиторномъ зданіи которыхъ на Дѣвичьемъ Полѣ происходили засѣданія Съѣзда. Деканъ физико-математическаго факультета Московскаго университета Л. К. Лахтинъ привѣтствовалъ Съѣздъ отъ имени факультета, помощникъ директора Педагогическаго Музея военно-учебныхъ заведеній въ Петербургѣ привѣтствовалъ отъ имени Музея, въ стѣнахъ котораго возникла и получила осуществленіе идея созыва I-го Съѣзда преподавателей математики. Затѣмъ слѣдовалъ еще цѣлый рядъ другихъ привѣтствій, личныхъ и телеграфныхъ, а также письменное привѣтствіе предсѣдателя Организаціоннаго Комитета I-го Съѣзда З. А. Макшеева, которому была послана отвѣтная телеграмма отъ имени Съѣзда. Кромѣ того, Съѣздъ отправилъ привѣтствіе I-му Съѣзду преподавателей физики, а въ одномъ изъ слѣдующихъ засѣданій — также Съѣзду по начальному образованію.

Послѣ перерыва послѣдовали мой докладъ**) и докладъ проф. А. К. Власова — „Какія стороны элементарной математики представляютъ цѣнность для общаго образованія“. Почтенный докладчикъ критически отнесся къ господствующимъ воззрѣніямъ на роль математики въ общемъ образованіи — съ одной стороны, такъ сказать, официальному (преподаваніе математики — средство разви-

*) Закончено въ 1912 г., открыто и освящено осенью 1913 г.

**) „О дѣятельности Международной Комиссіи по преподаванію математики“. Онъ напечатанъ въ „Дневникѣ“ и въ „Математическомъ Образованіи“, и потому я позволю себѣ на немъ не останавливаться.

тія строго логическаго мышленія) и, съ другой стороны, утилитарному (сообщеніе самыхъ необходимыхъ умѣній, напримѣръ, умѣнія дѣлать нужные расчеты (Перри), увеличеніе работоспособности ученика (Лоджъ), но съ поправкою: „ученикъ долженъ переоткрыть для себя всякій преподаваемый ему научный фактъ"). Самъ докладчикъ полагаетъ, что цѣль преподаванія математики заключается въ томъ, чтобы вызвать въ учащемся математическое мышленіе соотвѣтственно корнямъ этого мышленія, какъ аналитическое, такъ и геометрическое, какъ относящееся къ числу и вычисленію, такъ и относящееся къ пространственному представленію и построенію, мышленіе, которое могло бы служить для него орудіемъ познанія міра какъ со стороны множественности и величины, такъ и со стороны формъ, строенія сложнаго, пространственныхъ отношеній. Съ этимъ критеріемъ докладчикъ переходитъ къ обзору различныхъ отдѣловъ математики. Въ ариѳметикѣ онъ становится на сторону такъ называемыхъ счетчиковъ среди методистовъ ариѳметики. Другая сторона — въ примѣненіи искусства вычисленія къ величинамъ, т. е. къ ихъ измѣренію. Приближенное вычисленіе и измѣреніе, оцѣнка ихъ точности — все это входитъ въ задачу ариѳметики и все это является весьма цѣннымъ для общаго образованія. Въ низшихъ школахъ этимъ и ограничиваются. Но далѣе слѣдуютъ два пункта, связующіе ариѳметику съ алгеброй и высшимъ анализомъ: 1) различеніе конечнаго процесса и безконечнаго, 2) комплексъ дѣйствій, какъ объектъ мысли, — что приводитъ къ 3) функціональному мышленію. Всѣ эти три пункта — цѣнныя стороны математики, какъ общеобразовательнаго предмета. Развитіе этихъ понятій можетъ быть остановлено на любой стадіи, но самый фактъ ихъ образованія и усвоенія расширяетъ кругозоръ.

Другая сторона математическаго дуализма имѣетъ своей основой пространственное представленіе и построенія. Изъ трехъ различныхъ вещей, обозначаемыхъ словомъ „пространство" (1. интуитивное, 2. физическое или эмпирическое и 3) геометрическое или абстрактное), только третье понятіе, абстрактное пространство, составляетъ объектъ геометріи, какъ науки. Интуиція, какъ таковая, безъ помощи геометріи безсильна охватить всю совокупность образовъ. Геометрія, какъ дѣятельность построенія, обостряетъ интуицію, увеличиваетъ емкость нашего представленія. Въ этомъ и заключается цѣнная сторона изученія геометріи.

Преній въ общемъ собраніи не было. Засѣданія секцій начались въ тотъ же день вечеромъ. Было предположено — въ виду заявленій многихъ о желаніи слушать доклады по нѣсколькимъ секціямъ — ограничиться только секціей А (ариѳметика и алгебра) и секціей В (геометрія и тригонометрія), относя доклады, представляющіе болѣе общій интересъ, въ соединенныя засѣданія секцій. Но мы сначала остановимся на общихъ собраніяхъ.

Второе общее собраніе происходило 31 декабря. Оно открылось рѣчью проф. Б. К. Млодзѣевскаго — „Успѣхи элементарной геометріи въ 19-мъ столѣтіи", въ которой почтенный ораторъ остановился на развитіи новой геометріи въ трудахъ Понселе и Штейнера и на столь характерномъ для прошлаго вѣка изученіи вопроса объ основаніяхъ геометріи, начавшемся въ 1-ой четверти вѣка работами по теоріи параллельныхъ, приведшими въ конечномъ счетѣ къ созданію неевклидовой геометріи и заканчивающимися въ послѣднюю четверть вѣка работами аксіоматиковъ. Вторую рѣчь произнесъ предсѣдатель I-го съѣзда проф. А. В. Васильевъ, посвятившій ее „Принципу экономіи въ математикѣ" и связавшій, такимъ образомъ, основной принципъ ариѳметики — „принципъ перманентности формальныхъ законовъ" Г. Ганкеля съ принципомъ „экономіи мышленія“ Маха. Наконецъ, третья рѣчь, принадлежавшая В. В. Бобынину, извѣстному знатоку исторіи математики и одному изъ немногихъ русскихъ самостоятельныхъ работниковъ въ этой области, была посвящена вопросу „Объ указаніяхъ, получаемыхъ преподаваніемъ математики отъ ея исторіи“.

Наконецъ, по предложенію группы членовъ Съѣзда, посланы привѣтственныя телеграммы редакціи „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“ и основателю журнала проф. В. П. Ермакову.

3 января состоялось послѣднее общее собраніе, на которомъ, послѣ доклада Организаціоннаго Комитета и голосованія вынесенныхъ резолюцій, уже извѣстныхъ читателямъ „Вѣстника“, произнесъ заключительную рѣчь предсѣдатель Съѣзда ген.-лейт. М. Г. Попруженко, выразившій общее удовлетвореніе по поводу серьезной и плодотворной работы Съѣзда и объявившій Съѣздъ закрытымъ. Наконецъ, А. І. Бачинскій произнесъ рѣчь, посвященную роли математики въ курсѣ физики средней школы.

II. Соединенныя засѣданія.

Перейдемъ теперь къ соединеннымъ засѣданіямъ. Ихъ было всего 5 (28, 29 и 30 декабря, 2 и 3 января). На нихъ были заслушаны 10 докладовъ, которые были посвящены вопросамъ о подготовкѣ преподавателей средней школы (доклады проф. Н. Н. Салтыкова и мой), объ организаціи преподаванія въ старшемъ концентрѣ средней школы (докладъ Б. Б. Піотровскаго „О повторительныхъ курсахъ“ и П. А. Некрасова „О промежуточной лицейской ступени между средней и высшей школами“), введенію высшей математики въ курсъ средней школы (докладъ М. Г. Попруженко „О курсѣ анализа въ средней школѣ“, мой докладъ „О преподаваніи аналитической геометріи въ VII классѣ реальныхъ училищъ“, докладъ С. Н. Бернштейна — „Понятіе о функціи въ средней школѣ“ и до извѣстной степени докладъ Г. А. Грузинцева — „Неевклидова геометрія и средняя школа“), организаціоннымъ вопросамъ (Д. Д. Галанинъ — „Вліяніе экзаменовъ на успѣшность по математикѣ“ и К. Ѳ. Лебединцевъ — „О способахъ контроля и провѣрки знаній учащихся по математикѣ“), характеристикѣ того, что выносятъ учащіеся изъ средней школы (Т. А. Эренфестъ-Аѳанасьева — „О результатахъ анкеты по вопросу о преподаваніи математики въ средней школѣ“), и, наконецъ, докладъ Ѳ. И. Егорова былъ посвященъ характеристикѣ новыхъ теченій въ преподаваніи математики.

Важность затронутыхъ перечисленными докладами вопросовъ и оживленность преній по нѣкоторымъ изъ нихъ позволяютъ именно въ нихъ видѣть центръ тяжести Съѣзда. Я считаю поэтому полезнымъ остановиться нѣсколько на этихъ докладахъ. Къ сожалѣнію, въ настоящее время отпечатаны лишь нѣкоторые изъ нихъ, а потому о другихъ приходится говорить только на основаніи краткихъ протоколовъ въ „Дневникѣ“ Съѣзда и по личнымъ воспоминаніямъ.

Остановлюсь прежде всего на вопросѣ о подготовкѣ преподавателей. Этотъ большой и сложный вопросъ далекъ отъ окончательнаго и удовлетворяющаго всѣхъ рѣшенія, и притомъ не только на практикѣ, но и въ теоріи. Неудивительно поэтому, что посвященный этому вопросу докладъ проф. Н. Н. Салтыкова (28/XII)*) вызвалъ оживленнѣйшія пренія. Точка зрѣнія проф. Салты-

*) Напечатанъ въ № 1 „Математическаго Образованія“ за 1914 годъ, стр. 30—43.

кова въ этомъ докладѣ нѣсколько отличается отъ той позиціи, которую онъ защищалъ въ своихъ прежнихъ статьяхъ*) по тому же вопросу: если, по старому мнѣнію докладчика, готовить учителей долженъ университетъ и только университетъ, то теперь „въ помощь, рядомъ съ университетомъ желательны вспомогательныя учрежденія, представляющія удобства для научныхъ занятій и подготовки къ преподавательской дѣятельности, въ лицѣ особыхъ руководителей и въ отношеніи приспособленности помѣщеній, какъ это имѣетъ мѣсто въ Высшей Нормальной школѣ въ Парижѣ“. Примѣръ Франціи съ ея конкурсными экзаменами на agrégé (concours d'agrégation), къ которымъ подготовляетъ „École Normale Supérieure“, убѣждаетъ докладчика, что и у насъ „нѣтъ надобности молодымъ людямъ для подготовки къ преподавательской дѣятельности изучать педагогику въ видѣ особаго курса“, какъ говоритъ о Франціи эта приведенная докладчикомъ фраза, и что „подготовка преподавателей средней школы не должна носить узко-профессіональнаго характера, но должна быть основана на чисто научной организаціи преподаванія“. То же самое заключеніе выводитъ докладчикъ и изъ разсмотрѣнія постановки того же дѣла въ Германіи. На существенное различіе германской системы было указано докладчику во время преній и Д. Э. Теннеръ, указавъ на пышное развитіе методической литературы, въ Германіи, отсутствіе ея во Франціи отнюдь не причисляетъ къ преимуществамъ послѣдней. Но и въ самой Франціи, надо сказать, дѣло обстоитъ не совсѣмъ такъ, какъ указываетъ почтенный докладчикъ. Мнѣ кажется, категоричность его сужденій объясняется нѣкоторымъ недоразумѣніемъ. Онъ говоритъ въ своемъ докладѣ о „пробныхъ лекціяхъ“, которыя долженъ прочесть экзаменующійся, и подготовительныя занятія къ которымъ „заключаются въ совмѣстномъ обсужденіи различныхъ темъ для лекцій, въ чтеніи лекцій и ихъ критикѣ“. Если обратиться къ оригиналу, то тамъ мы найдемъ слово „leçon“, которое по-французски означаетъ и „лекцію“ и „урокъ“. Здѣсь это слово означаетъ „урокъ“, но тогда приведенное мѣсто указываетъ, напротивъ, что въ самой „École Normale“ очень заботятся о практической подготовкѣ будущихъ учителей, и ихъ умѣнье провѣряется при помощи пробныхъ уроковъ. Достаточно прочесть стр. 74—79 „Отчета“**) покойнаго J. Tannery, Directeur des études scientifiques à l'École Normale, чтобы въ этомъ убѣдиться.

Вотъ что говоритъ, напримѣръ, J. Tannery о подготовкѣ къ пробнымъ урокамъ, занимающей большую часть 3-го года: ...„Три руководителя (maîtres de conférence), по крайней мѣрѣ, принимаютъ въ этомъ участіе и посвящаютъ этому въ общемъ 5 или 6 conférences въ недѣлю (число conférences колеблется соотвѣтственно числу участниковъ; обычно ихъ бываетъ отъ 10 до 20, чтобы очередь каждаго кандидата наступала достаточно часто). Maîtres de conférences и ученики бесѣдуютъ вмѣстѣ о планахъ различныхъ уроковъ, которые могутъ быть выбраны изъ программы. Между учениками распредѣляются темы, наиболѣе указываемыя или наиболѣе трудныя. Для приготовленія ихъ они имѣютъ вре-

*) „Къ вопросу объ учрежденіи курсовъ для подготовки преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній“. „Записки Харьк. Унив.“, 1910 г., кн. I, стр. 49—59.

**) „Rapport sur l'Enseignement des Mathématiques à l'École Normale Supérieur et sur l'agrégation des sciences mathématiques“ въ III-мъ томѣ „Отчетовъ Французской подкомиссіи“; изд. Hachette, 1911 г.

мени даже больше, чѣмъ слѣдуетъ, и книги, какія только пожелаютъ. Они говорятъ между собою объ этой подготовкѣ, вспоминаютъ свои впечатлѣнія, сравниваютъ, какъ преподавалъ этотъ вопросъ тотъ или другой учитель, котораго они имѣли, какъ они трактуются тѣмъ или инымъ авторомъ. Конечно, ремесло преподавателя (professeur), какъ и всякое другое, требуетъ выучки (apprentissage); но надо замѣтить, что нѣтъ другого ремесла, которое ученики (apprentis) знали бы лучше, чѣмъ это: они не забыли своихъ учителей, хорошихъ и дурныхъ; они не забыли, что имъ понравилось, чего имъ недоставало, отъ чего они страдали; дѣло, которое они дѣлаютъ, оживляетъ въ нихъ всѣ эти воспоминанія, которыя становятся предметомъ долгихъ разговоровъ, горячихъ споровъ, веселыхъ шутокъ. Такой-то ненавистный учитель своимъ примѣромъ оказываетъ имъ наилучшія услуги, — вотъ какъ не надо преподавать! Другой, превосходный, ихъ успокаиваетъ, потому что и ему случалось ошибиться".

Потомъ J. Tannery описываетъ, какъ въ назначенный день урокъ дается передъ товарищами и руководителями и затѣмъ обсуждается.

Но я не буду продолжать отвлекаться въ сторону**). Приведенная выписка достаточно доказываетъ, что практическая подготовка преподавателя въ Нормальной школѣ далеко не въ загонѣ. Много мѣста отводится ей и въ другихъ французскихъ учрежденіяхъ, подготавливающихъ преподавателей, напримѣръ, въ Женской Нормальной школѣ въ Севрѣ (тамъ же, т. V, отчетъ P. Appell'я).

Я самъ въ своемъ докладѣ (сдѣланномъ 29/XII) подчеркнулъ только, какова была точка зрѣнія физико-математическаго факультета Харьковскаго университета, а также остановился на своемъ личномъ опытѣ по веденію занятій на Педагогическихъ курсахъ при Харьковскомъ учебномъ округѣ.

Въ послѣдовавшихъ за докладомъ проф. Салтыкова преніяхъ настойчиво поддерживалась мысль, что, конечно, высокій уровень научной подготовки нуженъ, но нужна и подготовка общепедагогическая; послѣднее и нашло себѣ отраженіе въ резолюціяхъ Съѣзда (рез. I, а).

Весьма оживленныя пренія вызвалъ также интересный докладъ Б. Б. Піотровскаго (28/XII) — „О повторительныхъ курсахъ"; содержаніе его вкратцѣ слѣдующее: курсъ средней школы долженъ быть расположенъ концентрически; въ первыхъ концентрахъ должна преобладать интуиція и конкретно-индуктивный методъ изложенія; въ послѣднемъ концентрѣ пройденный матеріалъ долженъ быть обобщенъ и систематизированъ, умѣстны отвлеченія, стремленія къ болѣе строгой дедукціи, къ построенію логической системы; соотвѣтственно этому можетъ быть построена программа послѣдняго класса по ариѳметикѣ, повторительной алгебрѣ и геометріи. Точно такъ же усиленный обмѣнъ мнѣній послѣдовалъ послѣ доклада П. А. Некрасова — „Промежуточная лицейская ступень между средней и высшей школой" (29/XII), которому предшествовалъ его же секціонный докладъ (28/XII, вечеромъ) — „Объ учебныхъ особенностяхъ двухъ направленій математическаго курса средней школы"; въ своихъ сообщеніяхъ докладчикъ, съ одной стороны, стремится провести французскій планъ организаціи средней школы съ раздѣленіемъ на два цикла и четыре секціи, а съ другой — возстаетъ противъ сокращенія аритмологическихъ частей программы. Но проводимые въ этихъ докладахъ взгляды еще не нашли общаго признанія

**) На организаціи подготовки преподавателей математики во Франціи и Германіи слѣдовало бы остановиться подробнѣе; я надѣюсь сдѣлать это въ другой разъ.

и въ резолюціяхъ Съѣзда отразились лишь въ весьма общей формѣ. Напротивъ, единодушное сочувствіе встрѣтили пожеланія повышенія дозы высшей математики въ средней школѣ тѣхъ типовъ, гдѣ она уже введена, и введенія ея тамъ, гдѣ ея еще нѣтъ.

Докладъ М. Г. Попруженко указывалъ на успѣхъ преподаванія началъ анализа безконечно-малыхъ въ кадетскихъ корпусахъ и на сравнительно слабую успѣшность по этому предмету въ VII-омъ классѣ реальныхъ училищъ (правда, основываясь на весьма недостаточномъ числѣ отвѣтовъ на опросныхъ листахъ) и отмѣтилъ бо́льшую осуществимость программъ въ первыхъ и неудовлетворительность программъ вторыхъ. Въ преніяхъ одни высказывались въ защиту реальныхъ училищъ, указывая на возможность и теперь достигать положительныхъ результатовъ, другіе же указывали, какъ на причину, вредящую успѣху дѣла, на конкурсные экзамены, поглощающіе все вниманіе учениковъ VII-го класса. Наконецъ, отмѣчена была желательность введенія преподаванія анализа и въ классическихъ гимназіяхъ.

Я въ своемъ докладѣ о преподаваніи аналитической геометріи въ VII-мъ классѣ предполагалъ, что ее слѣдуетъ преподавать, какъ отдѣльный преметъ, а не сливать съ другими курсами, что она должна предшествовать курсу анализа, и, наконецъ, предложилъ нѣкоторую перегруппировку официіальной программы, указывая, что, собственно, важна не программа, а то, какъ ее понимаютъ, и что по одной и той же программѣ можно преподавать очень различно. Мнѣ возражали на это, что мое мнѣніе о маломъ значеніи программы слишкомъ оптимистично, — ибо она при отсутствіи инструкціи является единственнымъ, что имѣется въ рукахъ учителя. Но я именно и стремился показать, что при отсутствіи инструкціи можно вычитывать изъ программы многое, чего, можетъ быть, и не имѣли въ виду ея составители. И хотя я всецѣло признаю важность инструкцій, но полагаю, что наилучшая комбинація это — краткая программа съ подробною инструкціей. Однако, послѣдняя связываетъ преподавателя и, если составлена неудачно, приноситъ мало пользы. При отсутствіи же ея можно по своему истолковывать программу и, въ частности, подробнѣе останавливаться на аналитическомъ изученіи окружности, отодвигая коническія сѣченія на второй планъ.

Къ вопросу о введеніи въ среднюю школу высшей математики можно отнести докладъ С. Н. Бернштейна — „Понятіе о функціи въ средней школѣ“, гдѣ даются три опредѣленія функціи: оперативное, табличное и графическое. Наиболѣе общимъ является табличное, но фактически мы не можемъ построить функцію, которая не допускала бы оперативнаго опредѣленія, графическое же опредѣленіе является лишь несовершеннымъ изображеніемъ непрерывной функціи, которая представляетъ собой оперативную функцію.

Сюда же я отношу докладъ Г. А. Грузинцева — „Неевклидова геометрія въ средней школѣ“, въ которомъ докладчикъ рекомендовалъ неевклидову геометрію вводить въ самыхъ минимальныхъ дозахъ, для того чтобы дать возможность оцѣнить значеніе аксіомъ и постулатовъ при обоснованіи геометріи. Въ преніяхъ по поводу послѣдняго доклада участіе приняли И. А. Долгушинъ, отстаивавшій идею Пуанкаре изображенія неевклидовой геометріи при помощи связки круговъ, и Д. Д. Мордухай-Болтовской, рекомендовавшій знакомить взамѣнъ этого вопроса съ принципомъ двойственности.

Т. А. Аѳанасьева-Эренфестъ познакомила съ результатами анкеты, произведенной отъ имени Педагогическаго Музея военно-учебныхъ заведеній среди слушателей высшихъ учебныхъ заведеній С.-Петербурга и отчасти провинціальныхъ относительно впечатлѣній, вынесенныхъ ими изъ курса средней школы; были также предложены нѣкоторые вопросы, имѣвшіе въ виду выяснить, насколько сохранились познанія, пріобрѣтенныя въ средней школѣ. При помощи проекціоннаго фонаря были демонстрированы результаты анкеты въ видѣ статистическихъ таблицъ. Въ виду интереса работъ желательно, чтобы докладчица поскорѣе выполнила данное обѣщаніе напечатать болѣе подробные результаты работъ. Въ преніяхъ было высказано пожеланіе производства ряда анкетъ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Напомнимъ при этомъ объ аналогичной анкетѣ, произведенной въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Кавказскаго учебнаго округа, съ результатами которой насъ ознакомили на Тифлисскомъ съѣздѣ.

Отмѣтимъ, наконецъ, докладъ Ѳ. И. Егорова — „Новыя теченія въ преподаваніи математики" (30/XII), въ которомъ докладчикъ остановился на интуитивномъ курсѣ геометріи въ начальной школѣ — въ качествѣ перваго концентра въ средней школѣ, — на лабораторномъ методѣ и математическихъ лабораторіяхъ (Юнгъ, Мрочекъ и Филипповичъ; вопросъ о графикахъ; незаконченность спора между монографическимъ и счетнымъ методомъ; новое направленіе въ преподаваніи ариѳмитики — систематика; стремленіе къ сліянію различныхъ отраслей математики).

Приходится только упомянуть о докладахъ Д. Д. Галанина — „Вліяніе экзаменовъ на успѣшность по математикѣ" и К. Ѳ. Лебединцева — „О способахъ контроля и провѣрки знаній учащихся по математикѣ", къ которымъ по содержанію примыкалъ сдѣланный на секціонномъ засѣданіи докладъ В. В. Петрова — „Объ экзаменныхъ работахъ по ариѳметикѣ въ женскихъ гимназіяхъ" и до извѣстной степени его же докладъ „О практическихъ работахъ по математикѣ въ средней школѣ", а также доклады Н. Г. Плехановой — „Письменные отвѣты по математикѣ въ средней школѣ" и В. Н. Рутковскаго — „О письменныхъ ариѳметическихъ работахъ". Въ преніяхъ были, между прочимъ, высказаны пожеланія, чтобы въ одномъ изъ періодическихъ журналовъ по математикѣ былъ введенъ особый отдѣлъ по вопросу „практическія работы по математикѣ", и чтобы въ немъ помѣщались задачи „жизненнаго характера", изъ которыхъ современемъ могла бы быть составлена хрестоматія.

III. Засѣданія секцій.

Секціонные доклады можно разбить на такія рубрики: I) доклады общаго содержанія и II) доклады по отдѣльнымъ предметамъ средней школы.

I. Доклады общаго содержанія, кромѣ уже перечисленныхъ выше:

М. Д. Осинскій — „Направляющіе элементы математическаго изслѣдованія"; Н. А. Извольскій — „Комбинаціонная работа, какъ основа преподаванія математики"; В. Э. Фриденбергъ — „Организація внѣклассныхъ занятій по математикѣ"; І. И. Чистяковъ — „Объ иностранныхъ журналахъ по математикѣ для учащихъ и учащихся"; С. Н. Поляковъ — „Вопросъ о реформѣ школьной математики съ методологической точки зрѣнія"; Е. Е. Кедринъ — „По поводу новаго взгляда на значеніе условныхъ выраженій въ математикѣ"; В. В. Оглоблинъ — „Работы Кіевскаго Физико-Математическаго общества по вопросамъ преподаванія математики".

Я остановлюсь только на одномъ — на вопросѣ о реформѣ преподаванія математики въ женскихъ учебныхъ заведеніяхъ. Стремленіе женщины къ высшему образованію вызвало къ жизни цѣлый рядъ высшихъ женскихъ учебныхъ заведеній (Высшіе Женскіе курсы въ С.-Петербургѣ и Москвѣ, Женскій Медицинскій институтъ въ С.-Петербургѣ и Харьковѣ, Педагогическіе курсы въ С.-Петербургѣ, Высшіе Женскіе курсы въ Казани, Кіевѣ Харьковѣ, Одессѣ, Тифлисѣ, Новочеркасскѣ, Высшіе Коммерческіе курсы и т. д.) и поставило на очередь необходимость поднять уровень программы женскихъ гимназій по математикѣ хотя бы до уровня мужскихъ гимназій. Этимъ вопросамъ и былъ посвященъ докладъ В. П. Писарева (Москва) — „О желательныхъ измѣненіяхъ въ постановкѣ преподаванія математики въ женскихъ гимназіяхъ", явившійся результатомъ совмѣстной частной работы нѣсколькохъ членовъ Московскаго Математическаго кружка. Какъ замѣтилъ докладчикъ въ заключеніе оживленнѣйшихъ преній, вопроса о программахъ авторы доклада умышленно не касались, полагая, что этотъ вопросъ долженъ быть разрѣшенъ въ связи съ общей реформой средней школы.

Позволю себѣ прибавить, что, считая реформу программъ преподаванія математики въ женскихъ учебныхъ заведеніяхъ не менѣе насущной, чѣмъ обновленіе программы средней школы, я именно эти оба вопроса и выбралъ для иллюстраціи результатовъ работы Международной Комиссіи. Между прочимъ, можетъ быть, не лишнее отмѣтить и здѣсь, что совмѣстное обученіе мальчиковъ и дѣвочекъ въ средней школѣ въ Швейцаріи и Соединенныхъ Штатахъ даетъ хорошій результатъ, что такой разницы въ способностяхъ тѣхъ и другихъ по отношенію къ математикѣ, которая оправдывала бы пониженіе программъ для женскихъ учебныхъ заведеній, въ общемъ не замѣчается, что реформы женскаго образованія во Франціи, повысившія уровень преподаванія, привились и вызываютъ у близко стоящихъ къ дѣлу лицъ лишь пожеланія дальнѣйшаго повышенія числа уроковъ и пополненія программъ. (См. соотв. „Отчеты Французской подкомиссіи", т. V, и J. Schröder — „Die neuzeitliche Entwickelung des mathematischen Unterrichts an den höheren Mädchenschulen Deutschlands, insbesondere Norddeutschlands", тамъ же, т. I, п. 5).

II. Переходя къ докладамъ спеціальнаго характера, отмѣтимъ прежде всего, что тригонометріи, которой нѣсколько не посчастливилось на первомъ съѣздѣ, здѣсь было отведено особое засѣданіе, на которомъ сдѣланы были доклады Б. Б. Піотровскаго — „Курсъ тригонометріи въ средней школѣ", Л. В. Вольфке — „О методѣ преподаванія тригонометріи" и Г. А. Грузинцева — „О преподаваніи тригонометріи". Идея раздѣленія преподаванія на два концентра, въ первомъ изъ которыхъ вводятъ и пользуются одной только тригонометрической функціей и по возможности скорѣе переходятъ къ рѣшенію треугольниковъ, встрѣтила общее сочувствіе, и лишь относительно второго концентра замѣчалось разнорѣчіе.

По геометріи мы имѣли, во-первыхъ, интереснѣйшій и поучительный докладъ А. К. Власова — „Изобразительное искусство и геометрія", обратившаго вниманіе на столь часто встрѣчающіяся погрѣшности при изображеніи на доскѣ или бумагѣ пространственныхъ образовъ. Докладчикъ указалъ, что достаточно пользоваться слѣдующимъ свойствомъ параллельной проекціи, ортогональной или косой, и вытекающими изъ нихъ слѣдствіями: 1) проекціи параллельныхъ отрѣзковъ параллельны между собой и пропорціональны проектируемымъ отрѣзкамъ; 2) проекція круга есть эллипсъ; 3) перпендикулярные діаметры круга проектируются въ сопряженные діаметры эллипса. Этихъ свойствъ достаточно для такъ называемыхъ аксонометрическихъ построеній, которыя при знакомствѣ съ изображаемымъ образомъ въ высшей степени полезны для воспитанія пространственнаго представленія. Къ этому докладу тѣсно примыкалъ докладъ М. П. Воскресенскаго — „О развитии представленій о соотношеніяхъ въ пространствѣ", рекомендовавшаго пользоваться диметрической проекціей.

Въ томъ же засѣданіи 29/XII мы заслушали докладъ А. Р. Кулишера — „Идея движенія въ современной геометріи и область ея примѣненія въ курсѣ средней школы", знакомившій съ начальнымъ преподаваніемъ геометріи въ духѣ новыхъ идей и сопровождавшійся иллюстраціями и тѣневыми картинами*).

Здѣсь же упомянемъ о докладѣ Д. П. Теннера — „Что можетъ дать кубъ, какъ наглядное пособіе". Хотя онъ и былъ сдѣланъ въ секціи *A*, но относился къ геометріи и имѣлъ цѣлью показать богатство геометрическаго матеріала, которое можно извлечь изъ куба, какъ нагляднаго пособія, въ области воображенія, умѣнья наблюдать и дѣлать выводы и для поднятія самостоятельности учащихся.

Изъ области преподаванія геометріи были сдѣланы, сверхъ того, слѣдующіе доклады, посвященные вопросу объ измѣреніи круга: Н. А. Извольскій — „Вопросъ объ опредѣленіи длины окружности"; В. А. Соколовъ — „Когда и какъ проходить вопросъ объ измѣреніи длины окружности въ курсѣ VII-го класса реальныхъ училищъ и въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ"; К. Ѳ. Лебединцевъ — „Теорія предѣловъ въ курсѣ геометріи, какъ необходимая предпосылка къ опредѣленію длины окружности".

Остаются доклады по ариѳметикѣ и алгебрѣ. Ихъ было сравнительно немного. Н. Г. Богуславская — „Изученіе первой тысячи, какъ подготовка къ нумераціи, основанная на наглядныхъ и лабораторныхъ пріемахъ преподаванія"; Д. А. Волковскій — „О значеніи картинокъ при первоначальномъ обученіи ариѳметикѣ"; П. Долгушинъ — „Упрощенное вычисленіе"; Д. Д. Галанинъ — „Эволюція понятія объ умноженіи въ XVIII вѣкѣ (по русскимъ учебникамъ)"; послѣ рѣчи В. В. Бобынина это былъ единственный докладъ по исторіи математики; Н. Г. Панковъ — „Измѣрительный методъ въ начальномъ курсѣ ариѳметики".

Къ области же ариѳметики, хотя и въ расширенномъ смыслѣ, относились и доклады: П. А. Долгушинъ — „Теорія ошибки при линейномъ интерполированіи"; А. Г. Александровъ — „Глава о несоизмѣримыхъ числахъ въ курсѣ математики средней школы"; В. Г. Фридманъ — „Методика преподаванія отрицательныхъ и положительныхъ (относительныхъ) чиселъ въ средней школѣ".

На этомъ мы закончимъ обзоръ работъ II-го Съѣзда преподавателей математики. Какъ мы видѣли, работа его сосредоточилась, главнымъ образомъ, на общихъ вопросахъ. И изъ методическихъ были доклады именно по наиболѣе принципіальнымъ вопросамъ. Пренія носили весьма оживленный характеръ.

Если подсчитать число докладовъ по мѣстностямъ, то за Москвою и Петербургомъ, давшими наибольшее число докладовъ, непосредственно слѣдовалъ Харьковъ. Такое энергичное участіе харьковскихъ математиковъ и побудило, вѣроятно, Съѣздъ принять рѣшеніе выбрать мѣстомъ III-го Съѣзда именно Харьковъ. Но при этомъ не было принято во вниманіе то соображеніе, что почти одновременно, на протяженіи всего полугода, въ Харьковѣ уже намѣ-

*) Съ взглядами автора можно ближе ознакомиться по только что вышедшей книгѣ его: А. Р. Кулишеръ — „Учебникъ геометріи". Ч. I — Курсъ подготовительный; съ 130 рис. и 5 таблицами въ краскахъ; изд. Луковникова, С.-Петербургъ, 1914.

ченъ XIV-ый Съѣздъ Русскихъ естествоиспытателей и врачей съ его секціями математики и преподаванія, — что не только возлагаетъ на харьковскую группу, все же несравненно менѣе сильную по числу, очень трудную задачу, но и вызываетъ большія сомнѣнія по поводу того, полезно ли и интересно ли для русскаго преподавателя математики дважды на протяженіи полугода посѣтить одинъ и тотъ же провинціальный городъ. По этимъ двумъ основаніямъ Харьковское Математическое общество, къ которому обратился Организаціонный Комитетъ II-го Съѣзда съ извѣщеніемъ о предположеніи Съѣзда, послѣ зрѣлаго обсужденія не нашло возможнымъ взять на себя организацію III-го Съѣзда, а слѣдовательно, и отвѣтственность за его успѣхъ.

Конечно, не безъ нѣкотораго сожалѣнія склонились члены Общества къ этому рѣшенію. Во всякомъ случаѣ, мы бы не желали, чтобы оно явилось прецедентомъ противъ устройства съѣздовъ въ провинціальныхъ центрахъ. Но мы питаемъ надежду, что устроители I-го Съѣзда такъ же горячо отнесутся къ вопросу объ организаціи III-го Съѣзда, какъ они отнеслись къ организаціи I-го Съѣзда, и такимъ образомъ рѣшеніе харьковцевъ лишь окажетъ содѣйствіе успѣху и развитію дѣла, такъ хорошо начатаго I-ымъ Петербургскимъ и такъ хорошо продолженнаго II-ымъ Московскимъ Съѣздомъ.

Я сожалѣю, что мой очеркъ далеко не полонъ. Я не останавливался ни на обсужденіи резолюцій Съѣзда ни на выставкѣ учебныхъ пособій и руководствъ, организованной при Съѣздѣ трудами А. А. Волкова и его помощниковъ и помощницъ. Но мой очеркъ и безъ того растянулся и вышелъ изъ рамокъ обычнаго отчета, а потому я кладу перо.

ПИСЬМО ВЪ РЕДАКЦІЮ.

Орловскій Физико-Математическій кружокъ считаетъ крайне неудобнымъ одновременный созывъ съѣздовъ преподавателей физики и математики, такъ какъ многіе преподаватели эти два предмета совмѣщаютъ и для таковыхъ, конечно, важны оба съѣзда. Поэтому Орловскій Физико-Математическій кружокъ въ годичномъ общемъ собраніи 28 января с. г. постановилъ обратиться при посредствѣ спеціальныхъ журналовъ къ Организаціоннымъ Комитетамъ бывшихъ I-го Съѣзда физиковъ и II-го Съѣзда математиковъ съ просьбой созвать слѣдующіе съѣзды въ разное время, чтобы преподаватели физики и математики имѣли возможность принять участіе въ таковыхъ.

Орловскій Физико-Математическій кружокъ обращается съ просьбой ко всѣмъ Кружкамъ и Обществамъ физиковъ и математиковъ высказаться по этому вопросу.

Секретарь *П. Острогорскій.*

Международная Комиссія по преподаванію математики.

Съѣздъ Комиссіи въ Парижѣ.

18 марта (1 апрѣля новаго стиля) въ Парижѣ состоится Съѣздъ Международной Комиссіи, главная цѣль котораго заключается въ обсужденіи слѣдую-

щихъ двухъ вопросовъ: А) результаты, полученные отъ введенія началъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія въ высшіе классы среднихъ учебныхъ заведеній, и В) о мѣстѣ и роли математики въ высшемъ техническомъ образованіи. Засѣданія продлятся 4 дня, изъ которыхъ первый будетъ посвященъ, главнымъ образомъ, текущимъ дѣламъ Комиссіи, а остальные — докладамъ по указаннымъ вопросамъ Клейна, Бореля, Д'Окана (D'Ocagne) и другихъ лицъ и обсужденію этихъ вопросовъ. Съѣздъ закончится пріемомъ у принца Бонапарта. По обоимъ основнымъ вопросамъ были произведены анкеты, результаты которыхъ будутъ доложены профессоромъ Беке (Beke, Budapest) и Штекелемъ (Stäckel, Heidelberg).

Представителемъ Русской Національной подкомиссіи на Съѣздѣ будетъ профессоръ К. А. Поссе.

Вслѣдъ за окончаніемъ Съѣзда по инціативѣ Французскаго Философскаго общества въ Сорбонѣ будутъ устроены засѣданія, посвященныя вопросамъ философіи математики. Они также продлятся 3 дня.

Доклады и пренія по нимъ будутъ помѣщены въ особомъ номерѣ „Revue de Metaphysique et de Morale".

Наконецъ, вслѣдъ за этими засѣданіями въ теченіе 3-хъ дней будутъ происходить лекціи французскихъ и иностранныхъ ученыхъ, приглашаемыхъ Французскимъ Физическимъ обществомъ. Эти лекціи будутъ посвящены вопросамъ дня. Къ тому же времени будетъ устроена и выставка приборовъ.

БИБЛІОГРАФІЯ.

III. Новости иностранной литературы.

С. Гюнтеръ. *Сравнительная геологія и селенологія* (S. Günther — „Vergleichende Mond-und Erdkunde", Braunschweig, 1912).

Въ этой книгѣ, составленной весьма тщательно и со стремленіемъ къ полнотѣ, д-ръ Гюнтеръ даетъ обзоръ различныхъ мнѣній по глубоко интереснымъ вопросамъ о множественности и обитаемости „міровъ, помимо нашего"; мы находимъ здѣсь большое число выдержекъ, заимствованныхъ у множества авторовъ всѣхъ эпохъ — какъ людей науки, такъ и представителей другихъ сферъ. Гюнтеръ излагаетъ идеи древнихъ греческихъ философовъ о сходствѣ или различіи между небесными тѣлами и землей, затѣмъ болѣе близкія къ намъ идеи Ник. Кузанскаго, Бруно, Кирхера (Kircher), Вилькинса (Wilkins), Гюйгенса, Канта, Сведенборга, далѣе Фламмаріона и Проктора (Proctor), космогоніи Лукреція, Лапласа, Локіера (Lockyer), Дарвина, Арреніуса (Arrhenius) и др. Любопытную идею грековъ, будто нашъ спутникъ есть своего рода зеркало, въ которомъ мы видимъ отраженіе чертъ нашей собственной планеты, Гумбольдтъ (Humboldt) встрѣтилъ и у современныхъ персовъ. Когда онъ разъ показалъ одному ученому персу въ Испагани луну въ телескопѣ, тотъ замѣтилъ: „то, что мы видимъ на лунѣ, это — мы сами, это — карта нашей земли". Галилей, универсальный геній котораго освѣтилъ всѣ отрасли науки, подвинулъ также изученіе луны; примѣнивъ только-что передъ тѣмъ открытый телескопъ, черезъ который, по словамъ Мильтона, „тосканскій маэстро видитъ рѣки и горы въ своемъ (рѣчь идетъ о лунѣ) испещренномъ шарѣ", Галилей впервые открылъ нѣкоторыя изъ огромнаго множества деталей, извѣстныхъ современному селенологу. Благодаря этому мы въ настоящее время знаемъ о видимомъ полушаріи луны больше, даже чѣмъ о многихъ частяхъ нашей собственной земли. Авторъ разсказываетъ далѣе о постепенныхъ успѣхахъ селенографіи въ теченіе XVII и XVIII вѣковъ. Яркія и темныя пятна, которыя явственно различаются невооруженнымъ глазомъ и въ народѣ называются „лицомъ луны" или „человѣкомъ въ лунѣ", телескопъ разрѣшилъ въ множество деталей, которыя дѣлаютъ луну самой прекрасной между всѣми небесными тѣлами. На ней мы видимъ великія равнины, которыя Галилей назвалъ морями (maria), и нѣсколько меньшихъ — такъ называемыя болота (paludes), цѣпи кольцеобразныхъ горъ, которыя имѣютъ сходство съ нѣкоторыми земными вулканами и которымъ многіе приписываютъ такое именно происхожденіе. Далѣе, на лунѣ мы различаемъ еще глубокія долины, узкія и извилистыя, которыя принимаются за рѣки, и, наконецъ, „лучи" свѣтлой окраски, которыя тянутся отъ большихъ кратеровъ, иногда на нѣсколько сотъ миль. Наиболѣе извѣстны и замѣчательны лучи, которые исходятъ отъ кратера Тихо, недалеко отъ южнаго полюса луны, и во время полнолунія представляютъ собою самое поразительное явленіе на лунной поверхности. Главныя черты луны въ настоящее время носятъ, большей частью, имена философовъ и астрономовъ; но равнины, или „моря", неизмѣнно сохраняютъ романическія названія, какъ „mare imbrium" (море дождей) „mare serenitatis" (море тишины), которыя дали имъ первые наблюдатели, между тѣмъ какъ имена князей и т. п. давно исчезли. Гюнтеръ даетъ въ своей книгѣ репродукціи картъ, вычерченныхъ Кеплеромъ, Галилеемъ и Шейнеромъ (Sheiner). Послѣднія фотографіи луны, изготовленныя Леви (Loewy) и Пюизё (Puiseux) въ Парижѣ, и „Атласъ" Ликской обсерваторіи (Америка) выдерживаютъ сравненіе съ лучшими работами наблюдателей, пользующихся оптическимъ методомъ, и, конечно, свободны отъ неточностей и другихъ недостатковъ, присущихъ даже лучшихъ работамъ этого послѣдняго рода.

Взявъ въ качествѣ исходной точки центральнаго меридіана положеніе кратера Мёстингъ (Moesting) А, которое въ наши дни обыкновенно считаютъ „неподвижной точкой" или началомъ долготъ, авторъ даетъ карту Майнка (Mainka) и Франца (Franz), показывающую общій контуръ лунной поверхности.

Что касается температуры поверхности луны, то авторъ полагаетъ, что въ теченіе луннаго „дня" она достигаетъ, вѣроятно, точки кипѣнія воды, т.-е. 100° Ц., тогда какъ ночью она можетъ падать до — 150° и даже до — 200°.

„Вулканологія" луны разсматривается авторомъ въ длинной и интересной главѣ. Авторъ, повидимому, на сторонѣ ходячихъ гипотезъ и удѣляетъ мало вниманія противному взгляду, согласно которому главныя черты луны произошли отъ удара и отъ паденія на нее огромныхъ метеоритныхъ массъ въ теченіе первоначальныхъ эпохъ ея жизни. Эту гипотезу раздѣляли еще Гумбольдтъ (Humboldt) и Джильбертъ (Gilbert); въ новѣйшее время она возродилась и развилась въ цѣльную теорію благодаря работамъ профессора Си (See), который изложилъ ее въ своемъ монументальномъ трудѣ о „Теоріи захвата". Гюнтеръ излагаетъ еще вкратцѣ полемику относительно новѣйшихъ измѣненій, произошедшихъ на поверхности нашего спутника. О незначительныхъ измѣненіяхъ его вида говорили время отъ времени наблюдатели, заслуживающіе довѣрія; но съ наибольшей достовѣрностью, повидимому, засвидѣтельствовано измѣненіе въ кратерѣ Линнея. Этотъ кратеръ былъ описанъ Беромъ (Beer) и Медлеромъ (Mädler), которые о изобразили его на своей картѣ, относящейся къ началу XIX вѣка, но въ 1866 г. Шмидтъ (Schmidt) въ Аѳинахъ констатировалъ его исчезновеніе. Позже онъ появился вновь, но въ гораздо менѣе явственномъ видѣ, чѣмъ по изображенію Бера и Медлера. Барнардъ (Barnard), Вирцъ (Wirtz) и Фотъ (Fauth) занимались этимъ вопросомъ, но не пришли къ окончательному рѣшенію. Принцъ (Prinz) говоритъ дословно: „Лунный кратеръ Линней никогда не подвергался измѣненію" (Himmel une Erde, 15, стр. 221). Мы можемъ въ общемъ заключить, что не бываетъ другихъ измѣненій, кромѣ тѣхъ, которыя обусловливаются колебаніями въ условіяхъ земной атмосферы, освѣщенія, мощности телескопа и искусства наблюдателя, и что луна представляетъ собой неизмѣняющійся міръ, мертвый міръ. — Въ заключеніе Гюнтеръ высказываетъ надежду, что ему удалось показать, что наблюдаемое на лунѣ, большей частью, можетъ быть объяснено съ помощью вулканическихъ и тектоническихъ аналогій на землѣ, принимая, конечно, въ расчетъ отличія земли отъ нашего „сосѣдняго свѣтила“. Это не мѣшаетъ автору признавать, что для полнаго объясненія остается сдѣлать еще многое. Къ книгѣ приложенъ указатель именъ цитированныхъ авторовъ. Этотъ весьма полезный указатель значительно увеличиваетъ цѣнность книги. То же самое можно сказать о діаграммахъ, таблицахъ и картахъ, представляющихъ видимое полушаріе луны и нѣкоторыхъ его частей. Будущее покажетъ, насколько основательна высказываемая авторомъ надежда, что лунныя явленія можно объяснить съ помощью земныхъ аналогій, и не окажется ли болѣе успѣшнымъ совершенно другой методъ объясненія. Но такъ или иначе, книга имѣетъ несомнѣнную цѣнность, представляя собою очень важную и весьма интересную монографію по селенологіи, ничѣмъ не уступающую другимъ цѣннымъ монографіямъ той же серіи.

(Заимствовано изъ журнала „Scientia“). *Ф. В. Генкель.*

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

А. Чистовъ. *Опытъ постановки практическихъ занятій по физикѣ въ высшемъ начальномъ училищѣ.* Изд. Я. Башмакова. С.-Петербургъ, 1914. Стр. 68. Ц. 35 к.

Филипсъ и Фишеръ. *Элементы геометріи.* Изданіе т-ва «Просвѣщеніе». С.-Петербургъ, 1913. Стр. 518. Ц. 2 р.

Ф. Н. Индриксонъ. *Начальныя работы по физикѣ.* IV. Ученіе о магнетизмѣ и электричествѣ. Изд. т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1914. Стр. 95. Ц. 30 к.

І. Мундтъ. *Новый путь.* Ариѳметическій задачникъ для начальныхъ школъ. Москва, 1914. Стр. 80. Ц. 20 к.

Его же. *Новый путь.* Руководство для преподавателей къ пользованію задачникомъ «Новый путь». Москва, 1914. Стр. 80. Ц. 50 к.

Парадоксы природы по доктору **В. Гампсону**. Переводъ К. Гюке и Л. Энгельгардта. Москва, 1914. Стр. 206 + V.

А. І. Бечанскій. *Ученіе о силахъ и о движеніи* (механическій отдѣлъ физики). Изд. т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1914. Стр. 240. Ц. 1 р.

А. Казаровъ, инспекторъ Ейскаго реальнаго училища. *Сборникъ задачъ по аналитической геометріи на плоскости.* Изд. 3-ье. Ейскъ, 1913. Стр. 82. Ц. 50 к.

В. Молчановъ, преподаватель реальнаго училища. *Нѣтъ въ ариѳметикѣ тройныхъ правилъ! Долой способъ приведенія къ единицѣ.* Челябинскъ, 1913. Стр. 16. Ц. 10 к.

А. И. Ивановъ, О. І. Кучевскій, А. И. Николаевъ, И. А. Чемостинъ, И. Ф. Яговдъ. *Постановка классныхъ опытовъ по физикѣ.* Часть I. Рига, 1914. Стр. 107. Цѣна 1 р.

С. П. Виноградовъ. *Повторительный курсъ алгебры.* Изд. т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1914. Стр. 293. Ц. 1 р. 50 к.

Dr. **Georg W. Berndt** и Dipl.-Ing. **Carl Boldt**. *Практическія работы по физикѣ.* С.-Петербургъ, 1913. Стр. 661. Ц. 3 р.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 162 (6 сер.). Найти сумму n членовъ ряда

$$1\,.\,1^2+3\,.\,2^2+5\,.\,3^2+\cdots+(2m-1)\,m^2+\cdots$$

Л. Закутинскій (Черкассы).

№ 163 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sin x-\frac{5\cos^4 x-20\cos^2 x+16}{\cos^4 x-12\cos^2 x+16}=0.$$

В. Тюнинъ (Самара).

№ 164 (6 сер.). Доказать тожество

$$4\left(\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\right)=\frac{abc}{lmn},$$

гдѣ l, m, n — разстояніе центра круга, описаннаго около нѣкотораго треугольника, соотвѣтственно отъ его сторонъ a, b, c.

(Заимств.).

№ 165 (6 сер.). Даны двѣ пересѣкающіяся окружности и точка. Черезъ эту точку провести окружность, пересѣкающую данныя окружности подъ данными двумя углами.

И. Александровъ (Москва).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 104 (6 сер.). *Построить треугольникъ, зная положенія центра* O *круга описаннаго и основаній* D *и* E *высоты* AD *и биссектрисы* AE, *проведенныхъ изъ общей вершины* A.

Допустимъ сперва, для большей опредѣленности, что никакія двѣ изъ точекъ O, D и E не совпадаютъ. Предположимъ, что задача рѣшена. Продолжимъ биссектрису AE до встрѣчи съ описанной окружностью въ точкѣ F и соединимъ прямыми центръ O съ точками A и F. Затѣмъ опустимъ изъ точки E перпендикуляръ EK на прямую OA. Такъ какъ $\angle BAF = \angle CAF$, то дуга BFC дѣлится въ точкѣ F пополамъ, а потому радіусъ OF перпендикуляренъ къ хордѣ BC; значитъ, прямыя OF и AD параллельны, откуда слѣдуетъ, что $\angle OFA = \angle DAE$. Но $OA = OF$, а потому $\angle OFA = \angle OAE$; слѣдовательно, $\angle OAE = \angle DAE$. Итакъ, прямоугольные треугольники AKE и ADE, имѣя общую гипотенузу AE, имѣютъ также равные острые углы при вершинѣ A; поэтому они равны, откуда слѣдуетъ, что $KE = ED$. Теперь ясно, что въ прямоугольномъ треугольникѣ OKE извѣстны величина и положеніе гипотенузы OE, а также длина катета KE, равная извѣстному отрѣзку ED. Отсюда вытекаетъ слѣдующее построеніе. На отрѣзкѣ OE, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность и на ней изъ точки E, какъ изъ центра, радіусомъ ED дѣлаемъ засѣчку K. Продолживъ катетъ KO (или же, если точки K и O совпадаютъ, перпендикуляръ къ KE въ точкѣ K) до встрѣчи съ перпендикуляромъ, возставленнымъ изъ точки D къ прямой ED, въ нѣкоторой точкѣ A, описываемъ окружность радіусомъ OA. Пусть B и C — точки встрѣчи этой окружности съ прямой DE; тогда ABC есть искомый треугольникъ. Доказательство построенія вытекаетъ изъ равенствъ $\angle OAF = \angle FAD = \angle OFA$, гдѣ F — точка встрѣчи прямой AE и проведеннаго изъ O перпендикуляра къ ED; значитъ, F есть такая точка окружности, описанной изъ O радіусомъ OA, въ которой дуга BFC дѣлится пополамъ, а потому AE есть биссектриса треугольника ABC. Для возможности задачи необходимо существованіе засѣчки K, для чего необходимо и достаточно соблюденіе условія $ED \leqq OE$. Если $ED < OE$, то существуютъ двѣ засѣчки K, и каждой изъ нихъ вообще отвѣчаетъ нѣкоторое рѣшеніе задачи; однако, одно изъ рѣшеній даетъ треугольникъ съ безконечно удаленными вершинами, если одна изъ соотвѣтствующихъ засѣчекъ K лежитъ на ED: въ этомъ случаѣ OK не встрѣчаетъ перпендикуляра изъ D къ DE. Итакъ, если $ED < OE$, то задача имѣетъ два рѣшенія, если обѣ засѣчки K лежатъ внѣ прямой ED, и одно, если одна изъ нихъ лежитъ на ED. Если $ED = OE$, то задача имѣетъ одно рѣшеніе, если O лежитъ внѣ прямой ED, и не имѣетъ рѣшенія, если O лежитъ на ED. Наконецъ, задача невозможна, если $ED > OE$. Если E и D совпадаютъ, но O отлично отъ E, то искомый треугольникъ равнобедренный, при чемъ задача становится неопредѣленной. Для построенія искомаго треугольника надо изъ E возставить перпендикуляръ EX къ OE и описать изъ O окружность любымъ радіусомъ, большимъ OE; пересѣченія ея съ OE въ A и съ EX въ B и C даютъ искомый треугольникъ ABC. Наконецъ, если O совпадаетъ съ E или съ D, то задача возможна лишь тогда, если всѣ три точки O, E и D совпадаютъ. Въ этомъ случаѣ искомый треугольникъ есть равнобедренный прямоугольный. Для построенія его достаточно провести черезъ O произвольную прямую, отложить на ней по обѣ стороны отъ O произвольные равные отрѣзки $BO = OC$ и возставить къ ней изъ O перпендикуляръ OA, равный BO; тогда треугольникъ ABC есть искомый.

В. Кованько (ст. Струнино); *В. Павловъ* (с. Ворсма); *Н. С.* (Одесса).

№ 124 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\operatorname{tg} x - \frac{8\sin^2 x + 3\sin 2x + 1}{8\cos^2 x + 3\sin 2x + 1} = 0.$$

Замѣняя слагаемое 1 въ числителѣ и знаменателѣ дробнаго члена черезъ $\sin^2 x + \cos^2 x$, а множитель $\sin 2x$ черезъ $2\sin x\cos x$, запишемъ данное уравненіе въ видѣ: $\operatorname{tg} x - \dfrac{9\sin^2 x + 6\sin x\cos x + \cos^2 x}{9\cos^2 x + 6\sin x\cos x + \sin^2 x} = 0$, или

$$\operatorname{tg} x - \frac{(3\sin x + \cos x)^2}{(3\cos x + \sin x)^2} = 0, \text{ т. е. } \operatorname{tg} x - \left(\frac{\dfrac{3\sin x}{\cos x} + 1}{3 + \dfrac{\sin x}{\cos x}}\right)^2 = 0, \quad \operatorname{tg} x - \left(\frac{3\operatorname{tg} x + 1}{3 + \operatorname{tg} x}\right)^2 = 0.$$

Освобождая последнее уравненіе отъ знаменателя и приводя подобные члены, получимъ: $\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 1 = 0$, или $(\operatorname{tg} x - 1)^3 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 1$, а $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, гдѣ k — любое цѣлое число.

М. Х. (Тифлисъ); *N.* (Тифлисъ); *Флавіанъ Д.* (Петербургъ); *Н. Мѣдяковъ*; *А. Бутомо* (Богодуховъ); *А. Сердобинскій* (Чита); *N.*; *Л. Крееръ* (Гомель); *А. Гудима* (Казань).

№ 125 (6 сер.). *Опредѣляя функцію* $f(x)$ *равенствомъ* $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, *гдѣ* a, b, c, d — *постоянные коэффиціенты, выбрать послѣдніе такъ, чтобы функція* $f(x)$ *тожественно удовлетворяла равенству* $f[f(x)] = x$.

Предположимъ, что задача рѣшена. Полагая $f(x) = y$, имѣемъ по условію $f(y) = x$. Такимъ образомъ, при любомъ x мы должны имѣть равенства:

$$(1) \quad \frac{ax + b}{cx + d} = y, \qquad (2) \quad \frac{ay + b}{cy + d} = x.$$

Освобождая эти равенства отъ знаменателя, имѣемъ:

$$ax + b = cxy + dy, \quad ay + b = cxy + dx.$$

Вычитая эти равенства почленно, получимъ: $d(x - y) = -a(x - y)$, откуда, если при нѣкоторомъ значеніи x значеніе y отлично отъ x, т. е. если функція $f(x)$ не обращается тожественно въ x, приходимъ къ равенству (3) $d = -a$. Если же имѣемъ тожество $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = x$, то, освобождая его отъ знаменателя, получимъ: $ax + b = cx^2 + dx$ при любомъ x, что возможно лишь при $c = 0$, $b = 0$, $d = a \neq 0$ (такъ какъ при $c = b = 0$, $a = d = 0$ функція $f(x)$ теряетъ смыслъ). Итакъ, въ разсматриваемомъ исключительномъ случаѣ (4) $f(x) = \frac{ax}{a} = x$. Наоборотъ, если функція $y = f(x)$ опредѣлена равенствомъ (1) при $d = -a$ [см. (3)], т. е. если $f(x) = \frac{ax + b}{cx - a} = y$, то, опредѣляя x черезъ y изъ равенства $y = \frac{ax + b}{cx - a}$, приходимъ къ равенству (2), а потому изъ равенства $f(x) = \frac{ax + b}{cx - a}$ слѣдуетъ, что $f[f(x)] = x$. Точно такъ же и изъ тожества [см. (4)] $f(x) = x$ имѣемъ, что $f[f(x)] = x$. Итакъ, всѣ рѣшенія предложенной задачи выражаются равенствами $f(x) = \frac{ax + b}{cx - a}$ и $f(x) = x$.

Примѣчаніе. Равенство (1) есть общее выраженіе дробно-линейной или проективной зависимости; въ предложенной задачѣ требуется найти условія, при которыхъ проективная зависимость приводится къ инволюціи, т. е. къ такому проективному соотвѣтствію, при которомъ элементу x отвѣчаетъ такой элементъ y, которому въ силу того же соотвѣтствія отвѣчаетъ элементъ x.

И. Зюзинъ (с. Татьянино); *N.*; *Флавіанъ Д.* (Петербургъ); *А. Сердобинскій* (Чита); *Л. Крееръ* (Гомель); *А. Бутомо* (Богодуховъ); *N. N.*; *А. Гудима* (Казань).

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія „Техникъ" — Одесса, Екатерининская, 58.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, въ 24 и 32 стр. каждый, подъ редакціей прив.-доц. В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Изъ записной книжки преподавателя. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Библіографія: I. Рецензіи. II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ. III. Новости иностранной литературы. Темы для сотрудниковъ. Задачи на премію. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр.—для гимн. мужск. и женск., реальн. уч., прогимн., городск. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Военно-Учебн. Зав.—для военно-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ—для дух. семинарій и училищъ.

Въ 1913 г. журналъ былъ признанъ Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. заслуживающимъ вниманія при пополненіи библіотекъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку.

Важнѣйшія статьи помѣщенныя въ 1913 году.

49-й и 50-й семестры.

Прив.-доц. С. О. Шатуновскій. О связи между ариѳметич. и алгебраич. дѣленіемъ. *Проф. Б. Ванахъ.* Международн. конференція времени. *Проф. Г. Л. Каллендаръ.* О природѣ тепла. *Прив.-доц. В. Каганъ.* О реакціяхъ связей. *Прив.-доц. С. О. Шатуновскій.* Замѣтка о непрерывныхъ дробяхъ. *Прив.-доц. В. Каганъ.* О нахожденіи раціональныхъ корней алгебраич. уравненія. *Проф. Зюрингъ.* Значеніе и цѣль изслѣдованія облаковъ. *Г. Лѣви.* Интерференція рёнтгеновскихъ лучей и видимыя кристаллографическія пространственныя рѣшетки. *Н. Ниносъ.* Этюды по элементарной алгебрѣ. *Проф. А. Н. Уайтегидъ.* Основы математики и элементарное образованіе. *Г. фонъ-Дехендъ.* Каналовые лучи и ихъ значеніе для изслѣдованія строенія вещества. *В. Аренсъ.* I. Л. Лагранжъ. *Прив. доц. Е. Ельчаниновъ.* Аллотропія химическихъ элементовъ. *М. Якобсонъ.* Интерференція рёнтгеновскихъ лучей. *Прив.-доц. В. В. Бобынинъ.* Вторая стадія развитія счисленія дробей. *М. Смолуховскій.* Число и величина молекулъ и атомовъ. *Н. Г. Плеханова.* Англійская ассоціація преподавателей математики. *М. Ла-Роза.* Эфиръ. *К. Лезанъ.* Что такое векторъ? *Проф. Р. Вудъ.* Новѣйшіе опыты съ невидимымъ свѣтомъ. *Г. Дресслеръ.* Учебныя пособія по математикѣ. *Проф. Д. Синцовъ.* XIII-ый Съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Тифлисѣ. *Проф. В. Бьеркнесъ.* Метеорологія, какъ точная наука. *Д-ръ Э. Ленкъ.* Введеніе въ коллоидную химію. *Н. Извольскій.* Цѣль обученія ариѳметикѣ. *М. Рудзкій.* Возрастъ земли. *М. Фихтенгольцъ.* Альфа-лучи и опредѣленіе элементарнаго заряда электричества. *Прив.-доц. В. Каганъ.* Къ предстоящему II-му Всероссійскому Съѣзду преподавателей математики. *Прив.-доц. Ю. Рабиновичъ.* О періодическихъ непрерывныхъ дробяхъ. *Т. В. Рихардсъ.* Основныя свойства элементовъ. *Прив.-доц. В. Каганъ.* Ариѳметическое и алгебраическое дѣленіе. *Проф. Эйнштейнъ.* Къ проблемѣ тяготѣнія. *Проф. В. П. Ермаковъ.* Уравненія движенія планеты около солнца. *Проф. О. Д. Хвольсонъ.* Horror absoluti (Источникъ принципа относительности). *Проф. Н. Умовъ.* Возможный смыслъ теоріи квантъ. *Прив.-доц. И. Ю. Тимченко.* Демокритъ и Архимедъ. *Проф. Д. Синцовъ.* О конкурсныхъ экзаменахъ (Къ 25-лѣтію ихъ существованія). *Проф. В. А. Циммерманъ.* О перемѣстительномъ свойствѣ произведенія нѣсколькихъ сомножителей. *Проф. А. Л. Корольковъ.* Графическій пріемъ при изученіи системы линзъ. *В. А. Гернетъ.* Капиллярный анализъ. *Прив.-доц. Е. Л. Буницкій.* Къ теоріи maximum'а и minimum'а функціи одного перемѣннаго. *Прив.-доц. Ю. Г. Рабиновичъ.* О наибольшихъ величинахъ въ геометріи.

УСЛОВІЯ ПОДПИСКИ: Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Тарифъ для объявленій: за страницу **30 руб.**; при печатаніи не менѣе 3 разъ —**10%** скидки, 6 разъ—**20%**, 12 разъ—**30%**.

Журналъ за прошлые годы по **2 руб. 50 коп.**, а учащимся и книгопродавцамъ по **2 руб.** за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по **30 к.**, прошлыхъ семестровъ по **25 к.**

Адр. для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.**