№№ 76—77.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ,

Издаваемый Э. К. Шпачинскимъ.

РЕКОМЕНДОВАНЪ:

Уч. Ком. Мин. Нар. Просв. для гимназій мужскихъ и женскихъ, реальныхъ училищъ, прогимназій, городскихъ училищъ, учительскихъ институтовъ и семинарій; Гл. Упр. Военно-Учебн. Зав.—для военно-учебныхъ заведеній.

№№ 1-48 ОДОБРЕНЫ
Уч. Ком. при Св. Синодѣ для духовныхъ семинарій и училищъ.

VII Семестра №№ 4-й и 5-й.

ЭКШ

Высочайше утверж. Товарищество печатнаго дѣла и торговли И. Н. Кушнеревъ и К°, въ Москвѣ.
Кіевское Отдѣленіе, Бибиковскій бульваръ, домъ № 8-б.
1889.

Содержаніе № 76.

...и.—О газообразномъ и жидкомъ состояніи тѣлъ. (Продолженіе). *Б.* ...опросу о построеніи ирраціональныхъ чиселъ π и $\sqrt{\pi}$. (Окончаніе). ...—Задачи №№ 501 506.—Рѣшенія задачъ №№ 358, 371 и 398.

Содержаніе № 77.

...Именованныя величины въ школьномъ преподаваніи и значеніе ихъ симво...ъ. (Продолженіе). *Θ. Ю. Мацона.*—Амальгамированіе цинковъ по системѣ Э. К. Шпачинскаго. *Ш.*—Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ: Матем. Отд. Новор. Общ. Естествоиспыт. по вопр. эл. мат. и физики. Одесса 15 сент. 1889 г. *И. Занчевскій*, того же общества Одесса 29 сентября 1889 г. *И. Слешинскій*, Кіевское Общество Естеств. 16 и 30 сентября. *Ш.*—Задачи №№ 507—514.—Рѣшенія задачи № 403.

Условія сотрудничества:

Всѣ читатели журнала приглашаются быть сотрудниками и корреспондентами.

Сотрудничество не даетъ права на даровой экземпляръ журнала.

Денежнаго гонорара за статьи редакія никому не платитъ.

Редакція не беретъ на себя обязательства обратной пересылки присылаемыхъ авторами рукописей, и на вопросы касательно времени печатанія статей, причинъ ихъ непомѣщенія и пр. всегда отвѣчать не обѣщаетъ.

Чертежи къ статьямъ должны быть возможно простые, тщательно исполненные на отдѣльной бумагѣ (а не въ текстѣ рукописи) и возможно малыхъ размѣровъ.

Авторамъ статей, помѣщенныхъ въ журналѣ, высылается, въ случаѣ если они того пожелаютъ, 5 экз. тѣхъ №№ „Вѣстника", въ которыхъ статьи напечатаны, или—взамѣнъ этого—25 отдѣльныхъ оттисковъ безплатно. Отдѣльные оттиски въ большемъ количествѣ экземпляровъ могутъ быть заготовлены за счетъ авторовъ, при условіи своевременнаго о томъ извѣщенія редакціи.

Адресъ: Кіевъ, Редакція „Вѣстника Оп. Физ. и Эл. Математики", Паньковская № 23.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 76.

VII Сем. 21 Сентября 1889 г. № 4.

ОТЪ РЕДАКЦІИ.

Отъ Императорскаго Русскаго Географическаго Общества нами получено отъ 25 сентября сего 1889 г. за № 721 предложеніе принять участіе въ сборѣ пожертвованій на составленіе капитала для учрежденія преміи и медали имени **Николая Михайловича Пржевальскаго.**

Изъ письма г. Вице-Предсѣдателя Имп. Р. Г. Общ. Сенатора П. Семенова позволяемъ себѣ привесть слѣдующія слова:

„Державному хозяину Русской земли, Государю Императору, благоугодно было Самому озаботиться сооруженіемъ великолѣпнаго памятника величайшему русскому путешественнику нынѣшняго вѣка надъ его одинокою могилою на берегахъ озера Иссыкъ-куля, гдѣ онъ нашелъ преждевременную смерть въ городѣ, которому Высочайшею Волею на вѣки присвоено отнынѣ славное имя покойнаго.

„Вмѣстѣ съ тѣмъ Государю Императору благоугодно было соизволить на открытіе повсемѣстной по Россіи подписки для составленія капитала на учрежденіе при Императорскомъ Русскомъ Географическомъ Обществѣ преміи и медали имени Н. М. Пржевальскаго, для выдачи русскимъ путешественникамъ и изслѣдователямъ на полѣ географической науки, въ награду за понесенные на этомъ поприщѣ труды".

Объявляя настоящимъ объ открытіи такой подписки, редакція „Вѣстника Оп. Физики и Эл. Математики" льститъ себя надеждой, что и между ея подписчиками и читателями найдется не мало такихъ, которые захотятъ оказать возможное содѣйствіе къ достиженію намѣченной Императорскимъ Русскимъ Географическимъ Обществомъ, съ Высочайшаго соизволенія, вышеизложенной патріотической цѣли.

Всякія денежныя пожертвованія, хотя бы самыя скромныхъ размѣровъ, принимаются въ нашей редакціи или адресуются непосредственно: въ Спб. въ Императорское Русское Географическое Общество.

При этомъ просимъ принять во вниманіе, что подписной листъ за № 327, присланный намъ для сбора пожертвованій, и собранные по немъ деньги имѣютъ быть отосланы обратно въ Императорское Русское Географическое Общество *не позже 25-го сентября будущаго 1890 года.*

Независимо отъ публикаціи Императорскаго Русскаго Географическаго Общества, имена и фамиліи лицъ, внесшихъ свои пожертвованія по адресу нашей редакціи, будутъ также публикованы въ „Вѣстникѣ".

Въ настоящее время по подписному листу № 327 внесено отъ: 1) Эразма Корнеліевича Шпачинскаго—5 р., 2) Ядвиги Осиповны Шпачинской—5 р., 3) Алексѣя Львовича Королькова—3 р., 4) Василія Петровича Ермакова—5 р., 5) Илларіона Николаевича Красовскаго—3 р.; всего 21 руб.

О ГАЗООБРАЗНОМЪ И ЖИДКОМЪ
состояніи тѣлъ.

(*Продолженіе*) *).

Разсмотрѣвъ такимъ образомъ вкратцѣ теорію расширенія жидкостей de Heen'а, обратимся теперь къ теоріи Weilenmann'а **), основанной на совершенно другихъ началахъ.

Мы уже знаемъ, что истинный коэффиціентъ расширенія жидкостей съ пониженіемъ температуры уменьшается, и при этомъ, какъ извѣстно, вода при 4°Ц. представляетъ ту замѣчательную особенность, что этотъ истинный коэффиціентъ расширенія дѣлается равнымъ нулю, т. е. вода достигаетъ максимума своей плотности. Изъ того обстоятельства, что мы и въ другихъ жидкостяхъ замѣчаемъ постепенное уменьшеніе коэффиціента расширенія съ пониженіемъ температуры Weilenmann заключаетъ, что и другія жидкости по всей вѣроятности должны имѣть при нѣкоторой достаточно низкой температурѣ максимальную плотность и, что если мы этого въ большинствѣ случаевъ не замѣчаемъ, то это происходитъ лишь только отъ того, что большинство жидкостей, не достигнувъ еще столь низкой температуры, переходятъ уже изъ жидкаго состоянія въ твердое. И дѣйствительно, теорія Weilenmann'а, какъ мы сейчасъ увидимъ, вполнѣ оправдываетъ это предположеніе, такъ что особенность воды принимать при 4° минимальный объемъ не надо разсматривать,

*) См. „Вѣстникъ" №№ 65, 67, 69, 71 и 74.
**) Vierteljahrschr. d. Züricher naturf. Ges. 33. p. 37. 1888. Также. Exner's Repertorium. 24. p. 660. 1888.

какъ какое-нибудь исключенiе изъ общаго правила, но, наоборотъ, какъ общiй законъ, характеризующiй расширенiе жидкостей.

Weilenmann принимаетъ, что отдѣльныя частицы жидкости притягиваютъ другъ друга по закону Ньютона, т. е. обратно пропорцiонально квадрату ихъ относительнаго разстоянiя. Пространство между частицами жидкости заполнено эфиромъ, который Weilenmann разсматриваетъ какъ нѣкоторый газъ, состоящiй изъ отдѣльныхъ подвижныхъ частицъ. Эти движущiяся эфирныя частицы производятъ въ жидкости нѣкоторое внутреннее давленiе, отъ котораго все тѣло и получаетъ стремленiе расширяться. Если мы обозначимъ объемъ тѣла при температурѣ t_0 чрезъ v_0, а при температурѣ t чрезъ v, среднее-же разстоянiе частицъ при тѣхъ-же температурахъ чрезъ r_0 и r, а внѣшнее давленiе чрезъ p, то измѣненiе потенцiальной энергiи жидкости $\triangle E_p$ при возвышенiи температуры отъ t_0 до t градусовъ выразится слѣдующимъ уравненiемъ:

$$\triangle E_p = \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0} + p(v - v_0),$$

гдѣ k есть нѣкоторая постоянная величина.

Измѣненiе кинетической энергiи молекулы жидкости или эфира можно принять пропорцiональнымъ измѣненiю температуры (см. § I), такъ что это измѣненiе можно выразить линейной функцiей (напр. $\alpha + \beta t$) обыкновенной температуры t. Обозначая далѣе чрезъ z_1 число молекулъ жидкости, а чрезъ z число отдѣльныхъ частицъ эфира, заключенныхъ въ данной массѣ жидкости, мы получимъ, согласно съ Weilenmann'омъ, слѣдующее выраженiе для измѣненiя кинетической энергiи $\triangle E_k$.

$$\triangle E_k = \beta(z + z_1)(m + t),$$

гдѣ β и m суть нѣкоторыя постоянныя величины.

Теперь на основанiи принципа сохраненiя энергiи, мы должны всегда имѣть:

$$\triangle E_p = \triangle E_k,$$

откуда уже, припомнивъ, что r можно всегда принять пропорцiональнымъ корню третьей степени изъ объема тѣла v, мы получимъ слѣдующее окончательное уравненiе расширенiя:

$$\frac{k'}{v^{1/3}} - \frac{k'}{v_0^{1/3}} + p(v - v_0) = \beta(z + z_1)(m + t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Уравненiе (13) и есть основное уравненiе Weilenmann'a. Его можно разсматривать, какъ общее уравненiе состоянiя, такъ какъ оно даетъ зависимость между тремя характеристичными элементами тѣла: давленiемъ, температурой и объемомъ, и можетъ всегда быть приведено къ виду:

$$F(p, v, t) = 0.$$

Въ формулѣ (13) величина z, т. е. число частицъ эфира, заключенныхъ въ данной массѣ жидкости, остается все таки до нѣкоторой степени величиной неопредѣленной. Естественно ожидать, что чѣмъ выше температура, тѣмъ меньше должно быть z. Weilenmann принимаетъ

$$z = z_0 - k'' \lg(m + t), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

что имѣетъ нѣкоторое сходство съ формулой расширенія Авенаріуса. Для жидкостей третій членъ въ уравненіи (13)

$$p(v-v_0)$$

вообще говоря очень малъ, а потому для обыкновенныхъ давленій можно имъ пренебречь и тогда, сочетая уравненіе (14) съ уравненіемъ (13), мы получимъ слѣдующую общую формулу для расширенія жидкихъ тѣлъ:

$$\frac{1}{v^{1/3}}=A+B(m+t)-C(m+t)\lg(m+t), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

гдѣ A, B, C и m суть нѣкоторыя постоянныя величины.

Здѣсь нельзя не отмѣтить того любопытнаго обстоятельства, что уравненіе (13), которое, хотя и было построено исключительно только для изслѣдованія расширенія жидкостей, приводитъ въ частномъ случаѣ, въ примѣненіи къ тѣламъ газообразнымъ, къ основнымъ законамъ Бойля-Маріотта и Гей-Люссака.

Такъ какъ въ газахъ внутреннее сцѣпленіе частицъ чрезвычайно мало, то мы въ уравненіи (13) можемъ въ первомъ приближеніи пренебречь первыми двумя членами, зависящими именно отъ внутренняго сцѣпленія частицъ. Далѣе Weilenmann принимаетъ, что совершенно и правдоподобно, что въ тѣлахъ газообразныхъ молекулы газа на столько удалены другъ отъ друга, что число частицъ эфира въ единицѣ объема внутри и внѣ разсматриваемаго тѣла, одинаково, такъ что мы можемъ совсѣмъ и не разсматривать давленія, производимаго эфирными частицами, а сосредоточить свое вниманіе исключительно только на газообразныхъ молекулахъ даннаго вещества*).

Въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть:

$$p(v-v_0)=\beta z_1(m+t).$$

Величина v_0 зависитъ отъ величины m, такъ какъ m зависитъ отъ начальной взятой нами температуры t_0. Но мы можемъ t_0 всегда такъ выбрать, что v_0 въ сравненіи съ v будетъ чрезвычайно мало и слѣдовательно v_0 въ первомъ приближеніи можетъ быть отброшено.

Мы получимъ такимъ образомъ:

$$pv=c(1+c_1 t)\,{}^{**}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

а это есть не что иное, какъ основное уравненіе газообразнаго состоянія тѣлъ.

Weilenmann примѣнилъ свою теорію къ изслѣдованію расширенія нѣсколькихъ жидкостей и нашелъ прекрасное согласіе формулы (15) съ наблюденіями. Такъ въ частности въ примѣненіи къ водѣ, характеръ расширенія которой чрезвычайно сложный, формула Weilenmann'а даетъ такое-же прекрасное согласіе съ наблюденіями, какъ интерполяціонная формула Rosetti съ 5-ью постоянными величинами.

Изъ уравненія (15), которое даетъ согласно съ Weilenmann'омъ общій законъ расширенія жидкостей, легко видѣть, что должна вообще существовать нѣкоторая температура t', при которой объемъ жидкости v

*) Нѣчто подобное мы встрѣчаемъ при законѣ Дальтона для смѣси двухъ газовъ.

**) c и c_1 постоянныя.

достигаетъ нѣкотораго минимума, т. е. жидкость имѣетъ максимальную плотность, подобно тому какъ это имѣетъ мѣсто для воды при 4°Ц. Изъ этого слѣдуетъ уже заключить, что особенный характеръ расширенія воды представляетъ, согласно съ этой теоріей, совсѣмъ не исключеніе изъ общаго правила, а выражаетъ собою, наоборотъ, общій законъ расширенія жидкостей.

Величина температуры, при которой жидкость достигаетъ максимальной плотности, опредѣляется изъ слѣдующаго уравненія:

$$\lg(m+t')=\frac{B-C}{C}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

которое выводится изъ основнаго уравненія расширенія въ предположеніи, что v при этой температурѣ t' достигаетъ нѣкотораго минимума.

Weilenmann, хотя и даетъ величины коэффиціентовъ A, B, C и m для различныхъ жидкостей, не приводитъ тѣмъ не менѣе за исключеніемъ воды величины температуры t', соотвѣтствующей максимальной плотности жидкости, вѣроятно въ виду того обстоятельства, что всѣ эти температуры лежатъ чрезвычайно низко, такъ что можетъ явиться сомнѣніе въ томъ, правильно-ли пользоваться формулой, хотя-бы до нѣкоторой степени и теоретической, но такъ далеко внѣ предѣловъ тѣхъ температуръ, для которыхъ эта формула, собственно говоря, и была только построена. Но для сравненія я вычислилъ все таки эти температуры t' и получилъ слѣдующія величины, приведенныя въ таблицѣ.

Названіе жидкости.	Тепмература максимальн. плотности.
Вода	$+4$°Ц.
Амиловый алкоголь	—105
Муравьиная кислота	—163
Этиловый алкоголь	—195
Уксусная кислота	—202
Метиловый алкоголь.	—231

Въ заключеніе своей работы Weilenmann замѣчаетъ, что было бы весьма интересно провѣрить эту теорію расширенія и при очень высокихъ температурахъ, доходя такимъ образомъ даже до критической, и сравнить эту теорію съ результатами изслѣдованій Van der Waals'a, d-Heen'a, Clausius'a, Авенаріуса, Grimaldi, Надеждина и др.; но такое сравненіе не было еще до сихъ поръ сдѣлано, такъ что вопросъ этотъ остается пока открытымъ.

Обратимся теперь къ теоріи Van der Waals'a и докажемъ одинъ очень интересный и общій законъ, относящійся къ расширенію жидкихъ тѣлъ.

Мы уже видѣли, что основное уравненіе состоянія Van der Waals'a имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=R(1+\alpha t)=(1+a)(1-b)(1+\alpha t).$$

Далѣе въ § III (формулы 7, 8 и 9) было показано, какимъ образомъ по величинамъ постоянныхъ a и b можно получить критическій объемъ, температуру и давленіе (v_1, t_1 и p_1).

Введемъ вмѣсто обыкновенной температуры абсолютную, считаемую отъ $-273°$ по Ц.; тогда мы получимъ:

$$v_1=3b \qquad p_1=\frac{a}{27b^2} \qquad T_1=\frac{8.273}{27}.\frac{a}{b}.\frac{1}{(1+a)(1-b)} \ldots . (18)$$

Будемъ теперь выражать объемъ, температуру и давленіе не въ прежнихъ единицахъ, а въ частяхъ соотвѣтствующихъ элементовъ при критической температурѣ.

Согласно съ этимъ, обозначимъ

$$v=\omega.v_1 \qquad p=\delta.p_1 \qquad T=\tau.T_1 \ . \ . \ . \ . \ . \ (19)$$

и посмотримъ, какая существуетъ зависимость между этими тремя величинами ω, δ и τ.

Подставивъ эти величины въ уравненіе Van der Waals'а и замѣнивъ критическіе элементы соотвѣтствующими величинами изъ уравненій (18), мы будемъ имѣть:

$$\left\{\delta\frac{a}{27b^2}+\frac{a}{9b^2.\omega^2}\right\}\{3\omega b-b\}=\frac{(1+a)(1-b)}{273}.\frac{8.273}{27}.\frac{a}{b}.\frac{\tau}{(1+a)(1-b)}$$

или послѣ всѣхъ сокращеній:

$$\left\{\delta+\frac{3}{\omega^2}\right\}\{3\omega-1\}=8\tau \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (20)$$

Уравненіе (20) имѣетъ въ высшей степени замѣчательную особенность. Мы видимъ, что оно не содержитъ болѣе постоянныхъ a и b, которыми жидкости и газы, собственно говоря, и характеризуются и которыми они и отличаются другъ отъ друга; слѣдовательно уравненіе (20) пригодно для *всѣхъ* жидкихъ и газообразныхъ тѣлъ*), и вслѣдствіе этого оно называется *приведеннымъ* (reducirte) уравненіемъ состоянія**). Это уравненіе представляетъ, согласно съ выраженіемъ Violi, молекулярный скелетъ жидкихъ и газообразныхъ тѣлъ, и чтобы отъ этого приведеннаго уравненія перейти къ уравненію какой-нибудь опредѣленной жидкости надо только знать величины коэффиціентовъ a и b. Но такъ какъ эти коэффиціенты опредѣляются вполнѣ, когда извѣстны два какіе-нибудь критическіе элемента данной жидкости, напримѣръ критическая температура и давленіе, то отсюда уже становится совершенно понятнымъ, какое громадное значеніе для теоріи жидкостей должно имѣть обстоятельное знакомство съ критическимъ состояніемъ жидкихъ тѣлъ. Дѣйствительно, мы видимъ, что величинами критической температуры и

*) Конечно, всегда въ тѣхъ предѣлахъ, въ которыхъ уравненіе Van der Waals'а можно вообще признать общимъ уравненіемъ состоянія жидкихъ и газообразныхъ тѣлъ.

**) Die Continuität exc. p. 127.

давленія вполнѣ характеризуется всякая жидкость, такъ какъ эти данныя, совмѣстно съ однимъ и тѣмъ-же приведеннымъ уравненіемъ состоянія, даютъ совершенно достаточный матеріалъ для изслѣдованія различнѣйшихъ свойствъ того-же самаго тѣла, когда оно находится въ жидкомъ или газообразномъ состояніи.

Докажемъ теперь законъ Van der Waals'а относительно расширенія жидкостей.

Уравненіе (20) можетъ быть всегда представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$\omega=\varphi(\delta,\tau),$$

гдѣ φ выражаетъ собою нѣкоторый вполнѣ опредѣленный функціональный знакъ.

Оставимъ давленіе, т. е. δ, неизмѣннымъ и введемъ опять объемъ и температуру тѣла v и T.

$$v=\varphi\left(\delta,\frac{T}{T_1}\right)v_1.$$

Пусть, когда температура увеличится на $\triangle T$ градусовъ соотвѣтствующее измѣненіе объема будетъ $\triangle v$.

Тогда

$$\triangle v=\varphi\left(\delta,\frac{T+\triangle T}{T_1}\right).v_1-\varphi\left(\delta,\frac{T}{T_1}\right).v_1.$$

Если $\frac{\triangle T}{T_1}$, какъ мы и предполагаемъ, чрезвычайно мало, то мы можемъ $\varphi\left(\delta,\frac{T+\triangle T}{T_1}\right)$ разложить въ рядъ по степенямъ $\frac{\triangle T}{T_1}$. Первый членъ этого разложенія будетъ очевидно $\varphi\left(\delta,\frac{T}{T_1}\right)$, и если мы обозначимъ коэффиціентъ при $\frac{\triangle T}{T_1}$ чрезъ $\varphi'\left(\delta,\frac{T}{T_1}\right)$ и ограничимся по малости $\triangle T$ первой лишь степенью $\frac{\triangle T}{T_1}$, то получимъ:

$$\triangle v=v_1.\varphi'\left(\delta,\frac{T}{T_1}\right).\frac{\triangle T}{T_1}=v_1\varphi'(\delta,\tau).\frac{\triangle T}{T_1}.$$

Отсюда, дѣля $\triangle v$ на v, получимъ окончательно:

$$\frac{\triangle v}{v}=\frac{\varphi'(\delta,\tau)}{\varphi(\delta,\tau)}.\frac{\triangle T}{T_1}\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad(21)$$

Чтобы уяснить себѣ все значеніе только что полученнаго результата, надо точнѣе опредѣлить понятіе о такъ называемыхъ соотвѣтственныхъ состояніяхъ двухъ или нѣсколькихъ жидкостей. Въ различныхъ этюдахъ по сравнительной физикѣ, которой за послѣднее время особенно много стали заниматься и которая обѣщаетъ еще въ будущемъ такъ много интересныхъ открытій и обобщеній, обыкновенно сравниваютъ различныя свойства тѣлъ или при одинаковыхъ температурахъ, или же при одинаковыхъ давленіяхъ. Выбирая для такого сравненія какую-нибудь опредѣленную температуру и приводя всѣ данныя къ этой температурѣ, думаютъ обыкновенно этимъ самымъ сдѣлать результаты наблюденій сравнимыми между собою. Но въ этомъ заключается большая ошибка. Та-же самая абсолютная температура можетъ имѣть для двухъ жидкостей совершенно различное значеніе; для одной изъ взятыхъ жидкостей выбранная нами температура можетъ лежать вблизи соотвѣтствующей критической, а для другой далеко отстоять отъ нея, такъ что обѣ эти жидкости не могутъ при этихъ условіяхъ обладать тѣми-же самыми характерными особенностями и имѣть строго сравнимыя между собою свойства. Въ предѣльномъ случаѣ, если-бы взятая для сравненія температура оказалась для одной изъ жидкостей выше соотвѣтствующей критической температуры, а для другой ниже ея, то полнѣйшая несравнимость экспериментальныхъ данныхъ уже сама собою совершенно очевидна. То же самое относится и къ давленіямъ. Когда приводятъ для сравненія всѣ результаты наблюденій надъ различными жидкостями къ одной и той-же температурѣ и давленію, то въ выборѣ этихъ послѣднихъ допускается всегда нѣкоторый произволъ, и за такими сравненіями нельзя, какъ мы только что видѣли, признать вообще строго раціональнаго характера. Спрашивается-же теперь, при какихъ именно температурахъ и давленіяхъ раціональнѣе всего сравнивать свойства различныхъ жидкостей? При критической температурѣ всѣ жидкости представляютъ ту-же самую особенность необходимаго перехода въ газообразное состояніе. Такимъ образомъ при критической температурѣ и при критическомъ давленіи свойства различныхъ жидкостей дѣйствительно сравнимы между собою. Чтобы эта сравнимость сохранилась и при другихъ температурахъ и давленіяхъ, надо чтобы сравниваемыя между собою жидкости находились такъ сказать въ относительно равномъ удаленіи отъ соотвѣтствующаго своего критическаго состоянія, т. е. находились-бы въ такъ называемыхъ *соотвѣтственныхъ состояніяхъ*. Подъ этимъ надо подразумѣвать слѣдующее. Двѣ жидкости находятся тогда въ соотвѣтственныхъ состояніяхъ, когда давленіе, испытываемое каждой изъ нихъ, составляетъ ту-же часть соотвѣтствующаго критическаго давленія, и когда абсолютная температура каждой изъ этихъ жидкостей составляетъ ту-же часть соотвѣтствующей абсолютной критической температуры. Иначе говоря, двѣ жидкости находятся въ соотвѣтственныхъ состояніяхъ, когда у нихъ δ и τ, а слѣдовательно и ω, имѣютъ то-же самое численное значеніе. Но такъ какъ критическіе элементы разныхъ тѣлъ, вообще говоря, разнятся одинъ отъ другого, то при равныхъ δ и τ, температура и давленіе различныхъ сравниваемыхъ между собою жидкостей будутъ, вообще говоря, также различны, но не смотря на это разныя экспериментальныя данныя могутъ при этихъ условіяхъ дѣйствительно считаться строго сравнимыми между собою, и за такими сравненіями можно теперь уже признать вполнѣ раціональный характеръ. Особенно яркое подтвержденіе сказаннаго мы сейчасъ увидимъ при разборѣ только что полученнаго уравненія (21).

Представимъ себѣ рядъ жидкостей, находящихся въ соотвѣтственныхъ состояніяхъ. Такъ какъ δ и τ у всѣхъ у нихъ одинаково, то дробь

$$\frac{\varphi'(\delta,\tau)}{\varphi(\delta,\tau)}$$

будетъ для вѣхъ сравниваемыхъ между собою при этихъ условіяхъ жидкостей имѣть то-же постоянное численное значеніе. Обозначая эту постоянную величину чрезъ k, будемъ имѣть:

$$\frac{\triangle v}{v}=\frac{k}{T_1}.\triangle T \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (22)$$

Это уравненіе и выражаетъ собою знаменитый законъ Van der Waals'а, по которому въ соотвѣтственныхъ состояніяхъ относительное приращеніе объема различныхъ жидкостей на то-же приращеніе температуры обратно пропорціонально соотвѣтствующей абсолютной критической температурѣ. Этотъ законъ помимо своего значительнаго теоретическаго интереса имѣетъ и большое практическое значеніе. Дѣйствительно, мы видимъ, что достаточно изучить обстоятельнымъ образомъ расширеніе одной какой-нибудь жидкости при различныхъ температурахъ и давленіяхъ, чтобы уже можно было отсюда вычисленіемъ получить законы расширенія какой угодно другой жидкости, какъ скоро только извѣстны ея критическая температура и критическое давленіе.

Посмотримъ теперь на сколько эта теорія дѣйствительно согласуется съ наблюденіями. Для сравненія надо выбрать жидкости не только при соотвѣтственныхъ температурахъ, но также и при соотвѣтственныхъ давленіяхъ; но такъ какъ изученіе расширенія жидкостей при различныхъ давленіяхъ еще очень мало подвинулось впередъ, то мы и не имѣемъ въ своемъ распоряженіи очень много данныхъ, по которымъ можно-бы было провѣрить справедливость вышеизложенной теоріи. Но, обративъ вниманіе на то обстоятельство, что, какъ мы видѣли, значительныя измѣненія въ давленіи сопровождаются лишь ничтожными измѣненіями въ расширяемости жидкостей, можемъ ожидать, что не будетъ большой бѣды въ томъ, если давленія окажутся и не строго соотвѣтственными. Однако лучше все таки выбрать для провѣрки теоріи такія жидкости, для которыхъ критическія давленія не слишкомъ-бы отличались одно отъ другого. Съ этой цѣлью мы и выберемъ слѣдующія три жидкости: хлористый этилъ, эфиръ и хлороформъ, абсолютныя критическія температуры которыхъ соотвѣтственно равны 455,6; 463,0 и 553,0 (по Зайончевскому). Вмѣсто того, чтобы сравнивать $\frac{\triangle v}{v}$ для того-же приращанія температуры $\triangle T$, проще будетъ сравнивать отношенія

$$\frac{\text{пр.}\ \dfrac{\triangle v}{\triangle T}}{v}=\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dt}.$$

Очевидно, что законъ Van der Waals'а относится и къ этому отношенію, потому что $\triangle T$ остается у насъ величиной произвольной, хотя и малой, а слѣдовательно $\triangle T$ можетъ принимать и безконечно малыя численныя значенія.

Основываясь на наблюденіяхъ Корр'а надъ расширеніемъ эфира, вычислимъ по закону Van der Waals'а для хлористаго этила и хлороформа $\frac{1}{v}.\frac{dv}{dt}$ для двухъ какихъ-нибудь температуръ и сравнимъ полученные такимъ образомъ результаты съ данными, заимствованными изъ непосредственныхъ наблюденій надъ расширеніемъ этихъ двухъ жидкостей.

По Корр'у *) для эфира:

$$v=1+0{,}00148026t+0{,}00000350316t^2+0{,}000000027007t^3.$$

Выберемъ для эфира слѣдующія двѣ температуры:

$$t'=0°Ц. \qquad t''=20°Ц.$$

$$\tau'=\frac{273}{463{,}0} \qquad \tau''=\frac{293}{463{,}0}.$$

Соотвѣтственныя температуры для другихъ двухъ жидкостей опредѣлятся слѣдующимъ образомъ.

Для хлористаго этила:

$$T_1'=\tau'.455{,}6=268{,}7 \qquad T_1''=\tau''.455{,}6=288{,}3$$

$$t_1'=-4°{,}3Ц. \qquad t_1''=15°{,}3Ц.$$

Для хлороформа:

$$T_2'=\tau',533{,}0=314{,}3. \qquad T_2''=\tau''.533{,}0=337{,}3$$

$$t_2'=41°{,}3Ц. \qquad t_2''=64°{,}3Ц.$$

Для эфира мы имѣемъ:

$$t=0 \qquad \frac{dv}{dt}.\frac{1}{v}=0{,}001480.$$

$$t=20 \qquad \frac{dv}{dt}.\frac{1}{v}=0{,}001603$$

Умноживъ эти числа на обратное отношеніе абсолютныхъ критическихъ температуръ, мы получимъ соотвѣтствующія отношенія и для другихъ двухъ жидкостей. Чтобы сравнить полученныя такимъ образомъ данныя съ тѣмъ, что даютъ непосредственныя наблюденія, мы воспользуемся параболическими формулами Pierre'а **) для расширенія хлористаго этила и хлороформа, по которымъ можно, точно также, какъ и для эфира, получить численную величину отношенія $\frac{1}{v}.\frac{dv}{dt}$ при соотвѣтственныхъ температурахъ.

*) Tabellen von Landolt und Börnstein. Berlin 1883. p. 65.

**) Tabellen von Landolt und Börnstein. p. 65.

Результаты этихъ вычисленій приведены въ слѣдующей табличкѣ.

		Хлористый этилъ.		Хлороформъ.	
		$t=-4,3$	$t=15,3$	$t=41,3$	$t=64,3$
$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dt}$	По закону V. der Waals'a	0,00150	0,00163	0,00129	0,00139
	По формулѣ Pierre'a . . .	0,00156	0,00163	0,00133	0,00137

Мы видимъ отсюда, что, не смотря на то, что и критическія температуры могутъ быть нѣсколько ошибочны, и давленія выбраны не строго соотвѣтственныя, тѣмъ не менѣе законъ Van der Waals'a даетъ очень хорошее согласіе съ наблюденіями, и хотя очень можетъ быть, какъ и замѣчаетъ Надеждинъ въ своихъ „Физическихъ изслѣдованіяхъ", уравненіе Van der Waals'a не можетъ быть непосредственно примѣнено къ жидкостямъ въ виду измѣняемости коэффиціента b при очень малыхъ объемахъ тѣла, но тѣмъ не менѣе законъ Van der Waals'a, по которому въ соотвѣтственныхъ состояніяхъ относительныя приращенія объемовъ разныхъ жидкостей обратно пропорціональны соотвѣтственнымъ абсолютнымъ критическимъ температурамъ, можно уже признать чрезвычайно важнымъ обобщеніемъ въ области теоріи расширенія жидкостей.

За недостаткомъ мѣста мы не можемъ останавливаться на разныхъ эмпирическихъ соотношеніяхъ между различными жидкостями, принадлежащими, напримѣръ, какому-нибудь гомологическому ряду. Мы упомянемъ здѣсь только о законѣ de Heen'a*), по которому произведеніе изъ коэффиціента расширенія α (напримѣръ при 15°Ц.) на температуру (абсолютную) кипѣнія T при давленіи одной атмосферы для различныхъ жидкостей гомологическаго ряда есть величина постоянная:

$$\alpha.T=\text{Const.},$$

а также и о законѣ Павлевскаго и Надеждина **), по которому разница между абсолютной критической температурой T_1 и температурой кипѣнія T при давленіи одной атмосферы для различныхъ жидкостей гомологическаго ряда есть также величина постоянная:

$$T_1-T=\text{Const.}$$

Припомнивъ однако то, на что раньше было обращено вниманіе, когда мы давали опредѣленіе такъ называемыхъ соотвѣтственныхъ состояній жидкостей, мы уже не будемъ въ состояніи признать за этими законами какого нибудь важнаго теоретическаго значенія. Они представляютъ собою лишь только болѣе или менѣе удачныя и интересныя

*) Essai de physique comparée. Bruxelles. 1883. p. 71.

**) См. разборъ этого закона и библіографическія указанія въ „Физическихъ изслѣдованіяхъ" Надеждина. Кіевъ. 1887. p. 80.

эмпирическія соотношенія, за которыми ни въ коемъ случаѣ нельзя признать характера какого нибудь общаго закона*), тѣмъ болѣе, что, какъ показалъ Bartoli**), законъ Павлевскаго и Надеждина является, такъ сказать, до нѣкоторой степени простою случайностью, потому что, если относить температуры кипѣнія не къ давленію одной атмосферы, а къ какому-нибудь другому давленію p, то величина избытка критической температуры надъ температурой кипѣнія (T_1-T) не будетъ уже болѣе отличаться для различныхъ жидкостей гомологическаго ряда тѣмъ-же самымъ постоянствомъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ.

Б. Голицынъ (Страсбургъ).

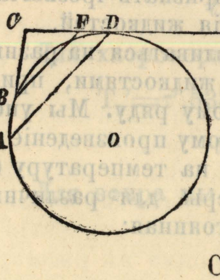
(*Продолженіе слѣдуетъ*).

КЪ ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНІИ ИРРАЦІОНАЛЬНЫХЪ ЧИСЕЛЪ π и $\sqrt{\pi}$.

(*Окончаніе*)***).

VI. Принимая радіусъ круга равнымъ единицѣ, откладываемъ хорду $AB=0,4$ (фиг. 14), на ея продолженіи $BC=0,7$, и, проведя изъ точки C касательную къ окружности, откладываемъ на ней $CE=3,7$. Пусть D точка касанія, соединяемъ A и D и проводимъ BF параллельно AD. EF есть приближенная величина π.

Фиг. 14.



Доказательство. Изъ подобныхъ по построенію треугольниковъ CBF и CAD имѣемъ

$$\frac{CF}{CD}=\frac{CB}{CA}, \quad \text{откуда} \quad CF=\frac{CB}{CA}.CD. \qquad (6)$$

Но

$$CB=0,7;\ CA=CB+BA=0,7+0,4=1,1 \text{ и } CD=\sqrt{AC.CB}=\sqrt{1,1\times0,7}=$$
$$=\sqrt{0,77}.$$

Подставляя всѣ эти величины въ равенство (6) имѣемъ

$$CF=\frac{0,7}{1,1}\sqrt{0,77}=\sqrt{\frac{343}{1100}}.$$

---

*) Что и признается совершенно самимъ Надеждинымъ.

**) N. Cimento. (3). 16. p. 74. 1885. Beibl. IX. p. 721.

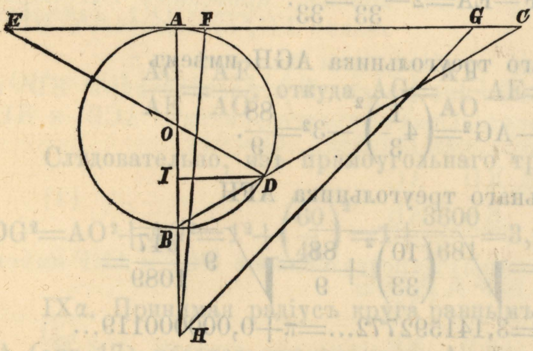
***) См. „Вѣстникъ" № 73.

Слѣдовательно,

$$FE=CE-CF=3,7-\sqrt{\frac{343}{1100}}=3,7-0,558406825\ldots=3,141593175\ldots=$$
$$=\pi+0,000000522\ldots$$

VII. Принимая радіусъ круга равнымъ единицѣ, проводимъ и продолжаемъ діаметръ AB (фиг. 15), касательную въ точкѣ A, откладываемъ на ней $AC=3\frac{1}{2}$ и соединяемъ C съ B. Пусть BC пересѣчетъ окружность въ D: проводимъ черезъ D и O прямую, которая пусть пересѣчетъ продолженіе касательной въ E и откладываемъ $EF=2$. Наконецъ, откладываемъ $AG=3$, изъ точки G радіусомъ

Фиг. 15.



$$GH=4\frac{1}{3}$$

описываемъ окружность, которая пусть пересѣчетъ продолженіе діаметра въ H и соединяемъ H и F. FH есть приближенная величина π.

Доказательство. Опустивъ изъ D перпедикуляръ DI на діаметръ, изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ EAO и IOD имѣемъ

$$\frac{EA}{AO}=\frac{ID}{OI}, \text{ откуда } EA=AO.\frac{ID}{OI}. \qquad (7)$$

Но $AO=1$; а для опредѣленія OI и ID имѣемъ слѣдующія соотношенія. Подобіе прямоугольныхъ треугольниковъ BID и BAC даетъ

$$\frac{ID}{BI}=\frac{AC}{AB}, \text{ откуда } ID=\frac{AC}{AB}\times BI$$

и, такъ какъ

$$AC=3\frac{1}{2},\ AB=2, \text{ то } ID=\frac{3\frac{1}{2}}{2}BI=\frac{7}{4}BI \text{ и } ID^2=\frac{49}{16}BI^2.$$

Но съ другой стороны $ID^2=AI.IB=(AB-IB)IB=(2-IB)IB$; такъ что сравненіе двухъ величинъ ID^2, по сокращеніи на IB, даетъ

$$\frac{49}{16}IB=2-IB, \text{ откуда } IB=\frac{32}{65}.$$

Слѣдовательно

$$OI=OB-IB=1-\frac{32}{65}=\frac{33}{65} \text{ и } ID=\frac{7}{4}IB=\frac{7}{4}.\frac{32}{65}=\frac{56}{65}.$$

Подставляя численныя величины AO, ID и OI въ равенство (7), имѣемъ

$$EA = 1 \times \frac{\frac{56}{65}}{\frac{33}{65}} = \frac{56}{33}.$$

И потому

$$AF = EF - EA = 2 - \frac{56}{33} = \frac{10}{33}.$$

Далѣе, изъ прямоугольнаго треугольника AGH имѣемъ

$$AH^2 = GH^2 - AG^2 = \left(4\frac{1}{3}\right)^2 - 3^2 = \frac{88}{9}.$$

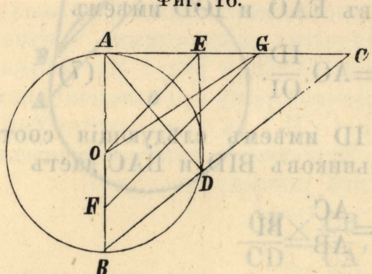
Такъ что изъ прямоугольнаго треугольника AFH

$$FH = \sqrt{AF^2 + AH^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{33}\right)^2 + \frac{88}{9}} = \sqrt{9\frac{947}{1089}} =$$

$$\sqrt{9{,}869605142332415\ldots} = 3{,}141592772\ldots = \pi + 0{,}000000119\ldots$$

VIII. Принимая радіусъ круга равнымъ единицѣ, проводимъ діаметръ AB (фиг. 16), касательную въ точкѣ A, откладываемъ на ней

Фиг. 16.



$AC = 2\frac{1}{2}$ и соединяемъ C и B. Пусть D будетъ точкой пересѣченія BC съ окружностью; опускаемъ изъ D перпендикуляръ DE на касательную, соединяемъ E съ O, откладываемъ $OF = \frac{1}{2}$, проводимъ FG параллельно OE и соединяемъ O и G. OG есть приближенная величина $\sqrt{\pi}$.

Доказательство. Соединивъ A и D, изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ AED и BAC имѣемъ

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{BC}.$$

А изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ ADB и BAC имѣемъ

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{BC}.$$

Перемножая полученныя пропорціи, имѣемъ

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB.AC}{BC^2} = \frac{AB.AC}{AB^2 + AC^2}, \text{откуда } AE = AC.\frac{AB^2}{AB^2 + AC^2}.$$

Но $AC=2\frac{1}{2}$; $AB=2$ и потому

$$AE=2\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{4+\frac{25}{4}}=\frac{40}{41}.$$

Далѣе изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ OAE и FAG выводимъ

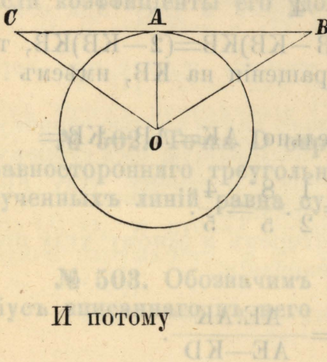
$$\frac{AG}{AE}=\frac{AF}{AO},\ \text{откуда}\ AG=\frac{AF}{AO}\cdot AE=\frac{1\frac{1}{2}}{1}\times\frac{40}{41}=\frac{60}{41}.$$

Слѣдовательно, изъ прямоугольнаго треугольника OAG

$$OG^2=AO^2+AG^2=1^2+\left(\frac{60}{41}\right)^2=1+\frac{3600}{1681}=3{,}1415824\ldots=\pi-0{,}0000102\ldots$$

IXα. Принимая радіусъ круга равнымъ единицѣ, проводимъ радіусъ OA (фиг. 17), касательную въ точку A, изъ центра O радіусомъ $OB=1\frac{5}{6}$ описываемъ окружность, которая пусть пересѣчетъ касательную въ B, откладываемъ $BC=3$ и соединяемъ O и C. OC есть приближенная величина $\sqrt{\pi}$.

Фиг. 17.



Доказательство. Изъ прямоугольнаго треугольника AOB имѣемъ

$$AB=\sqrt{OB^2-AO^2}=\sqrt{\left(1\frac{5}{6}\right)^2-1^2}=\frac{\sqrt{85}}{6}.$$

И потому

$$AC=BC-AB=3-\frac{\sqrt{85}}{6}.$$

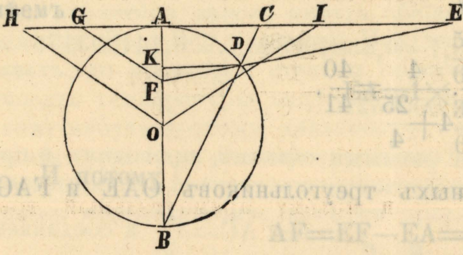
Слѣдовательно, изъ прямоугольнаго треугольника CAO имѣемъ

$$OC^2=AC^2+AO^2=\left(3-\frac{\sqrt{85}}{6}\right)^2+1^2=9-\sqrt{85}+\frac{85}{36}+1=12{,}3611111\ldots-$$

$$-9{,}2195445\ldots=3{,}1415666\ldots=\pi-0{,}0000260\ldots$$

IXβ. Принимая радіусъ круга равнымъ единицѣ, проводимъ діаметръ AB, (фиг. 18), касательную въ точкѣ A и, отложивъ $AC=1$, соединяемъ

Фиг. 18.



C и B. Пусть будетъ D точка пересѣченія BC съ окружностью: отложивъ CE=2, проводимъ черезъ E и D прямую, которая пусть пересѣчетъ діаметръ въ точкѣ F и изъ F радіусомъ FG=1 описываемъ окружность, которая пусть пересѣчетъ продолженіе касательной въ G. Наконецъ, проводимъ OH параллельно FG, откладываемъ HI=3 и соединяемъ I съ O. OI есть приближенная величина $\sqrt{\pi}$.

Доказательство. Опустивъ изъ точки D перпендикуляръ KD на діаметръ, изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ ACB и KDB имѣемъ

$$\frac{KD}{KB}=\frac{AC}{AB}. \qquad (1)$$

А изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ KDF и AEF имѣемъ

$$\frac{AE}{KD}=\frac{AF}{KF}. \qquad (2)$$

Изъ первой пропорціи имѣемъ

$$KD=\frac{AC}{AB}.KB=\frac{1}{2}KB \text{ и } KD^2=\frac{1}{4}KB^2.$$

Но какъ кромѣ того $KD^2=AK.KB=(AB-KB)KB=(2-KB)KB$, то по сравненіи двухъ выраженій KD^2 и по сокращеніи на KB, имѣемъ

$$\frac{1}{4}KB=2-KB, \text{ откуда } KB=\frac{8}{5} \text{ и слѣдовательно } AK=AB-KB=$$

$$=2-\frac{8}{5}=\frac{2}{5} \text{ и } KD=\frac{1}{2}KB=\frac{1}{2}.\frac{8}{5}=\frac{4}{5}.$$

Далѣе, пропорція (2) даетъ

$$\frac{AE}{KD}=\frac{AF}{AF-AK}, \text{ откуда } AF=\frac{AE.AK}{AE-KD}.$$

Подставляя сюда численныя значенія AE, AK и KD, имѣемъ

$$AF=\frac{3\times\frac{2}{5}}{3-\frac{4}{5}}=\frac{6}{11}.$$

Слѣдовательно, изъ прямоугольнаго треугольника AGF

$$AG=\sqrt{GF^2-AF^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{6}{11}\right)^2}=\frac{\sqrt{85}}{11}.$$

Изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ AGF и AHO

$$\frac{AH}{AG}=\frac{AO}{AF},\ \text{откуда}\ AH=\frac{AG}{AF}.AO=\frac{\frac{\sqrt{85}}{11}}{\frac{6}{11}}\times 1=\frac{\sqrt{85}}{6}.$$

Такъ что $AI=HI-AH=3-\frac{\sqrt{85}}{6}$; и потому прямоугольный треугольникъ AIO даетъ

$$OI^2=AO^2+AI^2=1^2+\left(3-\frac{\sqrt{85}}{6}\right)^2=1+9-\sqrt{85}+\frac{85}{36}=12{,}3611111\ldots-$$
$$-9{,}2195445\ldots=3{,}1415666\ldots=\pi-0{,}0000260\ldots$$

В. Полтавцевъ (Москва).

ЗАДАЧИ.

№ 501. Рѣшить уравненіе

$$2x^3+ax^2+bx+c=0,$$

если коэффиціенты его удовлетворяютъ условію:

$$54c=9ab-a^3.$$

(Заимств.) *Я. Тепляковъ.*

№ 502. Точка D окружности соединена съ вершинами вписаннаго равносторонняго треугольника ABC. Показать, что одна изъ трехъ полученныхъ линій равна суммѣ двухъ другихъ.

А. Воиновъ (Харьковъ).

№ 503. Обозначимъ высоты тетраэдра черезъ h_1, h_2, h_3, h_4 и радіусъ вписаннаго въ него шара черезъ r. Доказать, что

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{}+\frac{1}{h_4}.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 504. Доказать, что во всякомъ треугольникѣ ABC высота CD есть радикальная ось двухъ круговъ, описанныхъ на медіанахъ AA′ и BB′ какъ на діаметрахъ. (Заимств.) *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 505. Данъ кругъ O и прямая AB; требуется построить прямоугольникъ наибольшей площади такъ, чтобы его основаніе лежало на данной прямой AB, а двѣ другія вершины—на данной окружности O. (См. задачу № 446). *З. Колтовскій* (Харьковъ).

№ 506. Построить прямоугольный треугольникъ по данному катету (или данной гипотенузѣ, или по данной высотѣ, или по данной проекціи одного изъ катетовъ на гипотенузу), зная, что треугольникъ удовлетворяетъ условію не измѣнять своей площади, когда одинъ катетъ замѣнимъ суммой катетовъ, а другой—ихъ разностью (или условію не измѣнять своей площади, когда одинъ отрѣзокъ гипотенузы замѣнимъ суммою отрѣзковъ, а другой—ихъ разностью).

А. Гольденбергъ (Спб.)

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 358. Вывести тригонометрическія формулы, которыми надо пользоваться при рѣшеніи слѣдующихъ 12-и задачъ на вычисленіе элементовъ треугольника.

a) По двумъ сторонамъ и разности противоположныхъ угловъ найти углы.

b) По двумъ угламъ и разности двухъ сторонъ найти стороны.

c) По двумъ угламъ и суммѣ двухъ сторонъ найти стороны.

d) По основанію, суммѣ двухъ остальныхъ сторонъ и разности угловъ при основаніи найти уголъ при вершинѣ.

e) По основанію, суммѣ двухъ остальныхъ сторонъ и углу при вершинѣ найти углы при основаніи,

f) По двумъ угламъ и суммѣ двухъ сторонъ найти третью сторону.

g) По основанію, разности остальныхъ сторонъ и углу при основаніи найти углы.

h) По основанію, разности остальныхъ сторонъ и углу при вершинѣ найти углы.

i) По двумъ угламъ и разности двухъ сторонъ найти третью сторону.

k) По периметру и двумъ угламъ найти прилежащую имъ сторону.

l) По основанію, суммѣ остальныхъ сторонъ и одному углу при основаніи найти другой уголъ, прилежащій основанію.

m) По основанію, разности остальныхъ сторонъ и одному углу при основаніи найти другой уголъ, прилежащій основанію.

a) Отв. $$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{a+b}{a-b}\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}.$$

b) Отв. $$a+b=(a-b)\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{Ctg}\frac{A-B}{2}.$$

c) Отв. $$a-b=(a+b)\operatorname{Ctg}\frac{C}{2}.\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}.$$

d) Отв. $$\operatorname{Sin}\frac{C}{2}=\frac{c}{a+b}\operatorname{Cos}\frac{A-B}{2}.$$

e) Отв. $$\operatorname{Cos}\frac{A-B}{2}=\frac{a+b}{c}\operatorname{Sin}\frac{C}{2}.$$

f) Отв. $$c=(a+b)\frac{\mathrm{Sin}\frac{C}{2}}{\mathrm{Cos}\frac{A-B}{2}}.$$

g) Отв. $$\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\frac{\mathrm{Sin}(A-\varphi)}{\mathrm{Sin}A.\mathrm{Sin}\varphi},\ \text{гдѣ}\ \mathrm{Ctg}\varphi=\frac{b-a}{c.\mathrm{Sin}A}.$$

h) Отв. $$\mathrm{Sin}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{c}\mathrm{Cos}\frac{C}{2}.$$

i) Отв. $$c=(a-b)\frac{\mathrm{Cos}\frac{C}{2}}{\mathrm{Sin}\frac{A-B}{2}}.$$

k) Отв. $$a+b-c=(a+b+c)\mathrm{tg}\frac{A}{2}.\mathrm{tg}\frac{B}{2}.$$

l) Отв. $$\mathrm{tg}\frac{B}{2}=\frac{a+b-c}{a+b+c}\mathrm{Ctg}\frac{A}{2}.$$

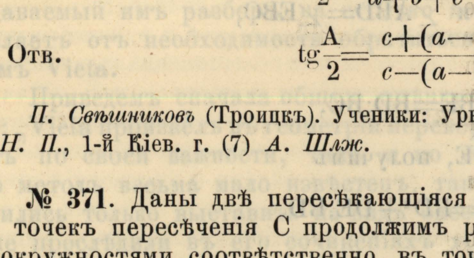
m) Отв. $$\mathrm{tg}\frac{A}{2}=\frac{c+(a-b)}{c-(a-b)}\mathrm{tg}\frac{B}{2}.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ). Ученики: Урюп. р. уч. (6) *П. У—ъ*, Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*, 1-й Кіев. г. (7) *А. Шлж.*

№ 371. Даны двѣ пересѣкающіяся окружности O и O_1; черезъ одну изъ точекъ пересѣченія C продолжимъ радіусы OC и O_1C до пересѣченія съ окружностями соотвѣтственно въ точкахъ A и B, проведемъ чрезъ ту-же точку C произвольную сѣкущую MN и продолжимъ радіусы OM и O_1N до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ K. Показать: 1) что точки A, B, O, O_1 и вторая точка пересѣченія окружностей C_1, находятся на одной окружности, и 2) что уголъ MKN имѣетъ постоянную величину ($=\angle OCO_1$).

1) Изъ равенства угловъ CBO_1, BCO_1, ACO и CAO слѣдуетъ, что A и B (фиг. 19.) суть двѣ точки, изъ которыхъ прямая OO_1 видна подъ однимъ и тѣмъ же угломъ. Поэтому точки A, B, O и O_1 лежатъ на одной окружности. Какъ видно изъ чертежа

Фиг. 19.



$$\angle OAO_1=180^\circ-\angle OCO_1.$$

Дуга окружности, расположенная по другую сторону OO_1 (относительно точки C) вмѣщаетъ уголъ$=\angle OCO_1$. Стало быть окружность пройдетъ чрезъ точки A, B, O, O_1 и C_1.

2) Сумма угловъ при точкѣ C на прямой MN будетъ

$$\angle MCO+\angle OCO_1+\angle NCO_1=\angle CMO+\angle CNO_1+\angle OCO_1=180^\circ,$$

слѣдовательно

$$\angle CMO+\angle CNO_1=180^\circ-\angle OCO_1 \text{ и } \angle MKN=\angle OCO_1;$$

геометрическимъ мѣстомъ точки K будетъ окружность, проходящая чрезъ A, B, O, O_1 и C_1.

С. Блажко (Москва). Ученики: Курск. г. (7) *С. Д.* и *А. П.*, Измаильск. прог. (6) *И. К.*, Ворон. к. к. (7) *А. П.*, 1-й Спб. г. (7) *А. К.*

№ 398. Показать, что произведенiе двухъ сторонъ треугольника равно квадрату биссектора образуемаго ими угла, сложенному съ произведенiемъ биссекторныхъ отрѣзковъ третьей стороны.

Пусть ABC есть данный треугольникъ. Описавъ около него окружность и продоливъ BD, равнодѣлящую угла B, до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ E, соединимъ E съ C прямою EC. Тогда треугольники ABD и BCE подобны, ибо

$$\angle A=\angle E \text{ и } \angle ABD=\angle EBC,$$

а потому

$$AB:BE=BD:BC,$$

замѣняя здѣсь BE чрезъ BD+DE, получимъ

$$AB.BC=BD^2+DE.BD.$$

Но изъ пропорцiи

$$BD:AD=DC:DE$$

имѣемъ

$$BD.DE=AD.DC,$$

слѣдовательно

$$AB.BC=BD^2+AD.DC.$$

С. Ржаницынъ и *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *П. Трипольскiй* (Полтава), *С. Кричевскiй* (Ромны), *С. Охлобыстинъ* (Ив.-Возн.). Ученики: Курск. г. (6) *В. Х.*, *К. П.*, *П. Ч.* и (7) *Н. К.*, *А. П.*, *Т. Ш.*, Ров. р. уч (5) *Х. Ш.*, Урюп. р. уч. (6) *П. У—ъ.*

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскiй.**

Дозволено цензурою. Кiевъ, 16 Октября 1889 г.
Типо-литографiя Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Сочиненія Н. М. ПРЖЕВАЛЬСКАГО:

I. УЖЕ ОБНАРОДОВАННЫЯ:

1) **Путешествіе въ Уссурійскомъ краѣ**
СЪ КАРТОЮ.
Издано на средства автора.
Цѣна 2 р. 25 к. С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1870.

2) **Монологія и страна Тангутовъ**
Трехлѣтнее путешествіе въ Восточной нагорной Азіи.
Томъ I съ 2-мя картами. Спб. 1875. Цѣна 3 р.
Томъ II съ 31 таблицами. Спб. 1876. Цѣна 10 р.
Изданіе И. Р. Г. Общ. (распродано).

3) **Отъ Кульджи за Тянь-Шань и на Лобъ-Норъ**
СЪ КАРТОЮ ЛОБЪ-НОРА.
С.-Петербургъ. 1878. Цѣна 75 к.
Изданіе И. Р. Г. О. (распродано).

4) **Третье путешествіе въ центральной Азіи**
Изъ Зайсана черезъ Хами въ Тибетъ и на верховья Желтой рѣки.
Съ 3 картами, 108 табл. рисунковъ и 10 политипажами.
Цѣна 7 руб. С.-Петербургъ. 1883.
Издано на средства ВЫСОЧАЙШЕ дарованныя.

5) **Четвертое путешествіе въ центральной Азіи**
Отъ Кяхты на истоки Желтой рѣки, изслѣдованіе сѣверной окраины Тибета и путь черезъ Лобъ-Норъ по бассейну Тарима.
Съ 3 картами, 29 фототипіями и 3 политипажами.
Цѣна 5 руб. С.-Петербургъ. 1888.
Издано на тредства ВЫСОЧАЙШЕ дарованныя.

II. НАХОДЯЩІЯСЯ ВЪ РАЗРАБОТКѢ:

имѣютъ быть изданы Имп. Р. Г. Общ. на средства ВЫСОЧАЙШЕ дарованныя:

А. Отдѣлъ Метеорологическій: Маршруты и метеорологическіе дневники (обработываются проф. А. И. Воейковымъ).

Б. Отдѣлъ Ботаническій: Т. I: Flora Tangutica. Т. II: Enumeratio plantarum hucusque e Mongolia notarum
(разрабатываются акад. К. И. Максимовичемъ).

Издаются Имп. Р. Г. Общ. на средства Государя Наслѣдника Цесаревича:

В. Отдѣлъ Зоологическій: Т. I: Млекопитающія (обр. Е. А. Бихнеромъ), Т. II: Птицы (обр. Ѳ. Д. Плеске), Т. III: Холодно-кровныя животныя: 1) Гады (обр. акад. А. А. Штраухомъ), 2) Рыбы (обр. С. М. Герценштейномъ).

Насѣкомыя, обр. разными лицами подъ общимъ наблюденіемъ вице-предсѣд. И. Р. Г. Общ. П. П. Семенова:

1) **Чешуекрылыя**—издаются на средства Е. И. Выс. Великаго Князя Николая Михайловича.

2) **Прочія семейства насѣкомыхъ**—издаются Русскимъ Энтомологическимъ Обществомъ.

КАТАЛОГЪ ИЗДАНІЙ РЕДАКЦІИ
„ВѢСТНИКА ОП. ФИЗИКИ и ЭЛЕМ. МАТЕМАТИКИ“.

№ кат.		Цѣна съ пер.
1)	Ортоцентрическій треугольникъ. *Н. Шимковича.* 1886 г.	— 15 к.
2)	Ученіе о логариѳмахъ въ нов. излож. *В. Морозова.* 1886 г.	— 15 „
3)	Выводъ формулы для разложенія въ рядъ логариѳмовъ. *Г. Флоринскаго* 1886 г.	— 15 „
4)	Комплектъ 12-ти №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ (сброшюр. въ книгу) за 1-ое полугодіе $188^6/_7$ учебн. года (I й семестръ)	2 р. 50 „
8)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ (сброшюр. въ книгу) за 2-ое полугодіе $188^6/_7$ учебн. года (II-й семестръ)	2 „ 50 „
9)	О землетрясеніяхъ. *Э. Шпачинскаго.* (въ пользу жителей города Вѣрнаго) 1887 г.	— 50 „
10)	Опредѣленіе теплоемкости тѣла по способу смѣшенія при постоянной температурѣ. Пр. *Н. Гезехуса* 1887 г.	— 5 „
11)	Простой способъ опредѣленія высоты плотныхъ кучевыхъ облаковъ *Г. Вульфа.* 1887 г.	— 5 „
12)	Формула простого маятника. Элем. геометрическій и точный выводъ ея. Пр. *Н. Слугинова.* 1887 г.	— 5 „
14)	Изъ исторіи ариѳметики. Умноженіе и дѣленіе. *І. Клейбера* 1888 г.	— 20 „
15)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ (сбошюр. въ книгу) за 1-ое полугодіе $188^7/_8$ учебн. года (III-й семестръ)	2 „ 50 „
16)	О формулѣ $P=MG$, съ прилож. 26 задачъ. Пр. *О. Хвольсона.* 1888 г.	— 20 „
17)	Объ обратныхъ изображеніяхъ на сѣтчатой оболочкѣ глаза. *О. Страуса.* 1888 г.	— 5 „
18)	Элементарная теорія гироскоповъ. Пр. *Н. Е. Жуковскаго* 1888 г.	— 20 „
19)	Измѣреніе угла встрѣчи свободной поверхности ртути съ поверхностью стекла. *Г. Вульфа.* 1888 г.	— 5 „
20)	Одинъ изъ видовъ метода подобія. *И. Александрова.* 1888 г.	— 5 „
21)	Рѣшеніе нѣкоторыхъ геометрическихъ вопросовъ изъ теоріи затменій. *І. Клейбера.* 1888 г.	— 20 „
22)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат. (сброшюр. въ книгу) за 2-ое полугодіе $188^7/_8$ учебн. года (IV-й семестръ)	2 „ 50 „
23)	Теорія теплоты *К. Максуэлля.* Переводъ *А. Л. Королькова.* 1888 г.	2 „ 40 „
24)	Абсолютная скала температуръ. *Н Шиллера.* 1888 г.	— 25 „
25)	О нѣкоторыхъ свойствахъ зажигательной кривой. *Г. Вульфа.* 1888 г.	— 20 „
27)	Теорія вѣтряныхъ двигателей. *Р. Штейнгеля.* 1889 г.	1 „ 40 „
28)	Методы рѣшеній ариѳмет. задачъ съ приложеніемъ 80 типичныхъ задачъ. *И. Александрова.* Изд. 3-е. 1889 г.	— 35 „
29)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ (сброшюр. въ книгу) за 2-ое полугодіе 1888 г. (V-й семестръ)	2 „ 50 „
30)	Практ. руководство къ изготовленію электрическихъ приборовъ. *С. Р. Боттона.* Пер. со 2-го англ. изд. *П. Прокшина.* 1889 г.	1 „ 40 „
31)	Ариѳметическія начала гармонизаціи. *В. Фабриціуса.* 1889 г.	— 5 „
32)	Что представляютъ собою деформаціонные токи „Брауна“? *П. Бахметьева.* 1889 г.	— 5 „
33)	Лучи электрической силы. *П. Бахметьева* 1889 г.	— 5 „
34)	О гальванопластикѣ. *Н. Успенскаго.* 1889 г.	— 10 „
35)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ (сброшюр. въ книгу) за 1-ое полугодіе 1889 г. (VI-й семестръ)	2 „ 50 „