Второй серіи IV-го семестра № 11—12.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

№ 647—648.

Роль Лавуазье въ исторіи химіи.

Антоній-Лаврентій Лавуазье (Antoine-Laurent Lavoisier) одна изъ замѣчательнѣйшихъ личностей, встрѣчающихся въ исторіи наукъ. Можетъ быть, именно, поэтому у потомства составились о немъ различныя и противорѣчивыя сужденія. Одни считаютъ Лавуазье основателемъ химіи и, напримѣръ, А. Вюрцъ (A. Wurtz) въ своей „Исторіи“ *) считаетъ химію, начинающейся съ Лавуазье; съ него же находитъ возможнымъ начать изложеніе почтенный историкъ химіи Ладенбургъ (Ladenburg **).

*) Адольфъ Вюрцъ. „Исторія химическихъ доктринъ“, 1868 (въ своемъ „Словарѣ химіи“). Вюрцъ начинаетъ свое изложеніе слѣдующими словами: «Химія — французская наука, основаніе ея было положено безсмертнымъ Лавуазье».

**) A. Ladenburg. „Vorträge über die Entwiclungeschichte der Chemie von Lavoisier bis zur Gegenwart“, 4 изд. Braunschweig, 1907. Ладенбургъ въ своемъ вступленіи говоритъ: «Изложеніе я начинаю съ Лавуазье, такъ какъ наша наука, благодаря этому ученому, получила новую форму; можно утверждать, что и теперь еще мы находимся въ той фазѣ развитія, которая была положена имъ».

Другіе не менѣе авторитетные ученые, среди нихъ Германъ Коппъ (Hermann Kopp*), авторъ классической исторіи химіи и Эрнстъ фонъ Мейеръ (Ernst von Meyer**), авторъ одного изъ наилучшихъ трудовъ по новѣйшей исторіи химіи, считали Лавуазье основателемъ новой химіи, признавая существованіе химіи и до Лавуазье. Такого же мнѣнія о немъ придерживается въ своей монографіи Icilio Guareschi***).

Эти ученые видѣли въ Лавуазье человѣка, который боролся съ прошлымъ химіи и побѣдилъ господствовавшую въ то время теорію флогистонной химіи; ему же почти всецѣло принадлежитъ открытіе кислорода, процесса окисленія при горѣніи, дыханіи и кальцинаціи металловъ; Лавуазье ввелъ въ химію точныя количественныя мѣры и, наконецъ, опираясь на новѣйшія открытія, далъ въ своемъ трудѣ „Ученіе о химіи" (Traité de Chemie, 1789) первую новую таблицу элементовъ и, правда, совмѣстно со своими сотрудниками Гюитонъ де Морво (Guyton de Morveau), Бертолле (Berthollet) и Фуркруа (Fourcroy), работавшими по его указаніямъ, установилъ новую номенклатуру химическихъ элементовъ, которая, благодаря своей простотѣ и точности, положила рѣзкую грань между старой и новой химіей. Позднѣйшіе химики, не считая тѣхъ, которые занимались исключительно изученіемъ старой химіи, плохо понимали или совсѣмъ не понимали трудовъ по старой химіи, привыкнувъ къ новымъ названіямъ; это неясное пониманіе названій принесло ущербъ старой химіи.

Аналогичный фактъ происходитъ нынѣ съ работами, появившимися въ свѣтъ до реформы Канниццаро (Cannizzaro), который положилъ конецъ долгимъ спорамъ относительно понятій объ атомахъ, молекулахъ и эквивалентахъ.

Встрѣчается также немало авторовъ, которые въ восхваленіи Лавуазье доходятъ до крайнихъ предѣловъ. Сюда относятся Гримо (Grimaux****) и М. Бертело (Marcelin Berthelot*****).

---

*) Hermann Kopp „Geschichte der Chemie" Braunschweig, 1844—1847; Beiträge zur Gesch. d. Chemie, 1869—1875; Die Entwickelung der Chemie in der neueren Zeit, München, 1873.

**) Ernst von Meyer. „Geschichte der Chemie", 4 изд. Leipzig, 1914. Въ 3-мъ изданіи (стр. 141) онъ говоритъ: «И вполнѣ справедливо, что связываютъ изслѣдованія Лавуазье, которыя открыли дорогу въ новомъ пути уже существовавшей химіи, съ началомъ того періода, къ которому принадлежитъ нынѣшнее поколѣніе ученыхъ».

***) I. Guareschi, Lavoisier. Sau vita et sue opere. Дополненіе къ „Encicl. di Chimica" томъ XIX (1903). Авторъ начинаетъ свою монографію слѣдующими словами: «Начинающему изучать химію изъ великихъ личностей прежде всего представляется Лавуазье». Это мнѣніе не вполнѣ справедливо. Если упоминать только объ одномъ періодѣ, который называю „пневматическимъ", имя Бойля не менѣе значительно; и можно было еще насчитать нѣсколько великихъ именъ, заслуги которыхъ равносильны заслугамъ Лавуазье: Пристлей (Pristley), Шееле (Scheele), Блэкъ (Black), Кавендишъ (Cavendish) и мн. др.

****) Eduard Grimaux. Lavoisier, Paris 1888.

*****) M. Berthelot Sa révolution chemique, Lavoisier, Paris, 1890.

Не отрицая великихъ заслугъ Лавуазье, о которыхъ рѣчь будетъ ниже, мы должны замѣтить, что приверженцы Лавуазье зашли слишкомъ далеко въ восхваленіи его, что могло вызвать только реакцію, отчасти вполнѣ справедливую. Особенно нашла она себѣ пищу въ прискорбномъ національномъ антагонизмѣ *).

Противники реформы Лавуазье не могли отрицать его химіи, такъ какъ это значило бы отрицать вообще новѣйшую химію, и поэтому прибѣгали къ инымъ средствамъ. При этомъ они нападаютъ на него не только какъ на ученаго, но и какъ на личность.

Прежде всего они отрицали оригинальность трудовъ Лавуазье, обвиняя его въ плагіатѣ, въ томъ, что онъ присваивалъ себѣ чужія открытія, подобно тому какъ въ качествѣ главнаго откупщика умѣлъ присваивать себѣ деньги государства и плательщиковъ податей; что онъ постоянно хвасталъ передъ Академіей Наукъ и своими читателями произведеніями, ему вовсе не принадлежавшими.

Нѣкоторые современные ученые, вообще оказавшіе исторіи химіи большія услуги, не заходя такъ далеко, отрицаютъ почти систематически дѣло Лавуазье, считая, очевидно, что они легче достигнутъ своей цѣли, обходя его молчаніемъ, чѣмъ нападая на него, такъ какъ нападки, уже по своему излишеству, способны вызвать реакцію.

Разсматривая безъ предвзятаго мнѣнія доводы и факты, приводимые представителями обоихъ теченій, можно легко заключить, что тѣ и другіе правы, если бы они пожелали смотрѣть на дѣло спокойнѣе. Такимъ образомъ, мы можемъ сказать, что Лавуазье произвелъ революцію въ химіи, и въ то же время утверждать, что почти всѣ открытія Лавуазье были сдѣланы или намѣчены до него.

Это противорѣчіе разъяснится, если, становясь на экспериментальную точку зрѣнія, мы разсмотримъ внимательно историческій періодъ, къ которому принадлежитъ Лавуазье, и если намъ удастся указать дѣйствительное мѣсто, которое этотъ ученый долженъ занимать и которое не соотвѣтствуетъ обычно ему отводимому **).

Вотъ это-то мы и попытаемся сдѣлать ниже.

* *
*

*) Однимъ изъ первыхъ писателей, воспротивившихся восхваленію Лавуазье, является Я. Волхардъ (Iakob Volhard). Въ статьѣ, озаглавленной „Die Begründung der Chemie durch Lavoisier" и напечатанной въ „Journ. f. prakt. Chem.", N. F., Bd. 2 (1870), Волхардъ настаиваетъ на томъ, что Лавуазье воспользовался для своихъ открытій и теорій чужими работами.

Необходимо отмѣтить, что Оствальдъ (Ostwald) говоритъ неохотно о Лавуазье въ своихъ историческихъ сочиненіяхъ, и поэтому, можетъ быть, не включилъ его въ свой томъ: „Grosse Männer" (Великіе люди). Фундаментальная работа Лавуазье состояла въ томъ, что онъ ниспровергнулъ флогистонную теорію. И (Leitlinien der Chemie, 1 изд., Leipzig, 1906, стр. 21) нужна была, однако, значительная доля интеллектуальной свободы, чтобы при существованіи уже установленнаго взгляда найти возможнымъ совершить подобный переворотъ; и эту славу онъ вполнѣ заслужилъ.

**) Объ отношеніяхъ между Лавуазье и его предшественниками можно найти новыя и важныя изслѣдованія въ трудѣ Юргенсена (Yörgensen) „Die Entdeckung des Sauerstoffes", Stuttgart, 1909, и у М. Спетера (Max Speter) „Lavoisier und seine Vorläufer", Stuttgart, 1910. См. и мою работу „Profilo su Lavoisier", изданную въ Генуѣ A. Formiggini.

Ошибка, которую допускаютъ обыкновенно при оцѣнкѣ Лавуазье, состоитъ въ томъ, что мы разсматриваемъ факты, которые онъ установилъ, идеи и взгляды, которые выразилъ или заимствовалъ случайно у другихъ, какъ новое теченіе, новое направленіе въ наукѣ химіи, какъ бы открывая одинъ изъ тѣхъ большихъ періодовъ, на которые мы, для удобства, подраздѣляемъ историческія повѣствованія.

Въ данномъ случаѣ это не такъ; мы можемъ скорѣе полагать, и это мы ниже покажемъ, что съ именемъ Лавуазье заканчивается опредѣленный циклъ идей.

Для большей ясности, я упомяну сначала о другомъ періодѣ изъ исторіи химіи, который формально можно сравнить съ вышеизложеннымъ, но понять который въ его цѣломъ намъ легче, такъ какъ онъ къ намъ ближе.

Когда вслѣдъ за знаменитой полемикой между Бертоле и Пру (Proust) законъ о постоянствѣ химическихъ отношеній былъ всѣми признанъ, появилась новая атомистическая теорія Дальтона (Dalton). За ней послѣдовали сейчасъ же знаменитые опыты Гэ-Люссака (Gay-Lussak), а въ то же время въ Германіи появилась новая теорія объ эквивалентахъ. Такимъ образомъ вырабатывается почва для новыхъ споровъ и изслѣдованій, которые отражаютъ современную атомистическую гипотезу.

Въ теоретической своей части, химія, подъ сильнымъ вліяніемъ всѣхъ этихъ споровъ, продолжавшихся довольно долго, стала во многихъ мѣстахъ неясной и одно время, казалась, совершенно непонятной и необъяснимой. Эти неясные мѣста были освѣщены Станиславомъ Канниццаро, который разрѣшилъ затрудненія, уничтожилъ противорѣчія и установилъ, по крайней мѣрѣ, на долгое время новую теорію.

Однако, было бы неправильно сказать, что Канниццаро открылъ новый періодъ въ исторіи химіи. Если, выражаясь фигурально, желаютъ сказать, что послѣ Канниццаро, отвергнувшаго старыя проблемы, поле дѣятельности сдѣлалось свободнымъ для разнообразныхъ новыхъ изслѣдованій, то подобное выраженіе могло бы, строго говоря, быть принято. Но, выражаясь точно, мы должны сказать, что Канниццаро достойно заключилъ одинъ періодъ въ исторіи химіи, наиболѣе важная задача котораго состояла въ установленіи атомистической теоріи.

То же самое можно сказать и о Лавуазье, если стать на формальную точку зрѣнія.

Одинъ интенсивный періодъ работъ и идей, который я назвалъ бы „пневматическимъ", содержитъ въ себѣ слѣдующія основныя задачи: изученіе различныхъ газовъ и ихъ дифференціаціи, изслѣдованія вопросовъ прямо сюда относящихся, а именно: вопросы дыханія, горѣнія и кальцинаціи металловъ, отрицаніе старыхъ умовоззрѣній относительно аристотелевскихъ элементовъ и алхимическихъ принциповъ, введеніе новаго экспериментальнаго понятія объ элементѣ, открытіе научной аналитической химіи, основанной на новомъ опредѣленіи элемента; сама же химія изъ качественной мало по малу превратилась въ количественную и пришла въ концѣ концовъ къ такъ называемому „Закону сохраненія вещества".

Если мы исключимъ предшественниковъ, совершенно стоящихъ въ сторонѣ [у Бирингуккіо (Biringuccio) можно найти намеки относительно кальцинаціи свинца и олова, а также и вѣсовомъ испытаніи этого процесса и довольно спорное объясненіе его; у І. Рая (Ieaп Rey) есть интересная статья на эту же тему] мы можемъ съ увѣренностью утверждать, что общее научное начало всѣхъ этихъ вопросовъ восходитъ къ Роберту Бойлю, что споры объ этихъ проблеммахъ продолжались въ теченіе этого долгаго періода, трактуясь и разрѣшаясь различнымъ образомъ пока наконецъ Лавуазье не собралъ ихъ и не далъ имъ окончательное (относительно) рѣшеніе.

И любопытное совпаденіе съ тѣмъ періодомъ, о которомъ мы упоминали выше: какъ въ началѣ того періода дошли вмѣстѣ съ Авогадро (Avogadro) до рѣшенія фундаментальнаго вопроса, такъ и теперь видимъ на примѣрѣ Дж. Майова (John Mayow) (1645—1679), современникѣ гораздо моложе Бойля, но умершемъ раньше послѣдняго, что многіе изъ фундаментальныхъ проблемъ были близки къ разрѣшенію.

Достаточно упомянуть, что Майовъ обнаружилъ существованіе одного газа, который онъ называлъ „Spiritus nitroaërus“, иногда же Spiritus vitalis“ или же „aër vitalis“ (что напоминаетъ буквально „l'air vital de Lavoisier“, отъ него же получившій позже новѣйшее названіе „кислорода“ (oxygène). Газъ этотъ, находящійся въ воздухѣ и въ селитрѣ, Майовъ, вѣроятно, добылъ и опредѣлилъ точнымъ образомъ его важное значеніе для горѣнія, дыханія и кальцинаціи. И можно предполагать, что если бы смерть не унесла такъ рано этого молодого ученого и если бы Бойль, уже тогда пользовавшійся большимъ авторитетомъ и изложившій свою личную теорію относительно этого вопроса, не выказалъ враждебнаго отношенія къ теоріи Майова, эта важная проблема можетъ быть была бы разрѣшена на сто лѣтъ раньше.

Невозможно въ небольшой статьѣ изложить исторію подобнаго періода; однако, подробное изложеніе этого періода было бы очень интересно, такъ какъ могло бы вполнѣ убѣдить читателя въ справедливости моего взгляда.

Достаточно упомянуть здѣсь теорію Сталя (Stahl) которая, пользуется гипотетическимъ элементомъ флогистономъ для объясненія наблюдаемыхъ явленій; она имѣетъ въ эволюціи идей второстепенное значеніе такъ же, какъ и въ изученіи разобранныхъ проблемъ; вмѣсто новаго теченія, она представляетъ собой одно изъ малоудовлетворительныхъ рѣшеній.

Съ исторической точки зрѣнія значеніе этой теоріи было, возможно, преувеличено, изъ-за борьбы, которую велъ противъ нея Лавуазье, и благодаря тому, что паденіе ея совпало съ установленіемъ окончательнаго рѣшенія. Столь же содѣйствовали послѣднему не менѣе достойнымъ образомъ химики — современники Лавуазье, болѣе или менѣе активные послѣдователи теоріи флогистона; назову только Пристлея, Шлее, Блакка, Кавендиша. Во всякомъ случаѣ флогистонная теорія является частичнымъ движеніемъ въ болѣе великомъ и широкомъ движеніи во времени вообще и для своей эпохи въ особенности. Резюмируя, можно сказать, что по внимательномъ обзорѣ роли Лавуазье въ исторіи химіи должно отвергнуть установившееся ходячее мнѣріе о немъ, не умаляя однако, въ чемъ-бы то ни было его заслугъ. Вмѣсто того, чтобы положить начало, онъ завершилъ тотъ однообразный и характерный періодъ, начала котораго восходятъ къ Бойлю.

Лавуазье съ полнымъ правомъ использовалъ, продолжалъ и заимствовалъ работы и мысли предшественниковъ, ибо онъ дѣйствительно находился въ сферѣ этихъ работъ и идей, и именно въ этой области, благодаря наклонности своего ума и условіямъ среды, онъ могъ выказать свою геніальную плодотворность, поистинѣ великую. И поэтому, если не обращать вниманія на тѣ мелочи, которыя несущественны для исторіи науки (какъ, напримѣръ, то, что Лавуазье могъ знать объ открытіи Пристлея или о работахъ Байена) то, повторяемъ, совершенно отпадаетъ обвинение Лавуазье въ присвоеніи чужихъ работъ. Окончаніе его работъ дало возможность появиться и развиться новымъ проблеммамъ, въ установленіи которыхъ Лавуазье, однако, уже никакого участія не принималъ.

Можетъ быть, нѣкоторые будутъ недовольны тѣмъ, что я не называю Лавуазье обособленнымъ геніемъ, создавшимъ изъ ничего большую часть науки, мы все же можемъ, однако, замѣтить, считаясь съ условіями и различными обстоятельствами, что то же самое можно сказать и о другихъ великихъ людяхъ, которыхъ анекдотическая исторія хотѣла слишкомъ возвеличить для того, чтобы она сдѣлалась собраніемъ біографій героевъ. Даже и для Галилея искали и нашли предшественниковъ. Ньютонъ нашелъ цѣлую серію работъ, опубликованныхъ до него и предопредѣлявшихъ его великое твореніе; также Ламаркъ и Дарвинъ не появились изъ ничего; но повторяемъ, Лавуазье выдѣляется изъ среды великихъ людей тѣмъ замѣчательнымъ различіемъ, которое касается не только внутренней цѣнности его творенія, но внѣшняго его характера. Если другіе ученые вызвали новыя теченія, то Лавуазье своимъ поистинѣ великимъ синтезомъ завершилъ цѣлую эпоху трудовъ.

Первая глава изъ элементарной теоріи чиселъ.

А. Обри.

(Переводъ съ французскаго).

(Окончаніе).*

36. Пусть d дѣлитель числа $a.10^b \pm c$. Чтобы узнать дѣлится ли какое-нибудь другое число на d, зачеркиваемъ въ немъ b цыфръ справа и дѣлимъ то, что оста-

*) См. „Вѣстникъ“, № 646.

лось, на a. Частное отъ этого дѣленія умножаемъ затѣмъ на c, а къ остатку приписываемъ справа то, что раньше зачеркнули. Данное число дѣлится на d, если разность (въ томъ случаѣ, когда d дѣлитель числа $a \,.\, 10^b + c$) или сумма (когда d дѣлитель числа $a \,.\, 10^b - c$) полученныхъ двухъ чиселъ дѣлится на d. (E. Gelin). См. Fitz-Patrick, Exercices d'Arithmétique, стр. 24 и слѣд.

Пусть $N = A \,.\, 10^b + B$ и пусть частное отъ дѣленія A на a равна Q, а остатокъ равенъ R. Предложеніе слѣдуетъ изъ тождества:

$$N = Q \,.\, (a \,.\, 10^b \pm c) + R \,.\, 10^b + B \mp Q \,.\, c. \qquad (\alpha)$$

37. 1) Изъ тождествъ

$$(a+1)^n = (a+1)^{n-1}a + (a+1)^{n-1} = (a+1)^{n-2}a^2 + (a+1)^{n-2}a + (a+1)^{n-1} =$$

$$\cdots = a^n + a^{n-1} + (a+1)\,a^{n-2} + \cdots + (a+1)^{n-3}a^2 + (a+1)^{n-2}a + (a+1)^{n-1}$$

слѣдуетъ, что выраженіе $(a+1)^n - a^n$ содержитъ членъ a^{n-1} слагаемымъ ровно n разъ, а затѣмъ еще члены съ a^{n-2}, $a^{n-3}, \ldots$ Слѣдовательно,

$$(a+1)^n - a^n = na^{n-1} + Aa^{n-2} + \cdots + La + 1 \text{ *)}. \qquad (\alpha)$$

2) Пусть намъ дана функція $F(x)$. Функціи:

$$F_1(x) = F(x+1) - F(x),$$

$$F_2(x) = F_1(x+1) - F_1(x),$$

$$F_3(x) = F_2(x+1) - F_2(x),$$

называются первой разностью, второй разностью, третьей разностью,..., функціи F. Положимъ:

$$F(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \cdots + Lx + M.$$

Первая разность $F(x+1) - F(x) = F_1(x)$ содержитъ членъ nAx^{n-1} плюсъ еще члены съ $x^{n-2}, \ldots$ Полагаемъ $F_1(x) = nAx^{n-1} + B'x^{n-2} + \cdots$ Точно такъ же

$$F_2(x) = n(n-1)Ax^{n-2} + B''x^{n-3} + \cdots,$$

$$F_3(x) = n(n-1)(n-2)\,Ax^{n-3} + B'''x^{n-4} + \cdots,$$

и наконецъ,

$$F_n(x) = n(n-1) \ldots 2 \,.\, 1 \,.\, A,$$

т. е. n-ая разность многочлена $Ax^n + \cdots$ равна $A \,.\, n!$

Это предложеніе было извѣстно уже древнимъ, правда, безъ доказательства. Первое доказательство его далъ Mercator.

---

*) См. Enseignement Mathématique, 1907 г., стр. 297.

3) n-ая разность функціи

$$F(x) = x^n$$

равна $n!$ Найдемъ ея первую, вторую, ..., разность. Пользуясь формулой (16), получаемъ:

$$F_1(x) = F(x+1) - F(x) = (x+1)^n - x^n = (x+1)^n - C_{1,1} x^n,$$

$$F_2(x) = F_1(x+1) - F_1(x) =$$
$$= (x+2)^n - 2(x+1)^n + x^n = (x+2)^n - C_{2,1}(x+1)^n + C_{2,2} x^n,$$

$$F_3(x) = F_2(x+1) - F_2(x) = (x+3)^n - C_{3,1}(x+2)^n + C_{3,2}(x+1)^n - C_{3,3} x^n,$$

. . . .

$$F_n(x) = F_{n-1}(x+1) - F_{n-1}(x) = (x+n)^n - C_{n,1}(x+n-1)^n +$$
$$+ C_{n,2}(x+n-2)^n - \cdots \pm C_{n,n} x^n = n!$$

Полагая въ послѣднемъ равенствѣ $x + n = a$, получаемъ тождество Mercator'а:

$$a^n - C_{n,1}(a-1)^n + C_{n,2}(a-2)^n - \cdots \pm C_{n,n}(a-n)^n = \pm n!$$

4) Пусть a и b взаимно простыя числа. Каждый общій дѣлитель чиселъ $a - b$ и $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ дѣлитъ также n (Lebesgue).

Для доказательства достаточно въ формулѣ (α) замѣнить a черезъ $\frac{b}{a-b}$. Lebesgue доказываетъ это предложеніе при помощи формулы бинома.

Это предложеніе встрѣчается также у Malebranche'а, который даетъ и доказательство его, отличное, какъ отъ нашего, такъ и отъ доказательства Lebesgue'а (см. Ch. Henry, Recherches sur les manuscrits de Fermat, стр. 92). Доказательство Malebranche'а, основной мыслью котораго можно воспользоваться и во многихъ другихъ случаяхъ, состоитъ въ слѣдующемъ. Каждый общій дѣлитель чиселъ $a - b$ и $a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \cdots$ дѣлитъ также $a^{n-2}(a-b) = a^{n-1} - ba^{n-2}$. Слѣдовательно, онъ дѣлитъ $-2ba^{n-2} - b^2a^{n-3} - \cdots$. Но онъ дѣлитъ также $2ba^{n-3}(a-b) = 2ba^{n-2} - 2b^2a^{n-3}$. Слѣдовательно, онъ дѣлитъ $-3b^2a^{n-3} - b^3a^{n-4} - \cdots$. Продолжая такимъ образомъ, приходимъ, наконецъ, къ заключенію, что онъ дѣлитъ nb^{n-1}.

38. Числа A_k и B_k въ равенствѣ $(a + \sqrt{b})^k = A_k + B_k\sqrt{b}$ вычисляются послѣдовательно по слѣдующимъ формуламъ Эйлера:

$$A_{n+1} = aA_n + bB_n, \quad B_{n+1} = A_n + aB_n;$$

$$A_{n+1} = 2aA_n - (a^2 - b)A_{n-1}, \quad B_{n+1} = 2aB_n - (a^2 - b)B_{n-1}.$$

Первыя два равенства очевидны. Послѣднія два выводятся изъ первыхъ.

39. Числа вида y^2-3z^2 и $3y^2-z^2$ могутъ быть простыми только въ томъ случаѣ, когда они соотвѣтственно принадлежатъ къ формамъ $\mathbf{12}+1$ и $\mathbf{12}-1$.

Число вида y^2-5z^2 можетъ только тогда быть простымъ, когда оно принадлежитъ къ одной изъ формъ $\mathbf{20}\pm 1$, $\mathbf{20}\pm 9$.

40. Число a^2+1 дѣлитъ безчисленное число другихъ изоморфныхъ чиселъ. Дѣйствительно,

$$(a^2+1)\,[(ax+1)^2+x^2]=(a^2x+x+a)^2+1.$$

Это предложенiе можно нѣсколько обобщить: Число $n=ka^2+lb^2$ дѣлитъ безчисленное число чиселъ, принадлежащихъ къ формѣ x^2+kly^2, а также безчисленное число чиселъ, принадлежащихъ къ формѣ kx^2+ly^2 (Эйлеръ). Дѣйствительно,

$$n\,(k+l)=(ka\pm lb)^2+kl\,(a\mp b)^2,$$

$$n\,(1+kl)=k\,(a\pm lb)^2+l\,(b\mp ka)^2.$$

41. Общiй дѣлитель чиселъ a^2-kb^2, $c^2-ld^2,\ldots$ дѣлитъ также число, принадлежащее къ формѣ $x^2-kl\ldots y^2$.

Дѣйствительно, онъ дѣлитъ число

$$a^2\,(c^2-ld^2)+ld^2\,(a^2-kb^2)=(ac)^2-kl\,.\,(bd)^2. \text{ (Лагранжъ).}$$

42. Положимъ $X=xx'-Qyy'$, $Y=xy'+yx'+Pyy'$. Пусть a и b будутъ корни уравненiя $z^2-Pz+Q=0$. Тогда

$$(x+ay)\,(x'+ay')=X+aY.$$

Съ другой стороны, $(x+ay)\,(x+by)=x^2+Pxy+Qy^2$. Слѣдовательно, произведенiе двухъ чиселъ, принадлежащихъ къ формѣ $x^2+Pxy+Qy^2$, съ ними изоморфно. (Лагранжъ).

43. Замѣнимъ k въ формулѣ (21) черезъ k/l. Затѣмъ въ формулѣ (8) замѣнимъ a, c, b, d соотвѣтственно черезъ $a\sqrt{k}$, $b\sqrt{l}$, α, $\beta\sqrt{kl}$. Получаемъ двѣ формулы, которыми мы обязаны Эйлеру, и которыя, будучи сопоставлены съ формулой (21), показываютъ, что произведенiе цѣлыхъ чиселъ, принадлежащихъ къ формамъ ax^2+by^2 и x^2+aby^2, принадлежитъ къ первой или второй изъ этихъ формъ, смотря по тому, будетъ ли число сомножителей, принадлежащихъ къ первой формѣ, нечетное или четное.

44. 1) Любопытные результаты даютъ нѣкоторыя преобразованiя формулы (9). Полагая въ этой формулѣ $\alpha=a^2+b^2+c^2$, $\beta=a^2+b^2-c^2$, получимъ формулу разложенiя квадрата суммы трехъ квадратовъ на сумму трехъ квадратовъ.

2) Полагая $\alpha = a^2 + 1$, $\beta = a$ получимъ тождество, которымъ пользовался Эйлеръ при изслѣдованіи произведенія

$$(1 + a + a^2)(1 + a^2 + a^4)(1 + a^4 + a^8)\cdots.$$

3) Полагая $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, $\beta = a^2 + b^2 + c^2 - d^2$, получимъ формулу разложенія квадрата суммы четырехъ квадратовъ на сумму четырехъ квадратовъ.

4) Полагая $\alpha = Ax^3 + Cx$, $\beta = Bx^2 + D$ и приравнивая затѣмъ тождественно правую часть формулы (9) выраженію $x^6 - 1$, получаемъ:

$$A = D = 1,\quad 2C - B^2 = 0,\quad C^2 - 2B = 0,\quad B = C = 2.$$

Интересное тождество, въ которое переходитъ при этомъ формула (9), найдено A. Boutin'омъ.

5) Небольшимъ видоизмѣненіемъ равенства (9) является равенство:

$$2f\,.\,2g = (f+g)^2 - (f-g)^2.$$

Полагая въ немъ $f = a^2 - b^2$, $g = c^2 - d^2$, получаемъ тождество вида $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Это тождество найдено B. af Genäs'омъ.

45. Пусть $ax - by = 1$. Тогда $X = y^2(3ax - by)$ и $Y = x^2(3by - ax)$ удовлетворяютъ уравненію $b^2X - a^2Y = 1$ (Буняковскій*)

Для доказательства достаточно въ тождествѣ $(\alpha - \beta)^3 = (3\alpha - \beta)\beta^2 - (3\beta - \alpha)\alpha^2$ замѣнить α и β черезъ a/y и b/x.

46. Пусть $f^3 + ag^3 = bh^3$. Другимъ рѣшеніемъ уравненія $x^3 + ay^3 = z^3$ является тогда

$$x = f(f^3 + 2ag^3),\quad y = -g(2f^3 + ag^3),\quad z = h(f^3 - ag^3).\quad (\text{Эйлеръ}).$$

Для частнаго случая $a = b = 1$ это предложеніе было установлено, раньше Эйлера, Prestet'омъ.

47. При вычисленіи произведенія

$$(f + g\sqrt{-k})^4\,(f - g\sqrt{-k})^4$$

можно сначала перемножить оба двучлена и затѣмъ возвести въ степень произведеніе или же возвести въ степень каждый двучленъ отдѣльно и затѣмъ перемножить степени. Получающееся при сравненіи обоихъ результатовъ тождество A. Boutin'a даетъ намъ рѣшеніе уравненія $x^4 = y^2 + kz^2$.

48. Полагая $k\sqrt{a} + l\sqrt{-b} = (x\sqrt{a} + y\sqrt{-b})^3$ и сравнивая затѣмъ соотвѣтственные коэффиціенты при $\sqrt{a}$ и $\sqrt{-b}$, получаемъ:

$$k = ax^3 - 3bxy^2,\quad l = 3ax^2y - by^3.$$

---

*) Послѣдній получаетъ это предложеніе, равно какъ и нѣкоторыя другія болѣе общаго характера, при помощи формулы интегрированія по частямъ.

Слѣдовательно,

$$ak^2 + bl^2 = (ax^2 + by^2)^3. \quad \text{(Эйлеръ).}$$

49. Поступая съ произведеніемъ $(a + bi)^3 (a - bi)^3$ такъ же, какъ было указано въ упражненіи 47, получаемъ тождество, которое является частнымъ случаемъ тождества предыдущаго упражненія и которое позволяетъ намъ найти кубъ, являющійся одновременно суммой двухъ квадратовъ (Эйлеръ).

50. Мозаика. Интересные, напоминающіе мозаику, рисунки получаются, если взять клѣтчатый листъ бумаги, выбрать на немъ осями координатъ двѣ взаимно перпендикулярныя линіи и затѣмъ окрашивать клѣтку (x, y) въ черный или сѣрый цвѣтъ въ зависимости отъ того, принедлежитъ ли остатокъ отъ дѣленія $a(x^2 + y^2)$ на n къ формѣ $\mathbf{3} - 1$ или къ формѣ $\mathbf{3} + 1$.

51. Треугольники. 1) Одинъ изъ катетовъ прямоугольнаго треугольника $x^2 + y^2 = z^2$ является всегда четнымъ числомъ (Frénicle).

Если бы x и y были оба нечетными числами, то z^2 принадлежало бы къ формѣ $\mathbf{4} + 2$, что невозможно.

Четный катетъ будемъ обозначать черезъ $2fg$.

2) Формула Евклида представляетъ всѣ прямоугольные треугольники. (См. упражненіе 6). Это слѣдствіе изъ 1).

Въ послѣдующемъ мы будемъ обозначать генераторы треугольника черезъ f и g.

3) Одинъ катетъ есть кратное 3, одинъ — кратное 4 (Frenicle).

Если бы ни одинъ катетъ не былъ кратнымъ 3, z^2 принадлежало бы къ формѣ $\mathbf{3} + 2$, что невозможно.

Въ послѣдующемъ мы разсматриваемъ только первообразные треугольники, т. е. такіе, въ которыхъ x, y, и z не имѣютъ общихъ дѣлителей. Пусть x четный катетъ. Тогда y и z нечетны, y^2 и z^2 принадлежатъ къ формѣ $\mathbf{8} + 1$, а $x^2 = z^2 - y^2$ къ формѣ $\mathbf{8}$. Слѣдовательно, x дѣлится на 4.

4) Гипотенуза принадлежитъ къ одной изъ формъ $\mathbf{12} + 1$, 5 (анонимный арабскій ученый).

$z = f^2 + g^2$ есть число нечетное и принадлежитъ поэтому къ формѣ $\mathbf{4} + 1$. Кромѣ того, z не дѣлится на 3.

5) Одна изъ сторонъ есть кратное 5 (Frénicle).

Для доказательства надо разсмотрѣть всѣ возможныя линейныя формы по mod 5, къ которымъ могутъ принадлежать f и g.

6) Сумма и разность обоихъ катетовъ принадлежатъ къ формамъ $\mathbf{8} \pm 1$ (Idem).

Доказывается тѣмъ же путемъ, что и 5).

7) Единственный прямоугольный треугольникъ, стороны котораго составляютъ ариѳметическую про-

грессію, это треугольникъ со сторонами 3, 4, 5. Нѣтъ ни одного прямоугольнаго треугольника, стороны котораго составляли бы геометрическую прогрессію (Ozanam).

Изъ $a^2 + a + d)^2 = (a + 2d)^2$ слѣдуетъ $a = 3d$. Единственный примитивный треугольникъ, удовлетворяющій этому, соотвѣтствуетъ $d = 1$, $a = 3$.

Второе предложеніе слѣдуетъ изъ невозможности равенства $1 + q^2 = q^4$.

8) Пусть генераторы f, g будутъ два послѣдовательныхъ треугольныхъ числа. Тогда сторона $f^2 - g^2$ точный кубъ (Idem).

9) Пусть $f = g + 1$. Тогда гипотенуза больше четнаго катета на 1 (Idem).

10) Пусть разность между обоими катетами равна 1. Въ треугольникѣ, имѣющемъ генераторами числа $(2f + g)$ и f, разность между катетами также равна 1 (Ферма).

11) Если мы выберемъ генераторами два послѣдовательныхъ члена изъ ряда 1, 2, 5, 12, 29 70,... то получимъ треугольникъ, разность между катетами котораго равна 1 (Ozanam). Это слѣдуетъ непосредственно изъ предыдущей теоремы Ферма*).

12) Найти прямоугольный треугольникъ, имѣющій раціональную биссектрису (Діофантъ). Биссектриса угла, лежащаго противъ катета $2fg$, равна $f^2 - g^2 \sqrt{f^2 - g^2}$. Чтобы сдѣлать $\sqrt{f^2 + g^2}$ раціональнымъ, полагаемъ $f = k(\varphi^2 - \gamma^2)$, $g = k \,.\, (2\varphi\gamma)$.

13) Найти прямоугольный треугольникъ, периметръ котораго равенъ точному квадрату (Idem). Надо сдѣлать точнымъ квадратомъ число $2f(f + g)$. Полагаемъ $f = 2u^2$, $g = v^2 - 2u^2$.

14) Найти треугольникъ, сумма катетовъ котораго равна точному квадрату. (Teilhet).

Надо сдѣлать точнымъ квадратомъ число $f^2 + 2fg - g^2$. Полагаемъ

$$f = u^2 - 2uv + v^2, \quad g = 2uv.$$

15) Найти три точныхъ квадрата, образующихъ ариѳметическую прогрессію. (Fibonacci).

---

*) Вообще, если первыми двумя членами образованнаго по тому же правилу ряда выбрать числа 1, a, то разность между катетами будетъ равна $a^2 - 2a - 1$. Указанный рядъ можно продолжить и налѣво. Получаемъ тогда, напримѣръ, для $a = 4$, слѣдующій рядъ: ... — 19, 8, — 3, 2, 1, 4, 9, 22,... Такимъ, вѣроятно, путемъ получилъ Ozanam свою таблицу треугольниковъ, въ которыхъ разность между катетами равна 7. Какъ видимъ, это по существу способъ рекуррентныхъ рядовъ.

Положимъ первый членъ прогрессіи равнымъ $(a-b)^2$, третій равнымъ $(a+b)^2$. Изъ

$$(a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)$$

слѣдуетъ, что второй членъ прогрессіи равенъ тогда a^2+b^2. Полагая $a=f^2-g^2$, $b=2fg$, получимъ:

$$(f^2-g^2-2fg)^2+(f^2-g^2+2fg)^2=2(f^2+g^2)^2.$$

Этимъ рѣшеніемъ мы, кажется, обязаны арабамъ*).

16) Найти три прямоугольныхъ треугольника, имѣющихъ равныя площади (Діофантъ).

Значенія

$$x=k^2-1,\quad y=2k+1,\quad z=k^2+k+1,$$

удовлетворяющія равенству $x^2+xy+y^2=z^2$, даютъ намъ рѣшеніе Діофанта:

$$2xz\,.\,(z^2-x^2)=2zy\,.\,(z^2-y^2)=2z\,(x+y)\,.\,[(x+y)^2-z^2].$$

17) Найти прямоугольный треугольникъ, гипотенуза котораго, равно какъ и сумма катетовъ были бы точными квадратами (Ферма).

Обозначая катеты черезъ $x=u^2-v^2$, $y=2uv$, положимъ: $u=\lambda^2-\mu^2$, $v=2\lambda\mu^2$. Гипотенуза u^2+v^2 равна тогда точному квадрату. Остается сдѣлать точнымъ квадратомъ выраженіе $x+y=\lambda^4+4\lambda^3\mu-$ $-6\lambda^2\mu^2-4\lambda\mu^3+\mu^4$.

Полагаемъ**) $x+y$ равнымъ квадрату $\lambda^2-2\lambda\mu+\mu^2$ и получаемъ $2\lambda=3\mu$. Но это рѣшеніе приводитъ насъ къ отрицательнымъ значеніямъ для катета x. Полагая, напримѣръ, $\lambda=3$, $\mu=2$, получимъ $x=-119$. Слѣдовательно, это рѣшеніе нужно отбросить.

Полагаемъ тогда $\lambda=\frac{3\mu}{2}+\nu$ и приравниваемъ $x+y$ квадрату $\mu^2+148\mu\nu-4\nu^2$. Это даетъ намъ $\mu=84$, $\nu=1343$, $\lambda=1469$ и, слѣдовательно,

$$x=4565486027761,\quad y=106165229352.$$

Лагранжъ доказалъ, что эти числа являются дѣйствительно, какъ утверждалъ Ферма, наименьшими изъ всѣхъ, удовлетворяющихъ условіямъ задачи.

---

*) Впервые встрѣчается оно у S. Gravesande Math. univ. elem. (Лейденъ, 1727 г.).

**) Этотъ способъ извѣстенъ подъ именемъ способа Ферма и состоитъ въ слѣдующемъ. Пусть $a=\alpha^2$ или $e=\varepsilon^2$. Чтобы рѣшить уравненіе $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4=y^2$, полагаемъ y равнымъ $\alpha+ux+vx^2$ или $u+vx+\varepsilon x^2$ и выбираемъ затѣмъ u и v такъ, чтобы получить уравненіе вида $Ax=B$. Зная одно рѣшеніе, $x=n$, можемъ получить новое рѣшеніе, замѣняя въ уравненіи x черезъ $x'+n$ и рѣшая такимъ же способомъ преобразованное уравненіе, и т. д. Рѣшеніемъ аналогичнаго уравненія $a+bx+cx^2+dx^3=y$ занимался Эйлеръ.

18) Пусть числа (x, y, z) опредѣляютъ прямоугольный треугольникъ. Тогда числа $(2x+y+2z,\ x+2y+2z,\ 2x+2y+3z)$ также опредѣляютъ прямоугольный треугольникъ. Разность между катетами второго треугольника равна разности между катетами перваго.

Это даетъ намъ возможность построить безконечный рядъ треугольниковъ, разность между катетами которыхъ равна одной и той же величинѣ. (Wilkinson).

19) Слѣдующимъ по разработанности вопроса классомъ треугольниковъ являются треугольники, въ которыхъ одинъ уголъ равенъ 60°. Стороны такого треугольника связаны между собой равенствомъ $x^2-xy+y^2=z^2$. Общее выраженіе для сторонъ такого треугольника дается формулами*):

$$x=3f^2-g^2-2fg,\quad y=3f^2-g^2+2fg,\quad z=3f^2+g^2.$$

52. Пусть числа (a, b, c, d) являются рѣшеніемъ уравненія $x^2+y^2+z^2=w^2$ и даютъ намъ, въ цѣлыхъ числахъ, ребра и діагональ прямоугольнаго параллелепипеда. Числа

$$(a+b+d,\quad a+c+d,\quad b+c+d,\quad a+b+c+2d)$$

даютъ намъ тогда другой такой же параллелепипедъ (Monck). Это даетъ намъ возможность построить безконечное число такихъ тѣлъ, исходя изъ параллелепипеда (1, 2, 2, 3**).

53. 1) Обозначимъ, какъ мы это уже дѣлали въ упражненіи 25, черезъ $E\omega$ цѣлую часть не цѣлаго числа ω. Тогда

$$0<\omega-E\omega<1, \qquad (\alpha)$$

$$-1<E\omega-\omega<0, \qquad (\beta)$$

$$E\omega<\omega<1+E\omega \qquad (\gamma)$$

$$E(\omega\pm a)=E\omega\pm a, \qquad (\delta$$

$$E(\omega+\omega')-E(\omega+\omega'')\geqslant E(\omega'-\omega''), \qquad (\varepsilon)$$

$$E(a-\omega)=a-1-E\omega. \qquad (\eta)$$

*) Эти формулы получаются изъ формулъ упражненія 7, если замѣтить, что $(2z)^2=(x+y)^2+3(x-y)^2$.

Любопытные результаты даетъ и изученіе всего класса треугольниковъ. Напримѣръ, рядъ треугольниковъ, въ которомъ стороны каждаго послѣдующаго треугольника равны полусуммамъ взятыхъ попарно сторонъ предшествующаго, имѣетъ предѣломъ равносторонній треугольникъ, периметръ котораго равенъ общему периметру треугольниковъ ряда (Mackay).

**) Нѣкоторые математики занимались также изслѣдованіемъ, по слѣдамъ Эйлера, прямоугольнаго параллелепипеда, въ которомъ цѣлыми числами, кромѣ реберъ, выражаются діагонали граней и основаній, а также трехгранной пирамиды, у которой всѣ три плоскіе угла при вершинѣ прямые, а ребра равны цѣлымъ числамъ. Но эти изслѣдованія не привели ни къ какимъ общимъ результатамъ.

2) Между ω и ω' заключается $(E\omega - E\omega')$ цѣлыхъ чиселъ.

3) Между первыми b цѣлыми числами находится $E\dfrac{b}{a}$ чиселъ, кратныхъ a.

4 Наибольшее число, кратное a и меньшее b, равно $a \,.\, E\dfrac{b}{a}\cdot$ Оно изображается также въ видѣ $b - R\dfrac{b}{a}\cdot$

5) Найти число x, обладающее тѣмъ свойствомъ, что частное q отъ дѣленія a на b не измѣняется, если къ a и къ b прибавить по x.

Этимъ свойствомъ обладаетъ всякое x, заключающееся въ предѣлахъ

$$0 \leqslant (a+x) - q\,(b+x) < b+x.$$

6) Пусть $\omega - E\omega < \dfrac{1}{n}\cdot$ Тогда $E(n\omega) = nE\omega$.

Для доказательства умножаемъ данное неравенство на n, замѣняемъ ω черезъ $n\omega$ въ формулѣ (β) и складываемъ почленно оба полученныхъ неравенства.

7) Доказать, что $0 \leqslant E(n\omega) - nE\omega < n$.

Умножая на n формулу (α) и замѣняя n черезъ $n\omega$ въ формулѣ (β), получаемъ требуемое.

8) Доказать слѣдующія соотношенія:

$$\frac{a}{E\omega} - \frac{a}{\omega} < \frac{a}{(E\omega)^2}; \quad \sqrt{\omega} - \sqrt{E\omega} < \frac{1}{2\sqrt{E\omega}};$$

$$E\omega + \sqrt{\omega - E\omega} - \omega < 1/4; \ aE\omega - E(\omega\omega') - E\,[(a-\omega')\,\omega] = 0 \text{ или } = 1;$$

$$E\sqrt{a\,(a+1)} = E\sqrt{a\,(a+2)} = E\sqrt[3]{a\,(a+1)\,(a+2)} = a;$$

$$E\sqrt{a\,(a+1)(a+2)\,(a+3)} = a\,(a+3);$$

$$E\sqrt[3]{a\,(a+1)\,(a+2)\cdots(a+5)} = a^2 + 5a + 3, \quad \text{(Goulard)}.$$

Первое неравенство слѣдуетъ изъ

$$\frac{1}{E\omega} - \frac{1}{\omega} = \frac{\omega - E\omega}{\omega\,.\,E\omega} < \frac{1}{\omega\,.\,E\omega} < \frac{1}{(E\omega)^2}\cdot$$

Для доказательства второго неравенства положимъ $\omega - E\omega = \alpha$. Тогда по формулѣ Тэйлора,

$$\sqrt{E\omega + \alpha} - \sqrt{E\omega} = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{E\omega + \vartheta\,.\,\alpha}} < \frac{1}{2\sqrt{E\omega}}\cdot \quad (0 < \vartheta < 1,\ 0 < \alpha < 1).$$

Третье неравенство слѣдуетъ изъ того, что $a - a^2$ при $0 < a < 1$ достигаетъ своего максимума при $a = 1/_2$.

Наконецъ, четвертая формула очевидна, а для полученія остальныхъ неравенствъ надо произвести указанныя извлеченія корней изъ многочленовъ. Замѣтимъ еще, что если въ предпослѣднемъ равенствѣ увеличить на 1 подкоренное число, то получимъ подъ корнемъ $(a^2 + 3a + 1)^2$.

9) Доказать равенства $E\dfrac{E\frac{a}{b}}{c} = E\dfrac{E\frac{a}{c}}{b} = E\dfrac{a}{bc}$.

Полагаемъ $\omega = \dfrac{a}{b}$ въ формулѣ (α) и дѣлимъ эту формулу на c, затѣмъ полагаемъ $\omega = \dfrac{a}{bc}$ въ формулѣ (β) и складываемъ обѣ формулы почленно.

10) Изъ 7), если положить тамъ $n = 2$, $\omega = \dfrac{a}{b}$, слѣдуетъ, что выраженіе $\left(E\dfrac{2a}{b} - 2E\dfrac{a}{b}\right)$ равно 0 или 1, смотря по тому, четное ли число $E\dfrac{2a}{b}$ или нечетное.

Обобщить этотъ результатъ.

11) Пусть $a < b$. Тогда

$$E\left(\frac{a}{b}E\frac{cb}{a}\right) = c - 1, \quad E\left[\frac{a}{b}\left(1 + E\frac{cb}{a}\right)\right] = c.$$

Для доказательства перваго равенства полагаемъ $\omega = \dfrac{cb}{a}$ въ формулѣ (α) и множимъ эту формулу на $\dfrac{a}{b}$, затѣмъ полагаемъ $\omega = \dfrac{a}{b}E\dfrac{cb}{a}$ въ той же формулѣ (α) и складываемъ почленно обѣ полученныя формулы.

Для доказательства второго равенства полагаемъ $\omega = \dfrac{cb}{a}$ въ формулѣ (α) и получаемъ $\dfrac{cb}{a} < 1 + E\dfrac{cb}{a} < 1 + \dfrac{cb}{a}$. Послѣднюю формулу умножаемъ на $\dfrac{a}{b}$.

12) Пусть $(3 + \sqrt{5})^n = a + b\sqrt{5}$. Тогда $a = E(b\sqrt{5}) + 1$. См. Fitz-Patrick, „Exercices d'Arithmétique", стр. 569.

Пусть это предложеніе вѣрно для n. Тогда

$$(3 + \sqrt{5})^{n+1} = (a + b\sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = (3a + 5b) + (a + 3b)\sqrt{5} =$$
$$= [3E(b\sqrt{5}) + 3 + 5b] + [E(b\sqrt{5}) + 1 + 3b]\sqrt{5}.$$

Пусть $b\sqrt{5}-E(b\sqrt{5})=a,\quad 0<a<1.$ Тогда

$$3E(b\sqrt{5})-3b\sqrt{5}=-3a,$$

$$5b-E(b\sqrt{5})\sqrt{5}=(b\sqrt{5})\sqrt{5}-E(b\sqrt{5})\sqrt{5}=a\sqrt{5}$$

и, слѣдовательно,

$$[3E(b\sqrt{5})+3+5b]-[E(b\sqrt{5})+1+3b]\sqrt{5}=a(\sqrt{5}-3)+(3-\sqrt{5}).$$

Такъ какъ $0<3-\sqrt{5}<1$, то изъ этого слѣдутъ, что

$$3E(b\sqrt{5})+3+5b=E\{[E(b\sqrt{5})+1+3b]\sqrt{5}\}+1.$$

Для $n=1$ предложеніе вѣрно. Слѣдовательно, оно вѣрно вообще.

13) Пусть ω число ирраціональное. Изъ равенства $E(\omega+1)=$ $=1+E\omega$, слѣдуетъ тогда, что какое бы цѣлое число n не было намъ дано, существуетъ всегда положительное не цѣлое число ξ, которое меньше n и удовлетворяетъ равенству $\omega+\frac{\xi}{n}=1+E\omega$, или $\xi=nE\omega-n\omega+n$. Въ силу формулы (δ)

$$E(\xi)=nE\omega-E(n\omega)+n.$$

$E(\xi)$, по предложенію 7), положительно. Слѣдовательно, какъ указалъ Hermite, въ ряду

$$E\omega,\quad E\left(\omega+\frac{1}{n}\right),\quad F\left(\omega+\frac{2}{n}\right),\cdots$$

первые $[nE\omega-E(n\omega)+n]$ членовъ равны между собой.

14) Пусть $E\omega=a$. Выраженіе

$$\frac{\omega^n+C_{2n,2}\omega^{n-1}a^2+C_{2n,4}\omega^{n-2}a^4+\cdots}{C_{2n,1}\omega^{n-1}a+C_{2n,3}\omega^{n-2}a^3+C_{2n,5}\omega^{n-3}a_5+\cdots}$$

имѣетъ при неограниченно возрастающемъ n, предѣломъ $\sqrt{\omega}$.

Данное выраженіе можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\frac{(\sqrt{\omega}+a)^{2n}+(\sqrt{\omega}-a)^{2n}}{(\sqrt{\omega}+a)^{2n}-(\sqrt{\omega}-a)^{2n}}\cdot\sqrt{\omega}.$$

15) Простое число p входитъ въ $n!$ сомножителемъ

$$E\frac{n}{p}+E\frac{n}{p^2}+E\frac{n}{p^3}+\cdots$$

разъ (Legendre). Ср. упражненіе 29.

16) Пусть $a<b$. Первые $\left(E\dfrac{b}{E\dfrac{b}{a+1}}-a\right)$ членовъ ряда

$$E\frac{b}{a+1},\quad E\frac{b}{a+2},\ldots$$

равны между собой.

Положимъ $b=(a+1)q+r=(a+n)q+r-(n-1)q$. Изъ $E\dfrac{a}{b+1}=E\dfrac{a}{b+n}$ слѣдуетъ $r-(n-1)q>0$ или $n-1\leqslant E\dfrac{r}{q}$. Подставляя сюда $q=E\dfrac{a}{b+1}$, $r=b-(a+1)E\dfrac{b}{a+1}$, получаемъ предложеніе.

17) Доказать равенства

$$E\frac{a+1}{2}+E\frac{a+2}{4}+E\frac{a+4}{8}+\cdots=a,\quad \text{(Чезаро)}.$$

$$\sum E\frac{a-bx}{c}=\sum E\frac{a-cx}{b},\quad \text{(Hermite)}.$$

$$\sum E\frac{a+x}{2x}=\sum E\frac{a}{2x-1},\quad \sum E\frac{a-bx}{x}=\sum E\frac{a}{b+x}\quad \text{(Чезаро)}.$$

Первое равенство можно доказать слѣдующимъ образомъ. $E\dfrac{a+1}{2}$ представляетъ собой число всѣхъ чиселъ не большихъ a и нечетныхъ, $E\dfrac{a+2}{4}$ число всѣхъ чиселъ не большихъ a и принадлежащихъ къ формѣ $4+2$, $E\dfrac{a+4}{8}$ число такихъ же чиселъ, принадлежащихъ къ формѣ $8+4$, и т. д. Очевидно, что такимъ путемъ мы исчерпаемъ всѣ числа, не большія a.

Второе равенство Чезаро доказывается тѣмъ, что какъ лѣвая, такъ и правая часть его представляютъ собою числа цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній уравненія $cy+bz\leqslant a$.

Точно также доказываются равенства третье и четвертое, при помощи уравненій $2yz-z\leqslant a$, $yz+bz\leqslant a$. Замѣтимъ еще, что во всѣхъ приведенныхъ суммахъ суммированіе производится по x и распространяется на всѣ x, при которыхъ соотвѣтствующія слагаемыя остаются положительными.

18) Изъ другихъ аналогичныхъ функцій укажемъ еще на функцію $I(\omega)=E(2\omega)-E(\omega)$, которая, когда ни ω, ни 2ω не цѣлыя числа представляетъ собой ближайшее къ ω цѣлое число. Изъ указаннаго равенства слѣдуетъ:

$$I\frac{\omega}{2}+I\frac{\omega}{4}+I\frac{\omega}{8}+\cdots=E\omega\quad \text{(Чезаро)}.$$

54. Пусть n число цѣлое и не равное точному квадрату. Обозначимъ черезъ a, b, c,... соотвѣтственные избытки чиселъ n, na, nb, nc,... надъ наибольшими соотвѣтственно не превосходящими ихъ точными квадратами. Числа 1, a, b, c,... образуютъ рядъ Brocard'а.

Рядъ Brocard'а — періодическій. Число членовъ, образующихъ періодъ, меньше $4n$.

Дѣйствительно, пусть h, k, l будутъ $(m-2)$-мъ, $(m-1)$-мъ и m-мъ членами ряда, и пусть $kn = r^2 + s$. Тогда

$$l = s, \quad s \leqslant 2r, \quad 4kn = 4r^2 + 4s \geqslant s^2 + 4s > s^2 = l^2, \quad l^2 < 4kn,$$

$$l^2 < 4nk < 4n\,.\,(2\sqrt{n})\sqrt{h} < \cdots < 4n(2\sqrt{n})\sqrt{2\sqrt{n}\sqrt[4]{2\sqrt{n}\ldots\sqrt[2^{m-3}]{2\sqrt{n}\sqrt[2^{m-2}]{1}}}} =$$

$$= (2\sqrt{n})^{\left(2-\frac{1}{2^{m-2}}\right):\frac{1}{2}} < 16n^2.$$

Слѣдовательно,

$$l < 4n.$$

Среди первыхъ $4n$ членовъ встрѣтится по крайней мѣрѣ одно повторяющееся число. Вслѣдъ за первымъ такимъ числомъ повторяются и слѣдующія за нимъ.

55. Положимъ $k\pi = n\varphi$. Выраженіе $\dfrac{\sin(2n-1)\varphi + \sin\varphi}{2\sin\varphi}$ равно n или 0, смотря по тому, является ли k кратнымъ n или нѣтъ (Libri).

Функціи $0^{0^x}0^{0^{a-x}}$ и $(1-0^{0^{-x}})(1-0^{0^{x-a}})$ принимаютъ значеніе 1 для $0 \leqslant x \leqslant a$, значеніе 0 для всѣхъ другихъ значеній x (Idem).

Въ первомъ предложеніи $2n\varphi = 2k\pi$. Слѣдовательно, можно указанное предложеніе представить въ видѣ $\dfrac{\sin\varphi - \sin\varphi}{2\sin\varphi}\cdot$ Это равно нулю, если знаменатель отличенъ отъ нуля, т. е. если φ не кратное π.

Когда φ кратное π или, что то же самое, когда k кратное n, надо продифференцировать числитель и знаменатель выраженія по φ.

Второе предложеніе нужно понимать слѣдующимъ образомъ. Пусть α, β, γ, δ перемѣнныя числа, имѣющія предѣлъ 0. Тогда функціи $\alpha^{\beta^x}\,.\,\gamma^{\delta^{a-x}}$ и $(1-\alpha^{\beta^{-x}})(1-\gamma^{\delta^{x-a}})$ имѣютъ предѣлъ 1 или 0.

ПИСЬМО ВЪ РЕДАКЦІЮ.

Милостивый государь, г. Редакторъ!

Въ полученномъ мною № 641—642 „Вѣстника“ я прочелъ статейку г. Жардецкаго „Таблицы для рѣшенія кубическаго уравненія“. Мнѣ кажется, той же цѣли гораздо лучше достигаемъ другимъ пріемомъ, который я и позволю себѣ сообщить Вамъ. Можетъ быть, Вы найдете не безынтереснымъ помѣстить эту замѣтку,—кстати сказать,—выписку изъ моихъ Лекцій по Высшей Алгебрѣ въ Екатеринославскомъ Горномъ Училищѣ, литографированномъ въ 1902 г. (Изд. ст. Н. Малинковскій, типогр. Каменскаго. Стр. 84—91).

Графическое рѣшеніе уравненій.

Вышеприведенные методы (методъ Ньютона съ добавленіемъ Фурье) позволяютъ вычислять корни уравненій съ желаемою степенью точности. На практикѣ, однако, очень часто важно не достиженіи очень высокой точности, а только довольно грубое приближеніе. Въ такихъ случаяхъ графическое рѣшеніе съ помощью чертежа оказывается иногда гораздо болѣе удобнымъ. Покажемъ на примѣрѣ, какъ это дѣлается.

Начнемъ съ уравненія 3-ей степени

$$x^3+px+q=0. \tag{1}$$

Перенося послѣдніе два члена въ правую часть, приводимъ уравненіе къ виду:

$$x^3=-px-q. \tag{1'}$$

Разсмотримъ двѣ линіи:

$$y=x^3 \quad \text{(a)} \quad \text{и} \quad y=-px-q \quad \text{(b)}.$$

Первая—кубическая парабола, вторая—прямая. Въ точкахъ пересѣченія двухъ линій координаты x, y для той и другой линіи одинаковы. Соотвѣтственныя значенія абсциссы x получаемъ поэтому уравнивая въ (a) и (b) ординаты y, и приходимъ къ уравненію (1′). Нахожденіе его корней можетъ быть выполнено такъ: строимъ одинъ разъ на всегда кривую (a); (для этого удобно на миллиметровой бумагѣ построить кривую по точкамъ, давая x значеніе 0; 0.5; 0.8; 1.0; 1.1; 1.2;...2.3 и т. д.) и соединяя отдѣльныя точки при помощи лекала или даже при бо́льшихъ значеніяхъ x—прямыми.

При $x<0$ кривая имѣетъ такую же точно вѣтвь, но расположенную ниже оси x-овъ.

Послѣ этого остается въ каждомъ частномъ случаѣ построить прямую (b); проще всего это сдѣлать, отложивъ на осяхъ отрѣзки $-\dfrac{q}{p}$ и $-q$. (Здѣсь p и q раціональны, и составлять таблицъ не нужно).

2) Уравненіе 4-й степени

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{2}$$

можно подстановкою $x = ax_1$ привести къ виду:

$$x^4 \pm x^2 + q'x + p' = 0 \quad (+,\ \text{если}\ p > 0,\quad -,\ \text{если}\ p < 0),$$

гдѣ

$$q' = \frac{q}{p\sqrt{\pm p}},\quad r' = \frac{r}{p^2}\quad \text{и}\quad a = \sqrt{\pm p}.$$

Строимъ кривую

$$y = x^4 \pm x^2. \tag{a}$$

Корни уравненія (2) будутъ абсциссами точекъ пересѣченія ея съ прямою

$$y = -q'x - r'. \tag{b}$$

Кривую (a) построимъ разъ на всегда, а (b) строить не трудно, (но только q' и r' уже не раціональны) вообще говоря.

3⁰) Уравненіе 5-ой степени

$$x^5 + px + q = 0,$$

очевидно, можетъ быть рѣшено точно такъ же: ищемъ графически абсциссу точки пересѣченія кривой $y = x^5$ и прямой $y = -px - q$.

Этотъ же методъ примѣнимъ и къ трансцендентнымъ уравненіямъ.

(Въ качествѣ примѣровъ у меня было приведено 4⁰) уравненіе Кеплера $x - e\sin x = 0$, которое рѣшается пересѣченіемъ синусоиды $y = \sin x$ съ прямою $y = \frac{x}{e}$, и 5⁰) уравненіе $2^x = 4x$).

Проф. Д.Синцовъ.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

В. Э. Лай. *Руководство къ первоначальному обученію ариѳметикѣ, основанное на результатахъ дидактическихъ опытовъ.* Переводъ съ послѣдняго нѣмецкаго изданія подъ редакціей Д. Л. Волковскаго. Изданіе 5-ое, значительно переработанное авторомъ. Изданіе т-ва «В. В. Думновъ, наслѣдн. бр. Салаевыхъ». Москва, 1916. Стр. VIII + 408. Ц. 1 р.

Извѣстный нѣмецкій педагогъ Лай въ своихъ работахъ показалъ и доказалъ, что «новѣйшая психологія и дидактико-психологическіе опыты имѣютъ громадное значеніе въ методикѣ преподаванія отдѣльныхъ предметовъ, въ научномъ обоснованіи и естественномъ построеніи ея, а также въ достиженіи наилучшихъ результатовъ ея».

«Въ настоящее время этотъ взглядъ все болѣе и болѣе распространяется даже среди математиковъ и спеціалистовъ въ области обученія счисленію и математикѣ. Подробности этого можно найти въ настоящей работѣ. Здѣсь же достаточно привести слѣдующія убѣдительныя данныя. Проф. Гэфлеръ (Höfler) въ своей „Didaktik der Mathematik" высказываетъ сожалѣніе, что учителя, получившіе математическое образованіе, недостаточно знакомы съ вопросомъ о логическихъ и психологическихъ основаніяхъ своей науки; то же должно сказать и о весьма многихъ учителяхъ народной школы. Далѣе: въ настоящее время образовалась «международная комиссія по математическому образованію», нѣмецкая группа которой, руководимая извѣстнымъ проф. Клейномъ (Klein), развила оживленную и плодотворную дѣятельность и издала довольно большое число работъ по дидактикѣ, между прочимъ, работу Верникe (Wernicke) — „Philosophische Propädeutik und mathematischer Unterricht" и работу Каца (Katz) — „Psychologie und mathematischer Unterricht", въ которыхъ указывается, что упомянутое «Руководство» является первымъ экспериментальнымъ изслѣдованіемъ въ данной области. При первомъ появленіи этой книги основные выводы ея нѣкоторыми отрицались; зато теперь признали ее «первой экспериментальной работой, прокладывающей новые пути», и перевели на русскій и норвежскій языки. Все болѣе крѣпнетъ убѣжденіе, что для успѣшной борьбы съ предвзятыми сужденіями о происхожденіи чиселъ, счетѣ, числовыхъ рядахъ, объ устномъ и письменномъ счисленіи и т. д., а также для освѣщенія нѣкоторыхъ проблемъ, имѣющихъ огромное значеніе на практикѣ, необходимо обратиться къ психологіи и теоріи познанія, подобно тому, какъ это сдѣлано въ настоящемъ новомъ изданіи «Руководства къ первоначальному обученію ариѳметикѣ».

Послѣднее является существенно переработаннымъ и содержитъ новыя изслѣдованія и данныя, которыя добавляются къ прежнимъ, подкрѣпляя, углубляя и расширяя ихъ. Въ частности, здѣсь имѣются новыя данныя: о развитіи числовыхъ представленій и счетѣ у ребенка съ начала его жизни до поступленія его въ школу, сравнительное изслѣдованіе по счисленію у нормальныхъ и малоуспѣвающихъ учениковъ, о типахъ воспріятія при обученію счисленію, у педагоговъ и математиковъ (типы математиковъ), о сущности письменнаго и устнаго счисленія, о «функціональномъ мышленіи» въ первоначальномъ обученіи ариѳметикѣ, о психологическихъ процессахъ при выполненіи основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій.

Эта книга показываетъ, какимъ путемъ математическая абстракція идетъ отъ счисленія надъ тѣлами къ счисленію на приборахъ, къ счисленію по положенію и на цифрахъ, а дальнѣйшая абстракція въ алгебрѣ и анализѣ, выполненная Дедекиндомъ, Кронекеромъ и другими математиками, приводитъ къ тому, что натуральное число, за возникновеніемъ и сущностью котораго мы слѣдимъ, становится основаніемъ всей математики. Она показываетъ также, какимъ образомъ геометрія положенія на полѣ абака можетъ быть использована при первоначальномъ обученіи ариѳметикѣ.

Книга ставитъ себѣ цѣлью быть частью «жизненной школы»: она пытается замѣнить методъ «даванія» методомъ отысканія и стремится «воспитать въ ученикахъ, путемъ распространеннаго предметнаго счисленія, самостоятельность и самодѣятельность въ численномъ воспріятіи, переработкѣ и изображеніи своего опыта и наблюденій въ области природы и жизни людей».

Трудности экспериментальнаго обученія ариѳметикѣ, которое логически такъ просто и понятно, обыкновенно не замѣчаются и не доцѣниваются тѣми, у кого отсутствуютъ необходимыя свѣдѣнія по психологіи дѣтей и первобытныхъ народовъ, а также по теоріи познанія. Настоящее «Руководство» стремится не только вскрыть всѣ эти трудности, но и помочь преодолѣть ихъ, давая общіе учебные планы, а частью даже и подробно разработанные планы уроковъ, которыхъ нерѣдко не хватаетъ начинающему. Письма педагоговъ-практиковъ, получаемыя мною какъ отъ соотечественниковъ, такъ и изъ-за границы, показываютъ, что «Руководство» даетъ учителямъ возможность не только сберегать время и силы, но и углублять преподаваніе, а также достигать лучшихъ результатовъ, особенно при занятіи со слабыми учениками» *).

*) Изъ предисловія автора къ 3-му изданію.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей профессора Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 303 (6 сер.). Треугольникъ ABC пересѣчь окружностью даннаго радіуса такъ, чтобы хорда пересѣченія была параллельна AC и центръ лежалъ на сторонѣ AC.

И. Александровъ (Москва).

№ 304 (6 сер.). На діаметрѣ данаго круга построить, какъ на основаніи, равнобедренный треугольникъ такъ, чтобы отрѣзокъ его боковой стороны отъ вершины до пересѣченія съ окружностью равнялся данной длинѣ a.

Ѳ. Гусевъ (Москва).

№ 305 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$\frac{10\sqrt[3]{9(2x+1)}}{y-1} = y\,(1+y+y^2+y^3).$$

Г. Боевъ (Саратовъ).

№ 306 (6 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\frac{1}{ax-by-1} - \frac{1}{by-ax-1} = \frac{1}{ax+by-1}\,; \quad bx+ay=m.$$

(Заимств.),

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 253 (6 сер.) *Найти наибольшее значеніе дроби*

$$\frac{4n^2+100n+1}{n^2+n+1},$$

котораго она достигаетъ при n *цѣломъ и положительномъ.*

Представивъ данную дробь въ видѣ $4+\frac{96n-3}{n^2+n+1}$, или же въ видѣ $4+\frac{32n-1}{n^2+n+1}\cdot 3$, приходимъ къ выводу, что эта дробь достигаетъ, при тѣхъ или иныхъ ограниченіяхъ, наибольшаго значенія вмѣстѣ съ дробью $\frac{32n-1}{n^2+n+1}$. При $n=1$ дробь $\frac{32n-1}{n^2+n+1}$ принимаетъ значеніе $\frac{31}{3}$. Вычитая $\frac{32n-1}{n^2+n+1}$ изъ $\frac{31}{3}$, находимъ послѣ обычныхъ преобразованій, что

$$\frac{31}{3}-\frac{32n-1}{n^2+n+1}=\frac{31n^2-65n+34}{3(n^2+n+1)},$$

откуда, разлагая числитель правой части на множители, приходимъ къ тожеству

$$(1)\qquad \frac{31}{3}-\frac{32n-1}{n^2+n+1}=\frac{(31n-34)(n-1)}{3(n^2+n+1)}.$$

При n цѣломъ и положительномъ и большемъ единицы числитель правой части сохраняетъ положительное значеніе, такъ какъ при указанныхъ значеніяхъ n этимъ же свойствомъ обладаетъ каждый изъ сомножителей $31n-34$ и $n-1$. Знаменатель же $3(n^2+n+1)$ сохраняетъ положительное значеніе при любомъ вещественномъ значеніи n, такъ какъ, въ силу тожества $n^2+n+1=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ этимъ свойствомъ обладаетъ множитель n^2+n+1 Итакъ правая часть равенства (1) сохраняетъ положительное значеніе при любомъ цѣломъ, положительномъ и большемъ единицы n, а потому $\frac{31}{3}-\frac{32n-1}{n^2+n+1}>0$ при $n=2, 3,\ldots$ Такимъ образомъ дробь $\frac{32n-1}{n^2+n+1}$ достигаетъ при n цѣломъ и положительномъ наибольшаго значенія, равнаго $\frac{31}{3}$, для $n=1$, а потому дробь $\frac{4n^2+100n+1}{n^2+n+1}$ достигаетъ при n цѣломъ и положительномъ наибольшаго значенія, равнаго $4+\frac{31}{3}\cdot 3$, т. е. 35, для $n=1$.

Замѣчаніе. Наибольшее значеніе, достигаемое разсматриваемой дробью при любомъ вещественномъ значеніи n, равно ирраціональному числу, близкому къ 35, 02; оно достигается при n, немного большемъ 1,04, а именно при $n=\frac{1+\sqrt{1057}}{32}$. Предложенную задачу можно было бы рѣшить, находя и maximum и minimum данной функціи и изслѣдовавъ затѣмъ ходъ функціи во всемъ промежуткѣ $(0, +\infty)$.

Н. К-новъ (Петроградъ); *М. Бабинъ* (ст. Дитковка) *А. Каминскій* (ст. Озерки Финл. ж. д.); *В. Кованько* (Вышній Волочокъ).

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“—Одесса, Екатерининская, 58.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

Приватъ-доцента В. Ф. КАГАНА.

ВТОРОЙ СЕРІИ IV-го СЕМЕСТРА

№№ 637—648.

ОДЕССА.
Типографія „Техникъ", Екатерининская, 58.
1915.

Представивъ данную дробь въ видѣ $4 + \frac{96n - 3}{n^2 + n + 1}$, или же въ видѣ $5 + \frac{32n - 1}{n^2 + n + 1}$ [illegible], приходимъ къ выводу, что эта дробь достигаетъ, при [illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{32n - 1}{n^2 + n + 1}$ [illegible]

или $\frac{31}{3}$, находимъ послѣ обычныхъ преобразованій, что

$$\frac{31}{3} - \frac{32n - 1}{n^2 + n + 1} = \frac{31n^2 - 65n + 34}{3(n^2 + n + 1)},$$

откуда, разлагая [illegible] приходимъ къ равенству

$$(1) \quad \frac{31}{3} - \frac{32n - 1}{n^2 + n + 1} = \frac{(31n - 34)(n - 1)}{3(n^2 + n + 1)}.$$

При n цѣломъ и положительномъ [illegible] числитель правой части сохраняетъ положительное значеніе, такъ какъ при указанныхъ значеніяхъ и этимъ же свойствомъ обладаетъ каждый изъ сомножителей $31n - 34$ и $n - 1$. Знаменатель же $3(n^2 + n + 1)$ сохраняетъ положительное значеніе при любомъ вещественномъ значеніи n, такъ какъ его [illegible]

$n^2 + n + 1$ [illegible] $+ n + 1$ [illegible]

Итакъ правая часть равенства (1) сохраняетъ положительное значеніе при любомъ цѣломъ, положительномъ и большемъ единицы n, а потому $\frac{31}{3} - \frac{32n - 1}{n^2 + n + 1} > 0$ при $n = 2, 3, \ldots$ Такимъ образомъ дробь $\frac{32n - 1}{n^2 + n + 1}$ достигаетъ при n цѣломъ и положительномъ наибольшаго значенія, равнаго $\frac{31}{3}$, для $n = 1$, а потому дробь $\frac{[illegible]}{n^2 + n + 1}$ достигаетъ при n цѣломъ и положительномъ наибольшаго [illegible] $\frac{31}{3}$ [illegible], т. е. 35, для $n = 1$.

Замѣчаніе. Наибольшее значеніе, достигаемое разсматриваемой дробью при любомъ вещественномъ значеніи n, равно ирраціональному числу, близкому къ 35,02, оно достигается при n, немного большемъ 1,04, а именно при $n = \frac{1 + \sqrt{1057}}{32}$. Предложенную задачу можно было бы рѣшить, находя maximum и minimum данной функціи и изслѣдовавъ затѣмъ ходъ функціи во всемъ промежуткѣ $(0, +\infty)$.

Н. К-овъ (Петроградъ); *М. Кобинъ* (ст. [illegible]); *А. Каминскій* (ст. [illegible]); *В. Коваленко* (Вышній Волочокъ).

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военною цензурою.
Типографія „Техникъ“—Одесса, Екатерининская 58.

СОДЕРЖАНІЕ

„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики"

ЗА ЧЕТВЕРТЫЙ СЕМЕСТРЪ II-ОЙ СЕРІИ.

№№ 637—648.

От ъ редакціи.

Статьи.

Стр.

Письма въ редакцію.

Полемика.

Опыты и приборы.

Библіографія.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Стр.

Письма въ редакцію.

Полемика.

Опыты и приборы.

Библіографія.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Задачи.

Шестой серіи.

Рѣшенія задачъ.

Отдѣлъ I. Шестой серіи.

Поправки.

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.