Обложка
ищется

Обложка
пщется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 120.

X Сем. 15 Мая 1891 г. № 12.

КЪ ТЕОРІИ

maximum и minimum дроби $\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}$.

Пусть

$$\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}=y, \tag{1}$$

гдѣ коэффиціенты a, b, c, a_1, b_1, c_1 суть дѣйствительныя количества. Рѣшивъ уравненіе (1) относительно x, найдемъ, что

$$x=\frac{b_1y-b\pm\sqrt{\mathrm{A}y^2+\mathrm{B}y+\mathrm{C}}}{2(a-a_1y)}, \tag{2}$$

гдѣ

$$\mathrm{A}=b_1{}^2-4a_1c_1, \tag{3}$$

$$\mathrm{B}=4(ac_1+a_1c)-2bb_1, \tag{4}$$

$$\mathrm{C}=b^2-4ac. \tag{5}$$

Въ № 39 „Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат." на стр. 55—57 я показалъ, что

$$\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}=\frac{(\mathrm{D}^2+\mathrm{C}c_1{}^2-\mathrm{A}c^2)^2-4\mathrm{AD}^2c^2}{c^2c_1{}^2}, \tag{6}$$

гдѣ

$$\mathrm{D}=bc_1-b_1c. \tag{7}$$

Равенство (6) даетъ возможность опредѣлить условія, при которыхъ $B^2-4AC=0$, когда $A<0$ и ни одинъ изъ коэффиціентовъ a, b, c, a_1, b_1, c_1, не$=$ни 0 ни ∞.

Въ самомъ дѣлѣ, если $A<0$ и ни одинъ изъ коэффиціентовъ a, b, c, a_1, b_1, c_1 не$=$ни 0 ни ∞, то вторая часть равенства (6) только въ томъ случаѣ равна нулю, если одновременно

$$(D^2+Cc_1^2-Ac^2)^2=0 \quad \text{и} \quad 4AD^2c^2=0,$$

а это возможно только, если

$$D^2+Cc_1^2-Ac^2=0 \quad \text{и} \quad D=0,$$

или, что еще проще, если

$$Cc_1^2-Ac^2=0 \quad \text{и} \quad D=0$$

ибо, если $D=0$, то

$$D^2+Cc_1^2-Ac^2=Cc_1^2-Ac^2;$$

но на основаніи равенствъ (3) и (5)

$$Cc_1^2-Ac^2=(b^2-4ac)c_1^2-(b_1^2-4a_1c_1)c^2=b^2c_1^2-4acc_1^2-b_1^2c^2+4a_1c_1c^2=$$
$$=(b^2c_1^2-b_1^2c^2)-(4acc_1^2-4a_1c_1c^2)=(bc_1+b_1c)(bc_1-b_1c)-4cc_1(ac_1-a_1c)=$$
$$=(bc_1+b_1c)D-4cc_1(ac_1-a_1c).$$

Слѣдовательно условія (8) можно представить такъ:

$$(bc_1+b_1c)D-4cc_1(ac_1-a_1c)=0 \quad \text{и} \quad D=0,$$

или проще

$$4cc_1(ac_1-a_1c)=0 \quad \text{и} \quad D=0,$$

ибо, если

$$D=0,$$

то

$$(bc_1+b_1c)D-4cc_1(ac_1-a_1c)=-4cc_1(ac_1-a_1c).$$

Замѣчая же, что $4cc_1$ не$=$ни 0 ни ∞, и обращая вниманіе на равенство (7), условія (9) можно представить въ такомъ видѣ

$$ac_1-a_1c=0 \quad \text{и} \quad bc_1-b_1c=0$$

или

$$\frac{a}{a_1}=\frac{c}{c_1} \text{ и } \frac{b}{b_1}=\frac{c}{c}$$

или наконецъ

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}.$$

Это и будутъ искомыя условія.

Итакъ, если $A<0$ и ни одинъ изъ коэффиціентовъ a, b, c, a_1, b_1, c_1 не$=$ни 0 ни ∞, то

$$B^2-4AC=0$$

только въ томъ случаѣ, если

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}. \tag{10}$$

Слѣдовательно равенства (10) при $A<0$ представляютъ необходимыя условія, но очевидно, что тѣ-же равенства представятъ вполнѣ достаточныя, хотя и не необходимыя условія, чтобы B^2-4AC было$=0$, когда $A>0$ или$=0$ и ни одинъ изъ коэффиціентовъ a, b, c, a_1, b_1, c_1 не$=$ни 0 ни ∞.

Положимъ же, что

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k,$$

откуда

$$a=a_1k, \quad b=b_1k, \quad c=c_1k; \tag{11}$$

въ такомъ случаѣ $B^2-4AC=0$, каково бы ни было A, и, рѣшая уравненіе

$$Ay^2+By+C=0,$$

получимъ

$$y=-\frac{B}{2A}=-\frac{4(ac_1+a_1c)-2bb_1}{2(b_1{}^2-4a_1c_1)}=\frac{bb_1-2(ac_1+a_1c)}{b_1{}^2-4a_1c_1}.$$

Подставляя сюда вмѣсто a, b, c ихъ значенія изъ равенствъ (11), получимъ, что

$$y=k.$$

Подставляя въ равенство (1) вмѣсто a, b, c ихъ значенія изъ равенствъ (11), получимъ опять

$$y=k,$$

что и слѣдовало ожидать.

Подставляя k вмѣсто y въ равенство (2) и замѣчая, что

$$Ak^2+Bk+C=0,$$

$$b_1k-b=0,\quad a-a_1k=0,$$

получимъ для x неопредѣленное выраженіе

$$x=\frac{0}{0}.$$

Къ тѣмъ же результатамъ приходятъ Бріо и Буке *) на основаніи другихъ соображеній. *С. Гирманъ* (Препод. Варш. р. уч.).

ПОГРѢШНОСТЬ ПРИ ВЫЧИСЛЕНІИ

π по способу периметровъ.

Если $2p$ обозначаетъ периметръ правильнаго n-угольника, вписаннаго въ окружность единичнаго радіуса, то, какъ извѣстно, имѣетъ мѣсто слѣдующее приблизительное равенство:

$$\pi=p.$$

Вопросъ заключается въ томъ, чтобы опредѣлить точность этого приближенія.

Съ этою цѣлью обозначимъ черезъ 2P периметръ описаннаго n-угольника, черезъ C окружность, черезъ r апоѳему вписаннаго многоугольника и черезъ $2a$ его сторону.

При этихъ обозначеніяхъ:

$$\frac{P}{p}=\frac{1}{r}.$$

Слѣдовательно:

$$P-p=P(1-r)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Найдемъ теперь высшіе предѣлы P и $1-r$.

---

*) Журн. Элем. Мат.: т. II, № 11, стран. 253—256.

P можно считать меньшимъ полупериметра описаннаго квадрата, т. е.

$$P < 4.$$

Изъ треугольника, образованнаго сторонами 1, a, r слѣдуетъ, что:

$$1 - r^2 = a^2.$$

Отсюда

$$1 - r = \frac{a^2}{1 + r} < a^2.$$

Такъ какъ сторона правильнаго вписаннаго n-угольника меньше n-ой части окружности, а послѣдняя, въ свою очередь, меньше периметра описаннаго около нея квадрата, то:

$$a < \frac{C}{2n} < \frac{8}{2n},$$

или:

$$a < \frac{4}{n}.$$

Поэтому:

$$1 - r < \frac{16}{n^2}.$$

Подставляя во 2-ую часть формулы 1-ой вмѣсто P и $1-r$ найденные выше предѣлы, получимъ:

$$P - p < \frac{64}{n^2},$$

а такъ какъ:

$$\pi - p < P - p,$$

то:

$$\pi - p < \left(\frac{8}{n}\right)^2.$$

При помощи найденной формулы (и ей подобныхъ) всѣ вычисленія, относящіяся къ опредѣленію π по способу периметровъ, на половину сокращаются, ибо устраняется необходимость находить периметры описанныхъ многоугольниковъ *). *М. Попруженко* (Оренбургъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Перспектографъ. На архетектурной выставкѣ, бывшей въ 1890 г. въ Туринѣ, приборъ этотъ, изобрѣтенный инженеромъ *П. Фіорини*, обращалъ на себя вниманіе и былъ удостоенъ награды золотой медалью. Перспектографъ представляетъ собою остроумное механическое приспособленіе, позволяющее получить непосредственно перспективный чертежъ предмета по двумъ его даннымъ проекціямъ: горизонтальной и вертикальной; при этомъ точку зрѣнія и плоскость центральной проекціи можно измѣнять по желанію, въ предѣлахъ, допускаемыхъ размѣрами прибора.

Изъ прежнихъ перспектографовъ, наиболѣе извѣстны были слѣдующіе: 1) Приборъ *А. Брикса* для черченія въ перспективѣ геометрическихъ фигуръ **), 2) Приборъ *Г. Риттера* изъ Франкфурта ***) и 3) приборъ *Г. Ганка* ****). Всѣ они по сложности своей конструкціи и неудобствамъ манипуляцій не выдерживаютъ никакого сравненія съ перспектографомъ Фіорини, который настолько-же простъ какъ и удобенъ для практики. Примѣненіе его можетъ оказаться удобнымъ для инженеровъ, архитекторовъ, механиковъ, живописцевъ и пр. и даже при обученіи рисованія *****).

Цѣна этого перспектинографа, изготовляемаго пока самымъ изобрѣтателемъ, 350 франковъ; обращаться надо непосредственно къ инженеру Фіорини по адресу: г. Туринъ (via dei Mille № 9). Читатели, заинтересованные этимъ приборомъ, могутъ найти болѣе подробное его описаніе въ статьѣ г. *Кржижановскаго* въ послѣднемъ (№ 5) выпускѣ польскаго журнала „Przegląd Techniczny" за текущій 1891 годъ.

---

*) Конечно, подобныя формулы были давно извѣстны, однако я не нашелъ ихъ въ имѣющихся у меня подъ руками книгахъ. Мой товарищъ Ф. П. В. въ 1884 г. сообщилъ мнѣ слѣдующую формулу:

$$C-2p<\frac{32}{n^2-8}d \ (d\text{—діам. окружности}).$$

Выводъ ея, кажется, былъ основанъ на началахъ подобныхъ тѣмъ, которыя развиты въ этой замѣткѣ.

**) Instrument zum Aufzeichnen perspectivischer Bilder von geometrischen Figuren. Patenschrift № 27646.

***) Instrument zur mechanischen Herstellung perspectivischer Bilder aus geometrischen Figuren etc. Patentschrift № 29002.

****) „Mein perspectivischer Apparat" von Guido Hanck. Separatabdr. aus der Festschrift der königlichen Technischen Hochschule zu Berlin. 1884.

*****) Министерство Народнаго Просвѣщенія въ Италіи пріобрѣло на выставкѣ этотъ приборъ съ такою именно цѣлью.

♦ **Новая термоэлектрическая батарея** Гюльхера, которая вѣроятно будетъ установлена на предстоящей электрической выставкѣ во Франкфуртѣ, тѣмъ отличается отъ всѣхъ прочихъ, что ея элементы имѣютъ видъ и назначеніе газовыхъ горѣлокъ, съ отверстіемъ въ самомъ мѣстѣ спая 50 такихъ элементовъ, соединенныхъ послѣдовательно, даютъ токъ въ 3,9 вольта при внутр. сопротивленіи въ 0,48 ома, и потребляютъ 250 литровъ газа въ 1 часъ.—(„Электричество“ № 8, 1891).

♦ **Новый сплавъ для аккумуляторовъ.** Вормсъ (въ Англіи) предложилъ слѣдующій сплавъ для приготовленія электродовъ аккумуляторовъ: 94,5 свинца, 2,2 сюрьмы и 1,3 ртути; сначала расплавляютъ свинецъ и прибавляютъ сюрьму, ртуть же приливаютъ передъ самымъ выливаніемъ въ формы. Сплавъ этотъ отличается черезвычайною ковкостью и неизмѣняемостью отъ дѣйствія кислотъ. („Электричество“ № 8, 1891).

♦ **Новое свойствъ сплавовъ** подмѣтилъ В. Галлокъ. Смѣсь въ видѣ тонкихъ опилокъ 1 ч. кадмія, 1 ч. олова, 2 ч. свинца и 4 ч. висмута, спрессованную въ стекляной трубкѣ, онъ помѣщалъ въ кипящую воду; послѣ 18-часового нагрѣванія опилки начали сплавляться; послѣ встряхиванія, трубка была погружена въ кипящую воду еще на 2 часа, послѣ чего получился шарикъ однороднаго сплава Вуда, который плавится при 70°(С). Такимъ образомъ при температурѣ кипѣнія воды (100°С) можно получить сплавъ изъ кадмія, олова, свинца и висмута, не смотря на то, что кадмій плавится лишь при 315°, олово—при 230°, свинецъ—при 325° и висмутъ—при 267°. Интересенъ еще слѣдующій опытъ Галлока: два куска натрія и калія свѣже срѣзанными своими поверхностями прикладываются другъ къ другу и слабо нажимаются (при обыкновенной комнатной температуѣ). По истеченіи нѣсколькихъ секундъ на краяхъ поверхности соприкосновенія выступаютъ капельки жидкаго сплава калія и натрія, похожаго по внѣшнему виду на ртуть. Этотъ сплавъ плавится при 6°С; онъ образуется въ этомъ опытѣ при комнатной температурѣ, не смотря на то, что калій плавится при 62,5°, а натрій—при 95,6°. (Chem. Ztg.). *Ш.*

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

„Извѣстія Физико-Матсматическаго Общества при Имп. Казанскомъ Университстѣ“. (Серія вторая*); отъ 4-хъ до 6-и выпусковъ въ годъ, подп. цѣна 3 р. въ годъ, для членовъ Каз. Физ.-Мат. Общества, уплачивающихъ ежегодно 3 р. членскаго взноса,—безплатно). О преобразованіи бывшей при Каз. Общ. Естеств. Секціи Физ.-Мат. наукъ въ особое Физ.-Мат. Общество и о намѣреніи издавать свой спеціальный органъ, было сообщено въ № 105 „Вѣстника“ (стр. 175 сем. IX); программа предполагавшихся тогда „Извѣстій“ тоже была напечатана въ

*) Первую серію „Извѣстій“ составляютъ 8 томовъ собранія протоколовъ засѣданій бывшей Секціи Физ.-Мат. наукъ Общества Естеств. при Имп. Казанскомъ Университетѣ. (Цѣна 1-го тома 2 р., 2-го тома—1 р. 75 к., и остальныхъ томовъ—по 1 р. 50 к.).

„Вѣстникѣ" (№ 104) въ одномъ изъ протоколовъ засѣданій (стр. 155, сем. IX). Теперь отмѣчаемъ выпускъ перваго № „Извѣстій", разосланнаго на дняхъ. Въ этотъ № вошли: 1) „Изъ исторіи философіи понятія о цѣломъ положительномъ числѣ" (рѣчь, произнесенная *А. В. Васильевымъ* 28 окт. 1890 г. при открытіи Физ.-Мат. Общества), 2) „Къ вопросу о распространеніи теплоты въ текущей жидкости путемъ теплопроводности и конвекціи" *Г. Шебуева*, 3) „Объ интегрированіи посредствомъ эллиптическихъ функцій" *И. Долбня*, 4) „Наблюденіе съ Казанской обсерваторіи метеорнаго потока „персеидъ" 10-го августа 1890 года" *Я. Корнухъ-Троцкаго*, 5) Уставъ Физ.-Мат. Общества при Имп. Каз. Ун., 6) Списокъ членовъ Общества, 7) Протоколы 5-и очер. засѣданій Общества*), 8) Списокъ книгъ, поступившихъ въ библіотеку Общества и 9) Библіогр. отзывъ о „Сборникѣ упражненій въ умственномъ счетѣ Н. Бобровникова" *Ѳ. Суворова*.—Хотя въ программу „Извѣстій" входятъ также „задачи и вопросы" и рѣшенія таковыхъ, но въ № 1 никакихъ задачъ по математикѣ нѣтъ.

Такъ какъ, по нашему предположенію статья проф. А. В. Васильева для большинства читателей „Вѣстника" представляетъ наибольшій интересъ, то мы позволяемъ себѣ изложить здѣсь довольно подробно ея содержаніе.

ИЗЪ ИСТОРІИ ФИЛОСОФІИ ПОНЯТІЯ
о цѣломъ положительномъ числѣ.

Область физ.-мат. наукъ постепенно расширяется. Уже давно стало достояніемъ исторіи средневѣковое „quadrivium", состоявшее изъ ариѳметики, геометріи, астрономіи и музыки. За созданіемъ аналитической механики послѣдовало созданіе математической физики. На очереди стоитъ приложеніе математики къ химіи, физіологіи, психологіи и логикѣ. Матем. методъ является необходимымъ орудіемъ и въ области наукъ общественныхъ (статистика, политическая экономія). Причина, почему человѣческій духъ можетъ стремиться и надѣяться подчинить матем. методу всѣ вопросы человѣческаго знанія, заключается въ томъ первостепенномъ значеніи, какое имѣетъ во всякомъ точномъ знаніи понятіе о числѣ. Только численно выражающіеся законы природы могутъ привести насъ къ полному объясненію (?) и предсказанію явленій, къ этой конечной цѣли всякаго познанія—мысль, которую Кантъ выразилъ словами: „въ каждомъ знаніи заключается только на столько науки, на сколько въ немъ математики".

Невозможно прослѣдить по непосредственнымъ источникамъ генезисъ понятія о числѣ. Древнѣйшій изъ дошедшихъ до насъ письменныхъ памятниковъ, папирусъ писца Аамеса (за 1700 л. до Р. Х. **) свидѣтельствуетъ, что Египтяне въ то время уже были знакомы съ дѣйствіями не только надъ цѣлыми числами, но и надъ дробями. За неимѣніемъ непосредственныхъ свидѣтельствъ приходится обратиться къ косвеннымъ (этнологія, изученіе развитія дѣтей, народныхъ преданій, языкознаніе).

Понятію о числѣ отвлеченномъ всегда предшествовало и сначала съ нимъ тѣсно сливалось понятіе о числѣ какихъ нибудь опредѣленныхъ предметовъ, большею частью органовъ человѣка, служившихъ ему пособіемъ при счетѣ. При помощи данныхъ лингвистики, мы можемъ въ дали вѣковъ видѣть тѣ этапы, на которыхъ останавливалась психологическая работа человѣчества, чтобы привести насъ нако-

*) См. „Вѣстникъ" № 104 (стр. 154—156 сем. IX) и № 112 (стр. 76—78; сем. X).

**) Такъ называемый „папирусъ Ринда", по мнѣнію историковъ, есть лишь копія, снятая писцомъ Аахмесомъ, съ подлинника, составленіе котораго относятъ приблизительно къ 3000 г. до Р. Х.

нецъ къ понятію о безконечномъ рядѣ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, исходя изъ которыхъ математика, расширяя послѣдовательно понятіе о числѣ, достигла до понятія о комплексномъ числѣ, введеніе котораго составляетъ характеристическую черту математики XIX столѣтія.

Свидѣтельства путешественниковъ и этнологовъ указываютъ на то, что и теперь еще существуютъ народы, у которыхъ нѣтъ особыхъ названій для чиселъ большихъ трехъ. Эскимосы (по словамъ Парри) не могутъ правильно сосчитать своихъ дѣтей, если ихъ больше трехъ; не общее число своихъ собакъ держитъ въ памяти эскимосъ, но отдѣльныя представленія о каждой изъ нихъ порознь. На той-же стадіи умственнаго развитія находятся также ботокуды Бразиліи и папуасы Новой Голландіи.—Что и для арійской расы было время, когда понятіе о числѣ не представлялось съ достаточной отчетливостью, это видно изъ многихъ преданій о тѣхъ благодѣтеляхъ человѣчества, которые изобрѣли счетъ и числа (у грековъ, напр., то Паламедъ, то Прометей).—Существованіе во многихъ языкахъ единственнаго, двойственнаго и множественнаго чиселъ указываетъ, повидимому, на ту пройденную ступень развитія, при которой ясно различались понятія объ одномъ предметѣ и о двухъ предметахъ, но, начиная съ трехъ, такое различіе прекращается и является только одно понятіе о множествѣ. Есть данныя, указывающія и на слѣдующую ступень развитія, на которой явились отдѣльныя названія для трехъ и четырехъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ эти числа, являясь крайними предѣлами чиселъ, имѣвшихъ названіе, служили символами множества, громадности (напр. изрѣченіе Овидія: „terque quaterque beati“, изображеніе въ египетск. іероглифахъ множества четырьмя чертами, китайское названіе „четыре моря“ вмѣсто всѣхъ морей). Не лишенъ значенія и тотъ фактъ, что во многихъ языкахъ первыя три числительныя измѣняются по родамъ (два, двѣ, tres, tria), а всѣ прочія не измѣняются. Корни первыхъ трехъ числительныхъ общіе народамъ арійской и семитской расъ, между между тѣмъ какъ сходство пропадаетъ для дальнѣйшихъ числительныхъ, что доказываетъ, что названія послѣднихъ возникли въ ту сравнительно недавнюю эпоху, когда арійскіе и семитскіе народы покинули свою общую прародину.—Если названіе *два* произошло у разныхъ народовъ отъ названій парныхъ органовъ (напр. у китайцевъ—ny (уши), въ Тибетѣ—patscha (крыло), у Готтентотовъ—t'koam (рука), то выработка дальнѣйшихъ названій для чиселъ находится въ связи со счетомъ по пальцамъ (напр. у зулусовъ—tatisitupa (шесть) значитъ взять большой палецъ руки, въ Гренландіи, въ долинѣ Ориноко, въ Австраліи—шесть значитъ: одинъ съ другой руки, десять—двѣ руки, одинадцать—двѣ руки и палецъ, двадцать—человѣкъ; у эскимосовъ береговъ Гудзонова залива названія для 8, 9 и 10-и совпадаютъ съ названіями средняго, четвертаго и малаго пальцевъ: у Таманаковъ съ Ориноко 21—значитъ одинъ съ руки другого человѣка; у нѣкоторыхъ народовъ Южной Африки счетъ чиселъ и теперь производится съ помощью двухъ, трехъ человѣкъ, при чемъ пальцы одного соотвѣтствуютъ единицамъ, пальцы другого—десяткамъ, пальцы третьяго—сотнямъ). Въ языкахъ арійской расы только корень числительнаго *пять* (penta) тождественъ со корнемъ санскритскаго *pankam* или персидскаго *penjeh*, что значитъ „распростертая рука“.

Область чиселъ въ позднѣйшихъ стадіяхъ развитія развивалась, хотя и быстрѣе, но постепенно: то тѣ, то другія все большія и большія числа являлись предѣлами чиселъ съ опредѣленными названіями. Если напр. въ извѣстное время число 12 считалось символомъ множества, синонимомъ полноты, то слѣдующее за нимъ 13 являлось лишнимъ и могло поэтому считаться нечестивымъ, приносящимъ несчастіе—суевѣріе, сохранившееся и до нашихъ дней. Въ тюркскихъ легендахъ, въ скиѳскихъ сагахъ синонимомъ неопредѣленнаго множества является или 40, или *сорокъ сороковъ* (отсюда это проникло и къ намъ). Еще большій культурно-историческій интересъ связанъ съ числомъ 60, которое такъ часто фигурируетъ въ преданіяхъ вавилонскихъ, персидскихъ и греческихъ. (У древнихъ халдеевъ это число впослѣдствіи явилось основаніемъ системы счисленія, слѣды которой сохранились и у насъ въ дѣленіи времени и угловъ *). Число вавилонскихъ боговъ—было 60 **), вышина золотого идола въ храмѣ Навуходоносора—была равна 60 локтямъ. Позднѣе то-же значеніе несчетнаго множества имѣли числа кратныя 60-и. (Ксерксъ далъ Геллеспонту 300 ударовъ, Киръ раздробилъ рѣку Гиндесъ, въ которой утонула его любимая лошадь, на 360 ручьевъ; въ одной персидской пѣснѣ перечисляется 360 полезныхъ употребленій пальмы).—Вавилонъ представляется намъ родиною гаданій, основанныхъ на числахъ, родиною различныхъ числовыхъ суевѣрій, которыя имѣли обширное вліяніе съ одной стороны на Китай, съ другой—на идеи Пиѳагорейцевъ, придававшихъ числамъ особое мистическое значеніе ***).

По мѣрѣ развитія десятичной системы счисленія ея единицы различныхъ разрядовъ являлись символами множества. Въ церковно-славянскомъ языкѣ *тьма* означаетъ или 1000 или 10000. Но существовало еще и „великое словенское число“, употреблявшееся „коли прилучался великій счетъ и перечень“; въ этомъ счетѣ: *тьма* означаетъ уже тысячу тысячъ, далѣе идутъ: *легіонъ*—тьма темъ, *леодръ*—легіонъ легіоновъ и *воронъ*—леодръ леодровъ (10^{48}). „И долѣе сего—говорится въ славянскихъ рукописяхъ—нѣсть человѣку разумѣвати“. Въ одной рукописи XVII ст. счетъ доведенъ дальше, а именно до детяти вороновъ или *колоды* (10^{49}) и затѣмъ прибавлено: „сего числа нѣсть больше“.

Но наибольшимъ пристрастіемъ къ большимъ числамъ отличались древніе индусы; имъ принадлежитъ честь поразительнаго развитія искусства счета какъ имъ-же человѣчество обязано ариѳметикой положенія. Сочиненіе Архимеда: „Псаммитъ или исчисленіе песку въ пространствѣ равномъ шару неподвижныхъ звѣздъ“ ****) написано, вѣроятно, подъ индійскимъ вліяніемъ; оно написано съ цѣлью доказать, что не трудно составить себѣ понятіе о числахъ большихъ вышеуказаннаго числа песчинокъ. Архимедъ доходитъ въ немъ до числа съ 80000 билліоновъ нулей (т. е. до $10^8.10^{16}$) и показываетъ, что число песчинокъ въ шарѣ неподвижныхъ звѣздъ (размѣры котораго онъ вычисляетъ на основаніи предположеній современныхъ ему астрономовъ) меньше 10^{63}. Въ Псаммитѣ Архимедъ развилъ понятіе о безконечно большомъ подобно тому какъ въ своихъ сочиненіяхъ о квадратурѣ параболы, объ измѣреніи круга онъ касался понятія о безконечно-маломъ, лежащемъ въ основаніи современнаго анализа.

Псаммитъ Архимеда ввелъ въ науку понятіе о безконечно-продолжающемся рядѣ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ. Многотрудная работа человѣческаго духа была окончена. Рядъ цѣлыхъ полож. чиселъ, безконечно продолжающихся, предметъ благоговѣйнаго удивленія для индусовъ и таинственнаго толкованія для мудрецовъ Вавилона и Пиѳагорейцевъ, явился могущественнымъ орудіемъ для познанія природы. Исходя изъ него, чистая математика строитъ понятіе о дробномъ, отрицательномъ, несоизмѣримомъ, комплексномъ числѣ, и это обобщенное понятіе о

---

*) Во многихъ губерніяхъ у насъ сохранился счетъ на *копы*, т. е. на 60.

**) Отсюда, вѣроятно, произошло у халдеевъ дѣленіе сутокъ на 60 частей.

***) Вопросу о числовой мистикѣ посвящена особая статья проф. А. В. Васильева: „О числовыхъ суевѣріяхъ“. Казань 1885.

****) Русскій переводъ этого сочиненія изданъ въ 1824 г. Ѳ. Петрушевскимъ.

числѣ составляетъ единственный объектъ чистой математики, которая можетъ поэтому быть названа „ариѳметикою“.—„Ариѳметика—говоритъ Гауссъ—стоитъ въ томъ же отношеніи къ математикѣ (включая въ нее геометрію и механику), въ какомъ послѣдняя стоитъ къ изученію природы. Математика есть царица естествознанія и ариѳметика есть царица математики“.

Но громаднымъ успѣхамъ въ области приложеній понятій о числѣ не вполнѣ соотвѣтствовали успѣхи въ области логики и психологіи этого понятія. Болѣе посчастливилось въ этомъ отношеніи понятію о пространствѣ и аксіомамъ геометріи.

Вопросъ о происхожденіи геом. аксіомъ (1) величины, совмѣщающіяся при наложеніи, равны между собою, 2) двѣ прямыя не могутъ заключать пространства, и 3) перпендикуляръ и наклонная при достат. продолженіи встрѣчаются (11-ая акс. Эвклида), ставшій спорнымъ, заключается въ томъ, суть ли эти аксіомы происхожденія опытнаго, или же истинность ихъ усматривается à priori, въ силу свойствъ нашего духа, съ первой минуты, какъ понимается смыслъ предложенія. Перваго мнѣнія придерживались философы эмпирической или номиналистической школы (какъ: Гоббсъ, Локкъ, Беркли, Юмъ, Дж. Ст. Милль, Гельмгольцъ), второго—идеалистическая школа философовъ (какъ: Декартъ, Лейбницъ, Кантъ, Уэвелль и др.). Вѣское значеніе въ этомъ спорѣ имѣютъ работы Германа Гельмгольца, который, признавая вмѣстѣ съ Кантомъ пространство за трансцендентальную форму нашего созерцанія, утверждаетъ опытное происхожденіе геом. аксіомъ.

Менѣе посчастливилось понятію о цѣломъ полож. числѣ и объ аксіомахъ, лежащихъ въ основѣ науки о числахъ. „Какъ мачиха обходится Кантъ съ ариѳметикой“—говоритъ Михаэлисъ въ брошюрѣ, посвященной этому вопросу *). Дѣйствительно у Канта не находится опредѣленнаго выработаннаго понятія на ариѳметику и ея основныя понятія. Всего чаще онъ ставитъ понятіе о числѣ въ связи съ понятіемъ о времени. Такого взгляда придерживались также Уэвелль (авторъ „Исторіи индуктивныхъ наукъ“) и Гамильтонъ, издавшій сочиненіе подъ заглавіемъ: „Алгебра или наука о чистомъ времени“.

Въ „Логикѣ“ Милля, одного изъ выдающихся противниковъ Канта, мы имѣемъ развитіе и доказательство той мысли, что понятіе о числѣ и основныя теоремы ариѳметики и алгебры основываются на опытѣ; но Милль не даетъ подробнаго анализа аксіомъ ариѳметики, не сводитъ ихъ къ возможно меньшему числу. Эта задача была рѣшена математиками, показавшими, что въ основаніи ариѳметики могутъ быть положены слѣдующія 5 аксіомъ:

1) Если двѣ величины равны третьей, онѣ равны между собою;
2) Равное, приданное къ равному, даетъ равное;
3) Равное, приданное къ неравному, даетъ неравное;
4) Законъ ассоціативности сложенія: $a+(b+c)=(a+b)+c$;
5) Законъ коммутативности сложенія: $a+b=b+a$.

Братья Грассманы показали, что двѣ послѣднія аксіомы составляютъ логическое слѣдствіе одной, выражающейся равенствомъ:

$$(a+b)+1=a+(b+1).$$

Гельмгольцъ въ статьѣ „Счетъ и измѣреніе“ **) слѣдующимъ образомъ выяснилъ психологическія основанія аксіомъ ариѳметики. Для счета предметовъ необходимъ

*) Michaelis. Ueber Kants Zahlbegriff. Berlin, 1884.
**) Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem 50—jährigen Doctor Jubiläum gewidmet. Leipzig 1887. (Сборникъ).

рядъ значковъ, произвольно избранныхъ, но для которыхъ должна быть строго и неизмѣнно опредѣлена извѣстная послѣдовательность; при счетѣ предметовъ мы сравниваемъ ихъ рядъ съ рядомъ нашихъ значковъ. Значками нормальнаго ряда могутъ быть матеріальные предметы, взятые въ опредѣленной послѣдовательности какъ напр. пальцы или камешки (calculi—calculare, считать); при дальнѣйшемъ развитіи человѣчества такимъ рядомъ значковъ является рядъ чиселъ. Такъ какъ во всякомъ нормальномъ рядѣ, служащемъ для счета, преимущественное значеніе имѣетъ строго опредѣленная послѣдовательность, то каждое число опредѣляется своимъ положеніемъ въ разъ на всегда выбранномъ нормальномъ рядѣ. Значекъ *единица* мы приписываемъ тому члену ряда, съ котораго начинаемъ. *Два* есть число, которое слѣдуетъ непосредственно за единицею; *три* есть число, которое слѣдуетъ непосредственно за двумя и т. д. Если какое нибудь число обозначается a то число, непосредственно слѣдующее за нимъ въ нормальномъ ряду, обозначается $a+1$; $a+b$ обозначаетъ то число нормальнаго ряда, которое получается при счетѣ до b, если при числѣ $a+1$ считать *единица*, при числѣ $a+2$ считать *два* и т. д. Изъ сопоставленія этихъ обозначеній вытекаетъ Грассмановская аксіома: $(a+b)+1=a+(b+1)$, а слѣдовательно и законы ассоціативности и коммутативности. Анализъ понятія о нормальномъ рядѣ приводитъ также къ прочимъ аксіомамъ ариѳметики. Наконецъ понятіе о рядѣ чиселъ и ихъ сложеніи, выведенное изъ разсматриванія ряда чиселъ, какъ нормальнаго ряда значковъ, совпадаетъ съ тѣми, которыя получаются при опредѣленіи численности предметовъ и соединеніи двухъ или большаго числа группъ предметовъ въ одну; но тотъ же анализъ указываетъ, что внѣшніе предметы должны удовлетворять извѣстнымъ условіямъ для того, чтобы они могли быть пересчитываемы. Они не должны пропадать, не должны сливаться одинъ съ другимъ, не могутъ дѣлиться на два или болѣе во время пересчитыванія и къ нимъ не могутъ прибавляться во время этой операціи новые предметы. Поэтому только опытъ можетъ указать на возможность примѣненія къ данному ряду предметовъ ариѳметическихъ аксіомъ и слѣдовательно сами эти аксіомы не могутъ имѣть того трансцендентальнаго, независимаго отъ опыта значенія, какое имъ приписывалъ Кантъ.

Зависимое отъ опыта происхожденіе понятія о цѣломъ числѣ и связанныхъ съ нимъ аксіомъ подтверждается вмѣстѣ съ тѣмъ и вышеприведенными данными изъ исторіи числа.

Разработка философіи математическихъ понятій представляетъ особенную важность для педагогіи математики; только стройная система знаній, въ которой рѣзко отдѣлены аксіомы и постулатумы отъ теоремъ, можетъ имѣть серьезное педагогическое значеніе. Она также не можетъ не имѣть громаднаго значенія для философіи; даже сама исторія понятія о числѣ представляетъ много поучительнаго для философа. Изученіе какъ философіи математики, такъ и самой математики является лучшею и необходимою пропедевтикою для изученія философіи. Это значеніе математики издревле сознавалось выдающимся философомъ Греціи, Платономъ. „Principales règles de la methode“ Декарта, Этика Спинозы, ordine geometrico demonstrata, философское исчисленіе Лейбница, Критика чистаго разума Канта, и Положительная философія Канта—одинаково исходятъ изъ признанія высокой важности математики для философіи.

ЗАДАЧИ.

№ 218. Въ данный треугольникъ требуется вписать ромбъ, площадь котораго вдвое меньше площади треугольника, и затѣмъ вычислить діагонали ромба. *Ш.*

№ 219. Показать, что мнимая единица ($\sqrt{-1}$) можетъ быть символически представлена въ видѣ непрерывной дроби

$$\sqrt{-1}=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\ldots}}}}}} \quad \text{или} \quad \sqrt{-1}=\cfrac{1}{0-\cfrac{1}{0-\cfrac{1}{0-\cfrac{1}{0-\ldots}}}}$$

Ш.

№ 220. По даннымъ серединамъ сторонъ выпуклаго семиугольника построить его вершины. (Заимств.) *Ш.*

№ 221. Ребра тетраэдра SABC равны: $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $AS=a_1$, $BS=b_1$, $CS=c_1$. Опредѣлить длины прямыхъ, соединяющихъ средины противоположныхъ реберъ. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 222. Около треугольника ABC описана окружность радіуса R. Соединивъ ея центръ O съ вершинами A, B, C, описываемъ окружности Q_1, Q_2, Q_3, около треугольниковъ AOB, BOC, COA. Радіусы четырехъ окружностей P, P_1, P_2, P_3, касательныхъ къ этимъ тремъ окружностямъ, обозначимъ соотвѣтственно черезъ ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3. Предполагая, что треугольникъ ABC остроугольный и что окружность P касается внутренне къ тремъ окружностямъ Q_1, Q_2, Q_3, требуется доказать, что

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}=\frac{4}{R}.$$

Какъ измѣнится эта формула въ случаѣ тупоугольнаго треугольника ABC? *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 18 (2-ой серіи). Рѣшить систему:

$$x+y+z+t=a$$

$$x^2+y^2+z^2+t^2=a^2-2b$$

$$x^3+y^3+z^3+t^3=a^3-3ab+3a$$

$$xyzt=1.$$

Полагаемъ $x+y=u$, $xy=s$; $z+t=v$, $zt=r$. Тогда имѣемъ новую систему:

$$u+v=a$$
$$(u+v)^2-2uv-2s-2r=a^2-2b$$
$$(u+v)^3-3uv(u+v)-3us-3rv=a^3-3ab+3a$$
$$rs=1,$$

или

$$u+v=a$$
$$uv+s+r=b$$
$$auv+us+vr=ab-a$$
$$rs=1.$$

Подставляя во (2) и (3) уравненія вмѣсто r и v ихъ величины изъ уравненій (1) и (4), найдемъ

$$s(au-u^2-b)=-(1+s^2)$$
$$s(au-u^2-b)=\frac{u-a-us^2-as}{a}$$

отсюда

$$(s-1)(us+u-as)=0$$

и

$$s=1.$$

При $s=1$ и $r=1$, тогда изъ (1) и (2) уравненій:

$$u=\frac{a+\sqrt{a^2+8-4b}}{2},\quad v=\frac{a-\sqrt{a^2+8-4b}}{2}$$

или наоборотъ.

Дальнѣйшій ходъ рѣшенія очевиденъ.

И. Вонсикъ (Ворон.), *А. П.* (Пенза) и *Н. Волковъ* (Спб.).

№ 41 (2-ой серіи). Не рѣшая квадратнаго уравненія, найти максимумъ выраженія

$$(5x-2a)(b-2x).$$

Умножимъ и раздѣлимъ данное выраженіе на 10, тогда оно приметъ такой видъ

$$\frac{(10x-4a)(5b-10x)}{10};$$

сумма множителей здѣсь есть величина постоянная, значитъ maximum будетъ когда

$$10x-4a=5b-10x,$$

откуда

$$x=\frac{4a+5b}{20}.$$

Л. Апте и *А. Шульженко* (Кіевъ), *Н. Свѣшниковъ* (Троицкъ) и учен. Елисаветградскаго р. уч. *В. Л.*

№ 48 (2-ой серіи). Въ треугольникъ ABC вписанъ кругъ O, касающійся сторонъ соотвѣтственно въ точкахъ C_1, A_1, B_1. Проводимъ произвольную къ кругу касательную MN и черезъ центръ O прямыя, параллельныя прямымъ A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 до ихъ пересѣченія съ касательной MN въ точкахъ C_2, A_2, B_2.

Показать, что прямыя, соединяющія эти точки съ соотвѣтственными вершинами $\triangle$-ка, пересѣкутся въ одной точкѣ.

Поищемъ взаимную теорему относительно того же круга. Вершинамъ A, B и C соотвѣтствуютъ поляры C_1B_1, A_1C_1 и A_1B_1. Касательной MN—точка касанія P. Поляра точки C_2 должна проходить черезъ полюсъ прямой MN, т. е. черезъ P; при этомъ $\angle POC_2$ долженъ равняться углу между MN и полярой точкѣ C_2. Проведемъ $PL \perp A_1B_1$, это и будетъ поляра точки C_2, ибо она проходитъ черезъ P и $\angle LPM = \angle POC_2$; полярами точекъ A_2 и B_2 будутъ соотвѣтственно PH и PK. Поляры точекъ A_2, B_2 и C_2 суть перпендикуляры, опущенные изъ нѣкоторой точки P, лежащей на окружности, на стороны $\triangle$-ка въ нее вписаннаго.

Полюсъ прямой CC_2 лежитъ на пересѣч. поляръ точекъ C и C_2, т. е. въ точкѣ L,
„ „ AA_2 „ „ „ „ „ A и A_2 „ „ „ „ H,
„ „ BB_2 „ „ „ „ „ B и B_2 „ „ „ „ K.

Но K, L и H, какъ основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нѣкоторой точки окружности на стороны $\triangle$-ка въ нее вписаннаго, лежатъ на одной прямой, слѣд. поляры этихъ точекъ, т. е. прямые BB_2, CC_2 и AA_2 пересѣкаются въ одной точкѣ.

Н. Р. (Одесса).

№ 498. Даны двѣ параллельныя прямыя X и Y и между ними двѣ точки A и B. Черезъ точку A провести прямую такъ, чтобы часть ея, заключенная между параллельными, была видна изъ точки B подъ даннымъ угломъ α.

Положимъ, что задача рѣшена и искомая прямая MN проведена. Проведемъ черезъ N прямую $NP \parallel BM$ и продолжимъ прямую BA до пересѣченія съ NP въ K. Тогда въ подобныхъ $\triangle$-кахъ MAB и KAN имѣемъ

$$BA : AK = MA : AN = \text{Const}.$$

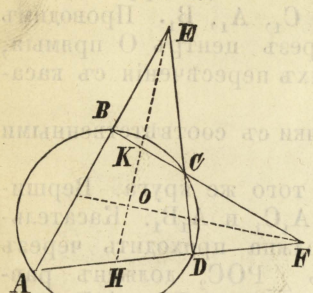
Стало быть точку K можно построить. Уголъ $BNK = 180^\circ - \alpha$. Слѣдовательно для построенія искомой прямой нужно на прямой BK описать дугу, вмѣщающую уголъ$=180^\circ - \alpha$, и точки ея пересѣченія съ прямой Y соединить съ A прямыми, продолживъ ихъ до пересѣченія съ другой прямой X. Вопросъ допускаетъ два рѣшенія. Доказательство очевидно.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *С. Блажко* (Мск.).

№ 519. Доказать, что средины діагоналей вписаннаго въ кругъ четыреугольника и точка пересѣченія биссекторовъ угловъ между его противоположными сторонами лежатъ на одной прямой.

Пусть биссекторы угловъ E и F (фиг. 47) между противоположными сторонами четыреугольника ABCD, вписаннаго въ кругъ, пересѣкаются въ O; пусть биссекторъ угла E пересѣкаетъ BC и AD въ K и H.

Фиг. 47.



Такъ какъ биссекторы угловъ E и F перпендикулярны между собою, то изъ прямоугольныхъ $\triangle$-ковъ KOF и HOF, имѣющихъ общій катетъ OF и равные углы OFK и OFH, слѣдуетъ равенство катетовъ KO и HO; иными словами, прямая KH дѣлится въ точкѣ пересѣченія биссекторовъ пополамъ. Изъ $\triangle$-ка BEC, въ которомъ EK есть биссекторъ угла E, имѣемъ $BE:EC=BK:CK$, а изъ $\triangle$-ка AED имѣемъ $DE:AE=DH:AH$; но $EA.EB=ED.EC$, откуда $EB:EC=DE:AE$, слѣдовательно $BK:CK=DH:AH$. Отсюда видимъ, что точки B, K, C и A, H, D отсѣкаютъ на прямыхъ BC и AD пропорціональные отрѣзки, а потому средины прямыхъ AC, BD и KH лежатъ на одной прямой; но средина KH есть, вмѣстѣ съ тѣмъ, и пересѣченіе биссекторовъ угловъ E и F, слѣдовательно наша теорема доказана.

Н. Волковъ (Спб.).

№ 521. Рѣшить уравненіе

$$D=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 5 \\ 1 & x & 5 & 2 \\ 2 & 5 & x & 1 \\ 5 & 2 & 1 & x \end{vmatrix}=0$$

Если къ первому столбцу прибавить три послѣдніе, то обнаружится дѣлитель опредѣлителя $x+8$. Прибавивъ къ первому столбцу второй и вычтя изъ результата два послѣдніе столбца, обнаружимъ дѣлитель $x-6$. Сложимъ первый столбецъ съ третьимъ и изъ результата вычтемъ сумму столбцовъ второго и четвертаго, тогда обнаружится дѣлитель $x-4$. Наконецъ, если первый столбецъ сложить съ четвертымъ и изъ результата вычесть сумму столбцовъ второго и третьяго, обнаружится дѣлитель $x+2$. Такимъ образомъ D дѣлится на

$$(x+8)(x-6)(x-4)(x+2)$$

и такъ какъ главный членъ опредѣлителя равенъ первому члену этого произведенія, то

$$D=(x+8)(x-6)(x-4)(x+2).$$

Слѣдовательно $x_1=-8$, $x_2=6$, $x_3=4$, $x_4=-2$.

Ученикъ Курск. г. (8) *С. Г.*

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 12 Іюня 1891 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Обложка
ищется

Обложка
ищется