Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XII Сем. **№ 137.** № 5.

ЭНЕРГІЯ ПЛОСКИХЪ ГАРМОНИЧЕСКИХЪ ВОЛНЪ.

Въ настоящей статьѣ я предполагаю изложить элементарный выводъ одной изъ главнѣйшихъ формулъ теоріи колебательнаго движенія, а именно: выводъ формулы, опредѣляющей энергію плоскихъ гармоническихъ волнъ, и сдѣлать нѣкоторыя приложенія ея.

1. *Энергія одной волны.* Положимъ, что въ средѣ распространяются плоскія гармоническія волны *). Энергія волны слагается изъ двухъ частей—потенціальной энергіи и кинетической. Потенціальная энергія зависитъ отъ деформаціи, отъ распредѣленія частицъ относительно ихъ положенія равновѣсія. Кинетическая энергія зависитъ отъ скорости колебаній всѣхъ частей волны.

Подъ энергіею волны будемъ разумѣть энергію, которою обладаютъ всѣ частицы, заключающіяся въ объемѣ цилиндра, котораго основаніе равно единицѣ поверхности, а длина—длинѣ волны. Для вычисленія кинетической, потенціальной и полной энергіи, разбиваемъ волну плоскостями параллельными поверхности волны на n такихъ малыхъ частей, чтобъ можно было принять колебательныя скорости и перемѣщенія частицъ въ каждой части за одинаковыя. Назовемъ v скорость и y перемѣщеніе точекъ какого либо слоя, m массу слоя и k ускореніе на разстояніи равномъ

*) Т. е. такія волны, въ которыхъ колебанія каждой частицы параллельны одному и тому же направленію и одинаковы во всѣхъ плоскостяхъ перпендикулярныхъ направленію распространенія волнъ.

единицѣ отъ положенія равновѣсія; тогда кинетическая энергія волны выразится формулой:

$$K = \Sigma {}^1/_2 mv^2,$$

потенціальная—формулой:

$$\Pi = \Sigma {}^1/_2 mky^2.$$

Когда колебанія простыя гармоническія, то не трудно вычислить, что $K = \Pi$.

Мы не будемъ производить этого вычисленія, а ограничимся вычисленіемъ полной энергіи волны въ зависимости отъ массы волны и наибольшей скорости колебаній частицъ V, которую онѣ пріобрѣтаютъ въ центрахъ ихъ колебаній. Для простыхъ гармоническихъ колебаній имѣетъ мѣсто уравненіе:

$${}^1/_2 mv^2 + {}^1/_2 ky^2 m = {}^1/_2 mV^2.$$

Суммированіемъ находимъ для полной энергіи волны:

$$э = K + \Pi = \Sigma {}^1/_2 mV^2;$$

но V одинаково для различныхъ слоевъ и потому V можно вынести за знакъ суммы; назвавъ M массу волны, или Σm, получимъ:

$$э = {}^1/_2 MV^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Итакъ

полная энергія волны равна ея массѣ, умноженной на половину квадрата наибольшей скорости, которую пріобрѣтаютъ частицы волны при прохожденіи черезъ положенія равновѣсій.

Пусть плотность среды равна ρ, а длина волны λ; тогда $M = \rho\lambda$ и потому:

$$э = {}^1/_2 \rho\lambda V^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

2. *Колебательная энергія единицы объема.* По уравненію (1) не трудно вычислить e колебательную энергію, заключающуюся въ единицѣ объема среды; раздѣливъ обѣ части уравненія на объемъ, найдемъ

$$e = {}^1/_2 \rho V^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Размѣръ единицы, служащей для измѣренія e, найдемъ, уменьшивъ основныя единицы массы, длины и времени соотвѣтственно въ M, L и T разъ, тогда первая единица уменьшится въ $[e]$ разъ

$$[e] = ML^{-1}T^{-2}.$$

Этотъ размѣръ точно такой же какъ и размѣръ единицы давленія.

3. *Формула интенсивности колебательнаго движенія* (Бозанке). Количество энергіи, проходящей въ единицу времени и черезъ единицу поверхности нормальной къ направленію распространенія волнъ, можетъ быть взято за мѣру интенсивности волнообразнаго движенія. Опредѣлимъ это количество Э. Если въ единицу времени проходитъ N волнъ и энергія каждой волны э, то

$$Э = N \,.\, э.$$

Подставляя сюда вмѣсто э его значеніе по формулѣ (2) и называя ω скорость распространенія волнъ, получаемъ:

$$Э = {}^1\!/_2 \rho V^2 \omega. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Формула (4) впервые была введена Бозанке *), но только инымъ, не элементарнымъ способомъ.

4. *Другіе виды формулы интенсивности волнообразнаго движенія.* Скорость V въ зависимости отъ амплитуды a и періода колебаній T опредѣляется формулой:

$$V = \frac{2\pi a}{T}.$$

Слѣдовательно

$$Э = 2\pi^2 \rho \omega \frac{a^2}{T^2},$$

или еще такъ

$$Э = 2\pi^2 \rho \omega^3 \frac{a^2}{\lambda^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

Если назовемъ γ сгущеніе (при продольныхъ волнахъ), то извѣстно, что $\gamma = \frac{v}{\omega}$.

Слѣдовательно

$$Э = {}^1\!/_2 \rho \omega^3 \Gamma^2,$$

гдѣ Γ наибольшее сгущеніе.

5. *Давленіе производимое волнами.* Максуэлль **) показалъ, что въ средѣ, въ которой распространяются волны, существуетъ давленіе по направленію нормальное къ волнамъ и численно равное энергіи, заключающейся въ единицѣ объема. На основаніи формулы (3) давленіе волнъ p выразится слѣдующимъ образомъ:

$$p = {}^1\!/_2 \rho V^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

---

*) Bosanquet, Philosophical Magazine XLV стр. 173, 1873 г., также въ его «Notes on the Theory of Sound» Philos. Magaz. III, стр. 343, 1877 г.

**) Maxwell, Traité d'électricité et de magnetisme, T. II p. 495.

Одинаковость размѣровъ единицъ давленія и энергіи единицы объема подтверждають справедливость формулы. Не трудно усмотрѣть сходство формулы (5) съ формулою кинетической теоріи газовъ:

$$p = {}^1/_3 \rho \bar{u}^2,$$

гдѣ u^2 средній квадратъ отъ молекулярныхъ скоростей.

6. *Приложенія*. Выведенныя формулы имѣютъ приложенія въ акустикѣ, оптикѣ, теплѣ и электричествѣ. Формула (4) имѣетъ большое значеніе въ теоріи интерференціи волнъ *).

Въ акустикѣ она примѣняется напр. при объясненіи звукопроводности, при вычисленіи абсолютной величины амплитуды звуковыхъ волнъ **) и др. Можно примѣнить формулу (4) къ вычисленію произведнія плотности свѣтоваго эфира на квадратъ амплитуды, т. е. къ вычисленію $a^2\rho$. Изъ формулы (4') получаемъ:

$$\rho a^2 = \frac{Э\ .\ \lambda^2}{2\pi^2\ .\ \omega^3}.$$

По Langley количество солнечной энергіи, упавшей нормально на 1 кв. цм. и въ 1^s, въ единицахъ CGS равно

$$\frac{3\ .\ 42\ .\ 10^6}{60}.$$

Извѣстно также, какая часть этой энергіи приходится на видимые лучи, слѣдовательно можно вычислить Э; если для λ возьмемъ среднюю изъ длинъ волнъ видимыхъ лучей, то вычислимъ приблизительную величину ρa^2 ***).

Зная распредѣленіе энергіи въ спектрѣ, пользуясь формулой (4'), вычислимъ относительныя амплитуды (a^2 = пост. $Э\lambda^2$).

7. *Соотношеніе между силами свѣта падающаго, преломленнаго и отраженнаго.*

Опредѣленіе силы свѣта. Сила свѣта въ данномъ мѣстѣ среды есть количество свѣтовой энергіи, проходящей въ единицу времени и черезъ единицу площади нормальной къ направленію распространенія свѣтовыхъ волнъ.

Выведемъ зависимость между силами свѣта падающаго, отраженнаго и преломленнаго въ предположеніи, что не происходитъ поглощенія свѣта средою. Пусть поверхность раздѣла двухъ средъ

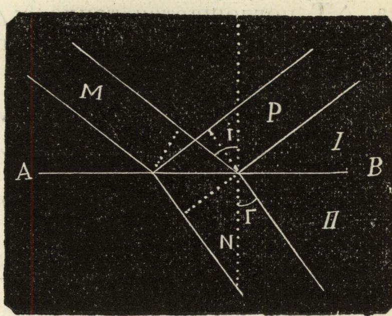
---

*) Извѣстія Физ.-Мат. Общ. при Казанскомъ Университетѣ. Томъ 1, вып. 3, стр. 55 — 57.

**) См. мой курсъ акустики стр. 87.

***) Если для Э взять число $\frac{3\ .\ 42\ .\ 10^6}{60}$, а для $\lambda = {}^1/_2\,(0{,}000295 + 0{,}0027)$, то $a^2\rho = 8{,}7\ .\ 10^{-35}$.

I и II будетъ плоскость AB и пусть плоскія гармоническія волны переходятъ изъ одной среды въ другую черезъ эту плоскость раздѣла; при этомъ происходитъ и отраженіе волнъ, т. е. падующія волны M разбиваются на двѣ части: одна часть N входитъ въ среду II, другая часть P отражается въ въ первую среду.



Фиг. 16.

Пусть уголъ паденія будетъ i, уголъ преломленія r. Назвавъ d плотность эфира въ первой средѣ и d' его плотность во второй средѣ, ω скорость распространенія волнъ въ первой средѣ и ω скорость распространенія волнъ во второй средѣ, назвавъ далѣе наибольшія скорости колебаній въ падающей волнѣ v, въ отраженной u и въ преломленной w, имѣемъ для силъ свѣта падающаго I, отраженнаго I_1, и преломленнаго I':

$$I = {}^1/_2 dv^2\omega, \quad I_1 = {}^1/_2 du^2\omega, \quad I' = {}^1/_2 d'w^2\omega' \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

Обозначимъ s нормальное къ лучамъ сѣченіе падующей волны и s' нормальное сѣченіе преломленной волны; по закону сохраненія энергіи имѣемъ:

$$dv^2\omega s = d'w^2\omega's' + du^2\omega s,$$

слѣдовательно

$$I = I'\frac{s'}{s} + I_1;$$

но

$$\frac{s'}{s} = \frac{\mathrm{Cos}\,r}{\mathrm{Cos}\,i} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n^2 - \mathrm{Sin}^2 i}{1 - \mathrm{Sin}^2 i}},$$

слѣдовательно

$$I = I'\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n^2 - \mathrm{Sin}^2 i}{1 - \mathrm{Sin}^2 i}} + I_1. \qquad (II).$$

Полное внутреннее отраженіе. Когда $\mathrm{Sin}^2 i = n^2$, $I = I_1$. Когда $\mathrm{Sin}^2 i > n^2$, тогда выраженіе со знакомъ корня мнимое, но лѣвая часть ур. II дѣйствительная, а это требуетъ чтобы $I' = 0$ и слѣд. $I = I_1$, т. е. для всѣхъ тѣхъ угловъ паденія, для которыхъ $\mathrm{Sin}^2 i \geqq n^2$, сила преломленнаго свѣта равна 0 и падающій свѣтъ вполнѣ отражается.

8. *Выводъ формулы Дюлонга и Пти.*

Съ точки зрѣнія механической теоріи тепла, приращеніе температуры $\triangle T$ опредѣляется приращеніемъ средней живой силы колебаній молекулъ; называя k множитель пропорціональности и q молекулярный вѣсъ, имѣемъ:

$$\triangle T = kq \, . \, \triangle v^2.$$

При нагрѣваніи единицы объема при постоянномъ давленіи на $\triangle T$ поглощается тепло $c\rho\triangle T$, гдѣ c теплоемкость, съ другой стороны колебательная энергія по фор. (3) увеличивается на $^1/_2\rho\triangle v^2$. Слѣдовательно:

$$^1/_2\rho\triangle v^2 = c\rho\triangle T.$$

Изъ уравненій получаемъ

$$cq = \text{пост.}$$

Проф. *Н. Слугиновъ.*

АНАЛОГІЯ
МЕЖДУ ГАЗАМИ И РАСТВОРЕННЫМИ ВЕЩЕСТВАМИ.

Теорія van't Hoff'a и гипотеза Arrhenius'a.

I.

Еще въ началѣ нынѣшняго вѣка Berthollet думалъ, что количественныя отношенія составныхъ частей сложнаго тѣла измѣняются пропорціонально количествамъ веществъ, дѣйствовавшихъ другъ на друга при его образованіи. Взгляды Berthollet повели къ спору его съ Прутомъ, стоявшимъ за постоянство состава сложныхъ тѣлъ. Этотъ споръ, потребовавшій массы фактическаго матеріала, затѣмъ появившаяся въ то-же время атомистическая теорія Dalton'а, законъ Avogadro (1811 г.), заинтересовали всѣхъ химиковъ, привлекли къ себѣ всѣ силы. Черезъ нѣсколько лѣтъ (1828 г.) Wöhler первымъ синтезомъ органическаго соединенія разрушилъ то предубѣжденіе, которое существовало относительно силъ, управляющихъ образованіемъ органическихъ соединеній. Явилось новое, заманчивое поле для изслѣдованій. За 80 лѣтъ, прошедшихъ со времени спора Прута и Berthollet, совершенъ громадный трудъ: собрана масса фактическаго матеріала, матеріалъ этотъ подведенъ подъ общіе законы, для объясненія которыхъ появлялось много теорій — словомъ, создалась почти вся химія. Этотъ громадный трудъ потребовалъ и громадныхъ силъ. Соединенія, въ которыхъ не замѣчалось постоянства состава, были отодвинуты на задній планъ: ими некогда было интересоваться. Вотъ почему растворы такъ долго оставались неизученными, не смотря на то, что съ ними приходилось имѣть дѣло на каждомъ шагу; если-же появлялись отдѣльныя наблюденія надъ свойствами растворовъ, то они либо оставались почти незамѣченными, либо вовсе забывались. Въ подтвержденіе этого можно указать хотя бы на наблюденія Blagden'а надъ температурой замерзанія водныхъ растворовъ солей. Наблюденія эти, весьма точныя для своего времени, появились еще въ 1788 году. Они доказали, что водные растворы солей замерзають при низшей температурѣ, нежели чистая вода, что температура замерзанія водныхъ растворовъ одного и того-же вещества пропорціональна растворенному его количеству и что если въ растворѣ находится смѣсь двухъ веществъ, то общее ихъ дѣйствіе на температуру замерзанія равно суммѣ дѣйствій каждаго изъ нихъ въ отдѣльности. Эти наблюденія были впослѣдствіи совершенно забыты и законы Blagden'а были вновь открыты лишь въ 1861 г. Rüdorff'омъ. Та-же судьба постигла и осмотическія явленія, открытыя Nollet въ 1748 г. и совершенно забытыя, не смотря на громадное ихъ значеніе для физіологіи; они были вновь открыты въ 1812 году Fischer'омъ.

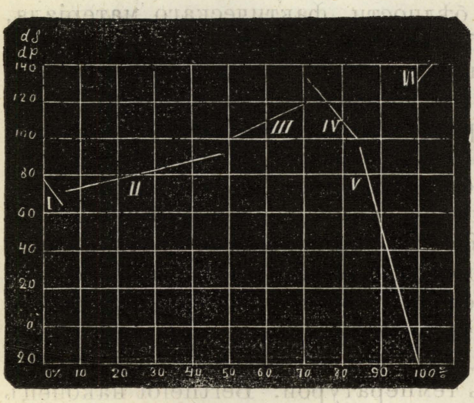
Изученія нѣкоторыхъ свойствъ растворовъ потребовала практика. Поэтому напр. удѣльный вѣсъ растворовъ нѣкоторыхъ кислотъ, щелочей, солей, спирта, былъ давно уже изученъ достаточно полно. Что-же касается до большей части остальныхъ свойствъ растворовъ: упругости ихъ пара, температуры замерзанія, показателей преломленія, электропроводности, осмотическаго давленія, поверхностнаго натяженія и пр., то здѣсь имѣлись по большей части отрывочныя, неполныя наблюденія, хотя и сознавалась важность изученія этихъ свойствъ. Такъ еще въ 1862 г. Regnault ожидалъ богатыхъ результатовъ отъ изученія упругости пара растворовъ, говоря, что оно дастъ драгоцѣнный способъ изслѣдованія для изученія массы явленій молекулярной химіи, отъ котораго можно ожидать такихъ-же важныхъ результатовъ, какіе были получены напр. Biot и послѣ него нѣкоторыми другими физиками изъ изученія вращательной поляризаціи. Эти ожиданія дѣйствительно сбылись, но лишь въ самое послѣднее время.

Понятно, что при такой бѣдности фактическаго матеріала, и самые взгляды на растворы были совершенно произвольны. Lavoisier думалъ, что въ водныхъ растворахъ солей частички соли только удалены другъ отъ друга, но ни соль, ни вода не испытываютъ при этомъ никакого разложенія, а растворимость соли онъ связывалъ съ температурой ея плавленія. Berthollet, напротивъ, не отличалъ растворовъ отъ тѣхъ тѣлъ, которыя мы называемъ теперь опредѣленными химическими соединеніями, а Берцеліусъ совсѣмъ исключалъ явленія растворенія и растворы изъ области химіи. Gay-Lussac говорилъ, что хотя причины, производящія растворeніе и тѣ-же, которыя производятъ другія соединенія, но дѣйствіе ихъ здѣсь не то... Растворимость тѣла въ водѣ зависитъ отъ двухъ причинъ: сродства и тепла или, точнѣе, сродство соли къ водѣ измѣняется съ температурой. Berthelot наконецъ смотритъ на растворы какъ на нѣчто среднее между простой смѣсью и настоящимъ соединеніемъ. „Я думаю, говоритъ онъ, что каждый растворъ дѣйствительно состоитъ изъ смѣси части свободнаго растворителя съ частью растворенннаго вещества, соединеннаго съ растворителемъ по закону опредѣленныхъ пропорцій“ *).

*) Berthelot. Essai de mécanique chimique. T. II, стр. 161.

Середину 80-ыхъ годовъ настоящаго столѣтія слѣдуетъ считать поворотнымъ пунктомъ въ исторіи развитія нашихъ взглядовъ на растворы. Къ этому времени накопилось достаточное количество фактическаго матеріала, отдѣльныя свойства растворовъ были уже подведены по большой части подъ общіе законы, изъ которыхъ многіе имѣли и большой практическій интересъ. Конечнымъ результатомъ этихъ обобщеній явились двѣ теоріи, установившія двѣ различныя точки зрѣнія на растворы. Одна изъ этихъ теорій, обязанная своимъ происхожденіемъ главнымъ образомъ Менделѣеву, получила названіе *гидратной* или *химической* теоріи, другая — *физической* теоріи. Это — теорія van't Hoff'а съ гипотезой Arrhenius'а, дополняющей ее. Такъ какъ изложеніе физической теоріи и составляетъ главную цѣль настоящей статьи, то здѣсь скажемъ лишь нѣсколько словъ о первой.

Собравъ по возможности всѣ имѣвшіяся до него опредѣленія удѣльнаго вѣса водныхъ растворовъ различныхъ веществъ, сопоставивъ эти наблюденія, провѣривъ и дополнивъ ихъ многочисленными собственными опредѣленіями, Менделѣевъ дѣлаетъ слѣдующіе выводы. Удѣльный вѣсъ раствора представляетъ функцію его процентнаго содержанія. Если выразить графически первую производную этой функціи, т. е. отношеніе приращенія удѣльнаго вѣса къ приращенію процентнаго содержанія, то можно замѣтить, что она является въ видѣ ряда прямыхъ, наклоненныхъ другъ къ другу подъ различными углами съ перерывами, скачками въ нѣкоторыхъ мѣстахъ. Эти перерывы соотвѣтствуютъ точно по своему положенію опредѣленнымъ, частичнымъ простымъ отношеніямъ между растворителемъ и растворенным веществомъ, т. е. опредѣленнымъ гидратамъ. Иллюстраціей можетъ служить слѣдующая діаграмма (фиг. 17), изображающая графически значенія первой производной для растворовъ сѣрной кислоты; она изображается 6-ю прямыми, перерывы между которыми какъ разъ соотвѣтствуютъ гидратамъ H_2SO_4, $H_2SO_4 . H_2O$, $H_2SO_4 . 2H_2O$, $H_2SO_4 . 6H_2O$, $H_2SO_4 . 15H_2O$. Если выразить графически, въ видѣ кривыхъ, другія свойства тѣхъ-же растворовъ: — теплоту образованія, теплоемкость, сжатіе, расширеніе при нагрѣваніи, то замѣтимъ измѣненія кривизны въ тѣхъ-же точкахъ, соотвѣтствующихъ тѣмъ-же гидратамъ. Нѣкоторые изъ такихъ гидратовъ удалось даже выдѣлить изъ растворовъ. На этомъ основаніи растворы по Менделѣеву представляютъ вообще смѣси опредѣленныхъ гидратовъ



Фиг. 17.

съ продуктами ихъ диссоціаціи, являясь одной изъ формъ подвижнаго равновѣсія. Взглядъ этотъ сходенъ со взглядомъ Berthelot, но не тожественъ съ нимъ.

II.

Теорія van't Hoff'а заключается въ томъ, что растворенныя вещества находятся въ состояніи, аналогичномъ газообразному, если только разбавленіе раствора таково, что частицы растворённаго вещества не оказываютъ другъ на друга никакого вліянія и суммой ихъ объемовъ можно пренебречь по сравненію съ объемомъ всего раствора. Это ограниченіе необходимо и для газовъ, уклоняющихся, какъ извѣстно, отъ законовъ Boyle'я, Gay-Lussac'а и Avogadro при сильныхъ давленіяхъ, когда частицы ихъ сближены.

Если v — объемъ газа, находящагося подъ давленіемъ p и при температурѣ T (по абсолютной шкалѣ), то, какъ извѣстно,

$$p \cdot v = \mathrm{R} \cdot \mathrm{T}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

гдѣ R есть нѣкоторая постоянная для всѣхъ газовъ величина, численное значеніе которой легко опредѣлить, если вмѣсто p, v и T подставить ихъ численныя значенія для какого нибудь газа. Выбирая напр. 2 килограмма водорода при 0° и 760 mm. и выражая объемъ его въ куб. метрахъ, давленіе въ килограммахъ на кв. метръ, получимъ:

$$p = 10333, \; v = \frac{2}{0{,}08956}, \; \mathrm{T} = 273$$

и, слѣдовательно

$$\mathrm{R} = 845.$$

Уравненіе (1) принимаетъ видъ:

$$p \cdot v = 845 \; \mathrm{T} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Уравненіе это характеризуетъ газообразное состояніе тѣлъ, выражая одновременно три основные закона, управляющіе газами.

По теоріи van't Hoff'а это уравненіе прилагается и ко многимъ веществамъ, находящимся въ разбавленныхъ растворахъ, если только подъ p разумѣть осмотическое давленіе раствора.

Что такое осмотическое давленіе раствора?

Представимъ себѣ сосудъ, стѣнки котораго пропускаютъ сквозь себя растворитель, задерживая растворенное вещество *). Положимъ, что сосудъ этотъ наполненъ какимъ нибудь разбавлен-

---

*) Такія стѣнки станемъ называть „полупроницаемыми". Ихъ легко приготовить, если пористый сосудъ, какіе употребляются для гальваническихъ элементовъ, пропитать сперва растворомъ мѣднаго купороса и погрузить затѣмъ въ растворъ желтой соли. Въ стѣнкахъ пористаго сосуда образуется тогда осадокъ желѣзисто-синеродистой мѣди, пропускающій сквозь себя воду, но задерживающій растворенныя въ водѣ вещества.

нымъ растворомъ, напр. воднымъ растворомъ сахара, закрыть пробкой съ манометромъ и погруженъ въ чистую воду. Тогда вода начинаетъ проникать въ сосудъ, давленіе внутри сосуда возрастаетъ, ртуть въ манометрѣ медленно поднимается и, дойдя до нѣкоторой высоты, останавливается. То давленіе, которое уравновѣшиваетъ столбъ ртути, и называется осмотическимъ давленіемъ.

Van't Hoff сравниваетъ осмотическое давленіе раствора съ давленіемъ газа. Подобно тому, какъ въ газахъ давленіе происходитъ вслѣдствіе ударовъ частицъ газа о стѣнки сосуда, такъ и осмотическое давленіе происходитъ вслѣдствіе ударовъ частицъ растворенаго вещества о полупроницаемую стѣнку; растворитель при этомъ не оказываетъ вліянія на давленіе, такъ какъ онъ свободно проходитъ сквозь эту стѣнку. Если это такъ, то очевидно что 1) осмотическое давленіе для одного и того-же вещества должно быть пропорціонально числу его частицъ въ единицѣ объема, т. е. концентраціи раствора и 2) что растворы различныхъ веществъ, имѣющіе одинаковое осмотическое давленіе, должны сохранять это равенство осмотическихъ давленій, если измѣнить ихъ концентрацію въ одинаковой степени. Оба эти положенія представляютъ очевидно ничто иное, какъ законъ Boyle'я въ приложеніи къ растворамъ.

Первый изъ этихъ двухъ выводовъ подтверждается измѣреніями Pfeffer'a, а второй — наблюденіями de-Vries'a.

Pfeffer непосредственно измѣрялъ осмотическое давленіе растворовъ различной концентраціи. Вотъ результаты его наблюденій надъ растворами сахара:

Концентрація C	Осмот. давл. P	$\frac{P}{C}$
1%	535 mm.	535
2%	1016 „	508
2,74%	1518 „	554
4%	2082 „	521
6%	3075 „	513.

Принимая во вниманіе трудность подобнаго рода измѣреній, можно признать вполнѣ удовлетворительной пропорціональность между концентраціей и осмотическимъ давленіемъ.

Чтобы уяснить опыты de-Vries'a, я позволю себѣ сдѣлать небольшое отступленіе.

Если растворы двухъ различныхъ веществъ съ различными осмотическими давленіями въ одномъ и томъ-же растворителѣ отдѣлены другъ отъ друга перепонкой, непроницаемой для растворенныхъ веществъ, но пропускающей сквозь себя растворитель, то очевидно, что перепонка, испытывая различныя давленія съ обѣихъ сторонъ, будетъ стремиться двигаться въ сторону раствора съ меньшимъ осмотическимъ давленіемъ. Такой опытъ можно произвести если напр. опустить въ сосудъ съ слабымъ растворомъ желтой соли каплю крѣпкаго раствора хлорной мѣди; на поверхности соприкосновенія обѣихъ жидкостей образуется тонкая пленка желѣзисто-синеродистой мѣди, задерживающая частицы хлорной мѣди и желтой соли и легко пропускающая сквозь себя воду; растворъ хлорной мѣди сильнѣе давитъ на эту перепонку, чѣмъ желтая соль, разрываетъ ее, но въ мѣстахъ разрыва тотчасъ-же образуется новая перепонка. Такимъ образомъ растворъ хлорной мѣди, отнимая воду у раствора желтой соли, расширяется совершенно аналогично тому, какъ расширяется напр. бычачій пузырь, наполненный воздухомъ, подъ колоколомъ воздушнаго насоса (опытъ Traube). De-Vries вносилъ клѣтки нѣкоторыхъ растеній (Begonia manicata, Tradescantia discolor и др.) въ растворы различной концентраціи; если осмотическое давленіе раствора больше осмотическаго давленія клѣточнаго сока, то растворъ отнимаетъ отъ клѣтки воду и протоплазма ея сокращается. Уменьшая постепенно концентрацію раствора, мы достигаемъ того, что протоплазма уже не сокращается. Тогда осмотическое давленіе раствора приблизительно равно осмотическому давленію клѣточнаго сока. Употребляя клѣтки одного и того-же растенія какъ индикаторъ для растворовъ различныхъ веществъ, можно очевидно получить рядъ растворовъ, осмотическія давленія которыхъ равны осмотическому давленію клѣточнаго сока и, слѣдовательно, равны между собой (изотоническіе растворы). Переходя затѣмъ къ клѣткамъ другаго растенія, съ другимъ осмотическимъ давленіемъ клѣточнаго сока, получаемъ другую серію такихъ изотоническихъ растворовъ и т. д. Оказывается, что для каждой изъ такихъ серій изотоническихъ растворовъ отношеніе между концентраціями отдѣльныхъ растворовъ остается постояннымъ, какъ это видно изъ слѣдующей таблички, гдѣ концентрація растворовъ селитры принята за единицу для каждой серіи.

Серіи	Селитра KNO_3	Сахаръ $C_{12}H_{22}O_{11}$	Сѣрнокисл. кали K_2SO_4
I	1	—	0,75
II	1	1,54	0,77
III	1	1,54	0,77
IV	1	1,54	—

Вообразимъ себѣ цилиндръ съ полупроницаемымъ дномъ, наполненный растворомъ, погруженный въ растворитель и закрытый поршнемъ, на который производится нѣкоторое давленіе P. Если P больше осмотическаго давленія раствора, то поршень будетъ входить въ цилиндръ, растворитель будетъ вытѣсняться изъ цилиндра сквозь полупроницаемое дно, концентрація раствора, а слѣдовательно и его осмотическое давленіе, будетъ увеличиваться и наконецъ сравняется съ осмотическимъ давленіемъ раствора. Тогда наступитъ равновѣсіе и вхожденіе поршня прекратится. Обратный рядъ явленій произойдетъ, если $P <$ осмотическаго давленія раствора. Слѣдовательно, измѣняя давленіе на поршень, мы можемъ сжимать и расширять растворы совершенно подобно газамъ. А это даетъ возможность примѣнить къ растворамъ циклъ Карно. Этимъ и пользуется van't Hoff для вывода закона Gay-Lussac'а въ приложенiи къ растворамъ, по которому осмотическое давленiе пропорцiонально абсолютной температурѣ при прочихъ равныхъ условiяхъ. Отсылая интересующихся этимъ выводомъ къ подлинной статьѣ van't Hoff'а *), переходимъ прямо къ тѣмъ даннымъ наблюденiя, помощью которыхъ можно провѣрить этотъ законъ въ приложенiи къ растворамъ.

Для этого можно привести измѣренiя Pfeffer'а, наблюденiя Donders'а и Hamburger'а и опыты Soret.

Pfeffer непосредственно измѣрялъ осмотическiя давленiя при различныхъ температурахъ. Если вычислить, принимая законъ Gay-Lussac'а, по одному изъ двухъ опытовъ, произведенныхъ надъ однимъ и тѣмъ-же растворомъ, но при различныхъ температурахъ, давленiе для другаго и сопоставить вычисленную величину съ непосредственно измѣренной, то получится слѣдующая таблица:

1) Растворъ тростниковаго сахара.
При 32° найдено осмотическое давленiе 544 mm.
При 14°,2 вычислено по предъид. 511,9 mm., найдено—510 mm.
2) Растворъ тростниковаго сахара.
При 36° найдено — 567 mm.
При 15°,5 вычислено по предъид. 529,6 mm. найдено 520,5 mm.
3) Растворъ виннокислаго натра.
При 37°,3 найдено — 983 mm.
При 13°,3 вычислено 907, найдено 908 mm.

Donders и Hamburger, работая подобно de-Vries'у, но только съ кровяными шариками, нашли, что растворы селитры, хлористаго калiя и сахара, изотоническiе при 0°, сохраняютъ эту изотонiю и при 34°.

Наконецъ опыты Soret подтверждаютъ одновременно оба закона: Boyle'я и Gay-Lussac'а. Soret помѣщалъ растворы въ вертикальную трубку и нагрѣвалъ продолжительное время при опредѣленной температурѣ верхнюю часть трубки, охлаждая въ то-же время до опредѣленной температуры нижнюю. Затѣмъ опредѣлялась концентрацiя раствора отдѣльно въ верхней части и въ нижней. Оказалось, что совершенно однородный до нагрѣванiя растворъ теряетъ эту однородность при нагрѣванiи: вверху получается болѣе слабый растворъ, чѣмъ внизу. Когда, при нагрѣванiи обоихъ концовъ трубки, установится наконецъ перманентное состоянiе, тогда очевидно осмотическое давленiе раствора въ верхней части равно осмотическому давленiю въ нижней. Но по van't Hoff'у осмотическое давленiе измѣняется пропорцiонально темпе-

*) Van't Hoff; Die Rolle des osmotischen Druckes in der Analogie zwischen Lösungen und Gasen. Въ Zeitschr. für physikalische Chemie, т. I. стр. 481 — 508. 1887 г.

ратурѣ и концентрацiи. Если температура и концентрацiя раствора въ верхней части трубки будутъ T и a, а въ нижней соотвѣтственно — T' и a', то, при наступленiи перманентнаго состоянiя, очевидно

$$T \cdot a = T' \cdot a',$$

откуда

$$a' = \frac{T \cdot a}{T'}$$

т. е. зная температуры обоихъ концовъ трубки и концентрацiю одного изъ нихъ, можно, по этимъ даннымъ, принимая законы Boyle'я и Gay-Lussac'а для растворовъ, вычислить концентрацiю другаго. Результаты такого вычисленiя близко подходятъ къ непосредственнымъ даннымъ наблюденiя.

Слѣдовательно законъ Gay-Lussac'а прилагается и къ разбавленнымъ растворамъ.

(Продолженiе слѣдуетъ).

РАЗЛОЖЕНIЕ НА МНОЖИТЕЛИ

квадратнаго трехчлена $x^2 + px + q$ съ цѣлыми коэффицiентами

способомъ группировки.

Непосредственно можно убѣдиться, что трехчленъ $x^2 + (m + n)x + mn$ можетъ быть разложенъ на множители способомъ группировки. Въ самомъ дѣлѣ:

$$x^2 + (m + n)x + mn = x^2 + (mx + nx) + mn =$$
$$= x^2 + mx + nx + mn = (x^2 + mx) + (nx + mn) =$$
$$= x(x + m) + n(x + m) = (x + m)(x + n).$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что:

$$x^2 + (m + n)x + mn = (x + m)(x + n),$$
$$x^2 - (m + n)x + mn = (x - m)(x - n),$$
$$x^2 + (m - n)x - mn = (x + m)(x - n),$$
$$x^2 - (m - n)x - mn = (x - m)(x + n).$$

Отсюда слѣдуетъ, что всякiй квадратный трехчленъ, который можетъ быть представленъ въ видѣ:

$$x^2 \pm (m + n)x + mn$$

или

$$x^2 \pm (m - n)x - mn,$$

можетъ быть разложенъ на множители.

Полагая, что m и n означаютъ цѣлыя абсолютныя числа, получаемъ слѣдующее правило:

Квадратный относительно x трехчленъ, вида $x^2 + px + q$, съ цѣлыми положительными или отрицательными численными коэффиціентами, при чемъ коэффиціентъ при x^2 равенъ единицѣ, можетъ быть разложенъ на два множителя съ цѣлыми коэффиціентами, если абсолютная величина члена, не содержащаго x, можетъ быть представлена въ видѣ произведенія двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, которыхъ сумма, когда членъ, не содержащій x, положителенъ, и которыхъ разность, когда членъ, не содержащій x, отрицателенъ, равнялась бы абсолютной величинѣ коэффиціента при первой степени x. Выполнивъ такое преобразованіе абсолютныхъ величинъ коэффиціентовъ, когда это возможно, и раскрывъ затѣмъ скобки, получимъ четырехчленъ, къ которому легко примѣнить способъ группировки.

Для уясненія этого правила рѣшимъ нѣсколько примѣровъ.

Разложимъ: $x^2 - 9x + 18$. Такъ какъ здѣсь членъ, не содержащій x, положителенъ, то пробуемъ его абсолютную величину т. е. число 18 представить въ видѣ произведенія двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, которыхъ сумма равнялась бы числу 9:

$$18 = 1 \,.\, 18, \qquad 18 + 1 = 19;$$
$$18 = 2 \,.\, 9, \qquad 9 + 2 = 11;$$
$$18 = 3 \,.\, 6, \qquad 6 + 3 = 9.$$

Видимъ, что искомое разложеніе числа 18 будетъ $18 = 3.6$, ибо $6 + 3 = 9$. Посему:

$$x^2 - 9x + 18 = x^2 - (6 + 3)x + 3 \,.\, 6 =$$
$$= x^2 - (6x + 3x) + 3 \,.\, 6 = x^2 - 6x - 3x + 3 \,.\, 6 =$$
$$= (x^2 - 6x) - (3x - 3 \,.\, 6) = x(x - 6) - 3(x - 6) =$$
$$= (x - 6)(x - 3).$$

Разложимъ еще: $x^2 - 2x - 24$. Такъ какъ здѣсь членъ, не содержащій x, отрицателенъ, то пробуемъ его абсолютную величину, т. е. число 24 представить въ видѣ произведенія двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, которыхъ разность равнялась бы числу 2:

$$24 = 1 \,.\, 24, \qquad 24 - 1 = 23;$$
$$24 = 2 \,.\, 12, \qquad 12 - 2 = 10;$$
$$24 = 3 \,.\, 8, \qquad 8 - 3 = 5;$$
$$24 = 4 \,.\, 6, \qquad 6 - 4 = 2.$$

Видимъ, что искомое разложеніе числа 24 будетъ $24 = 4.6$, ибо $6 - 4 = 2$. Посему:

$$x^2 - 2x - 24 = x^2 - (6 - 4)x - 4 \,.\, 6 =$$
$$= x^2 - (6x - 4x) - 4 \,.\, 6 = x^2 - 6x + 4x - 4 \,.\, 6 =$$
$$= (x^2 - 6x) + (4x - 4 \,.\, 6) = x(x - 6) + 4(x - 6) =$$
$$= (x - 6)(x + 4).$$

Попробуемъ, наконецъ, разложить на множители трехчленъ $x^2 - 7x - 15$. Поступая, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, получаемъ:

$$15 = 1 \,.\, 15, \qquad 15 - 1 = 14;$$
$$15 = 3 \,.\, 5, \qquad 5 - 3 = 2.$$

Отсюда заключаемъ, что 15 нельзя представить въ видѣ произведенія двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, которыхъ разность равнялась бы 7-и; слѣдовательно, и даннаго трехчлена не возможно разложить на множители съ *цѣлыми коэффиціентами.*

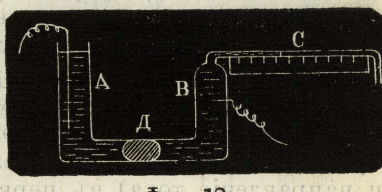
Учит. Варш. реальн. уч. *С. Гирманъ.*

НОВЫЙ ГАЛЬВАНОСКОПЪ.

Приборъ мой основанъ на давно извѣстномъ явленіи, что капля ртути въ сѣрной кислотѣ, заключенной въ узкой стеклянной трубкѣ, движется по направленію тока.

Произведя рядъ изслѣдованій съ различной формы трубками, я остановился на слѣдующихъ двухъ, какъ мнѣ кажется, удобныхъ для лекціонныхъ опытовъ формахъ.

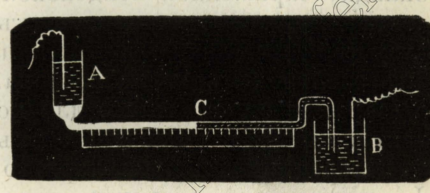
1-я форма. А и В представляютъ два сообщающихся сосуда, сдѣланныхъ изъ стеклянной трубки 3 мм. внутренняго діаметра. Часть В снабжена капиллярной трубкой со шкалой. Д—капля ртути. А, В и С наполнены слабой сѣрной кислотой (какая употребляется для элемента Даніэля). Два мѣдныхъ электрода ведутъ къ источнику электричества (электродъ при В вмазанъ сургучемъ).



Фиг. 18.

При пропусканіи тока по тому или другому направленію горизонтальный столбъ жидкости въ капиллярной трубкѣ С передвинется вправо или влѣво, причемъ это передвиженіе, разумѣется, будетъ въ нѣсколько сотъ разъ больше, чѣмъ передвиженіе капли ртути въ D.

2-я форма. Стеклянная трубка А снабжена капиллярной трубкой С около $^1/_2$ мм. внутренняго діаметра (но не тоньше, иначе происходитъ ея засореніе солями ртути) и изогнутымъ своимъ концомъ опущена въ сосудъ В съ слабой сѣрной кислотой. Въ трубкѣ С находится ртуть, поднимающаяся до нѣкоторой высоты и въ трубкѣ А. Пропуская по электродамъ токъ, мы заставимъ



Фиг. 19.

такимъ образомъ передвигаться столбикъ ртути въ C въ ту или другую сторону, что легко замѣчается на шкалѣ. Для большихъ аудиторій можно разумѣется воспользоваться и волшебнымъ фонаремъ.

Капиллярная трубка C опущена въ сосудъ B довольно большого объема, чтобы жидкость въ C постоянно возобновлялась, такъ какъ получаемыя при соединеніи сѣрной кислоты со ртутью (подъ вліяніемъ электролиза) соли засариваютъ трубку C.

Опыты, которые можно произвести съ этимъ приборомъ довольно разнообразны, и именно вслѣдствіе *необычайной его чувствительности*. Вотъ главнѣйшіе изъ нихъ:

1. *Демонстрированіе дѣйствія коммутатора*. Токъ отъ гальваническаго элемента проходитъ черезъ коммутаторъ и описанный здѣсь гальваноскопъ. По измѣненію направленія движенія капиллярнаго жидкаго столба судимъ и о измѣненіи направленія тока.

2. *Доказательство существованія термоэлектрическихъ токовъ*. Токъ отъ термоэлемента (напр. CuFe) тотчасъ же вызываетъ передвиженіе столбика на нѣсколько десятковъ мм., хотя бы разность температуръ мѣстъ спаевъ и была мала.

3. *Доказательство вольтаическаго электричества*. Серебряная и мѣдная монеты, будучи приведены въ соприкосновеніе между собою и соединены каждая въ отдѣльности съ гальваноскопомъ, вызываютъ въ немъ значительное передвиженіе столбика.

4. *Доказательство экстра-токовъ*. Соединяя электроды гальваноскопа со вторичной катушкой дѣйствующей румкорфовой спирали, мы получимъ отклоненіе столбика въ извѣстномъ направленіи; если теперь перемѣнить электроды (а слѣдовательно и направленіе тока) въ первичной или во вторичной цѣпи, то перемѣнится и направленіе передвиженія столбика въ гальваноскопѣ. Такъ какъ индуктивный токъ при размыканіи главнаго сильнѣе того, который получается при его замыканіи, и именно на величину экстра-тока, то несомнѣнно, что нашъ гальваноскопъ и показалъ этотъ экстра-токъ.

5. *Измѣреніе электрическаго сопротивленія*. Вводя гальваноскопъ вмѣсто гальванометра въ соотвѣтствующую цѣпь мостика *Витстона*, мы можемъ точно опредѣлить *точку нуля* и слѣдовательно измѣрить сопротивленіе даннаго тѣла.

6. *Опредѣленіе знака статическаго электричества*. Наружную обкладку заряженной лейденской банки соединяютъ съ однимъ электродомъ гальваноскопа, а къ шарику банки приближаютъ нѣкоторое остріе (лучше изъ полупроводника), соединенное съ другимъ электродомъ гальваноскопа. Направленіе движенія столбика (заранѣе опредѣленное для положительнаго и отрицательнаго электричества) и покажетъ знакъ электричества внутри банки.

Передвиженіе капиллярнаго столбика въ этомъ гальваноскопѣ *повидимому* не зависитъ отъ силы электрическаго тока: токъ отъ элемента Даніэля и термоэлектрическій токъ (Cu Fe при

$t_1 - t_0 = 1^\circ$) давали почти одно и то же отклоненіе. Чтобы дать понятіе о чувствительности этого прибора, приведу слѣдующій опытъ: Токъ отъ термоэлемента Cu (Fe) Cu при разности температуръ спаянныхъ мѣстъ $= 1^\circ$ вызывалъ передвиженіе столбика приблизительно на 2 см.; когда въ цѣпь было введено сопротивленіе $= 20000$ омамъ, то величина передвиженія была опять около 2 см., тогда какъ наичувствительнѣйшій гальванометръ (нашей лабораторіи) Видемана, а также и Розенталя не давали отъ термоэлектрическаго тока никакого замѣтнаго отклоненія уже при введеніи въ цѣпь только 1000 омовъ.

Проф. *П. Бахметьевъ* (Софія).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Вліяніе давленія на ледъ. Извѣстно, что при увеличеніи давленія температура замерзанія воды понижается. Это было разъяснено теоретически въ 1849 г. проф. Д. Томсономъ и подтверждено опытами проф. В. Томсона; принимается, что при увеличеніи давленія на одну атмосферу, точка таянія льда понижается почти на $^1/_{130}$ градуса Цельзія. На этомъ основаніи, въ геологіи, часто при объясненіи передвиженій ледниковъ ссылаются на роль большихъ давленій, подъ вліяніемъ которыхъ въ нижнихъ слояхъ ледяныхъ массъ должно происходить таяніе. Въ виду этого, *R. W. Wood* предпринялъ недавно рядъ опытовъ надъ вліяніемъ давленія на ледъ. Сжимая при 0° ледъ въ стальной мортирѣ, имѣющей боковое тонкое отверстіе, до тѣхъ поръ, пока сквозь это послѣднее ледъ не станетъ какъ бы вытекать цилиндрикомъ, а также изучая процессъ проникания сквозь находящуюся подъ сильнымъ давленіемъ глыбу льда тяжелыхъ металлическихъ шариковъ, онъ пришелъ къ заключенію, что даже подъ давленіемъ въ 933 атмосферы ледъ не перестаетъ еще быть тѣломъ твердымъ. А такъ какъ возможно большая глубина ледниковъ (въ ледяной періодъ) не превосходила 2 миль, что соотвѣтствуетъ лишь давленію въ 266 атмосферъ на дно, то отсюда Wood приходитъ къ заключенію, что вышеприведенное объясненіе передвиженія глетчеровъ встрѣчаетъ существенное возраженіе. *Ш.*

Опредѣленіе механическаго эквивалента теплоты Д'Арсонваля. Работа перемѣщенія мѣдной трубки, вокругъ оси которой равномѣрно вращалось постоянное магнитное поле, измѣрялась весьма точно крученіемъ стальной проволоки, на которой была привѣшена трубка. Поле производилось сименсовой катушкой, которая вращалась внутри мѣдной трубки и черезъ которую проходилъ равномѣрный токъ отъ динамомашины. Нагрѣваніе отъ прохожденія тока, тренія о воздухъ и т. д. опредѣлялось безъ трубки.

Для измѣренія выдѣлившагося тепла служилъ килориметръ съ постоянной температурой, предложенный авторомъ въ 1877 году. Его калориметръ поддерживается при температурѣ окружающей среды при помощи охлаждающаго источника. Каждый литръ, вливающійся при 0° и выливающійся при окружающей температурѣ $t°$, содержитъ t калорій. Авторъ получалъ числа въ предѣлахъ 419 и 427. *П. П.*

Физическія свойства фтора были изучены Moissan'омъ, который, какъ извѣстно, изолировалъ этотъ элементъ еще въ 1886 году. Воспользовавшись тѣмъ, что чистый фторъ совершенно не дѣйствуетъ на платину при температурахъ ниже 100°, Moissan опредѣлилъ плотность и цвѣтъ фтора и изучилъ его спектръ. Плотность фтора опредѣлялась взвѣшиваніемъ его въ платиновомъ флаконѣ особаго устройства, причемъ получилось въ среднемъ число 1,265. Атомному вѣсу 19,05 отвѣчаетъ плотность 1,314. Для опредѣленія цвѣта фтора брались длинныя (0,5 — 1,0 метра) платиновыя трубки, наполненныя фторомъ и закрытыя на обоихъ концахъ прозрачными пластинками изъ фтористаго кальція (плавиковаго шпата). При разсматриваніи бѣлаго предмета черезъ 2 такія трубки, изъ которыхъ одна наполнена воздухомъ, а другая фторомъ, ясно видна зеленовато-желтая окраска фтора, далеко менѣе интенсивная, чѣмъ окраска хлора. Спектръ фтора состоитъ изъ 13 линій въ красной части. Кромѣ того Moissan пытался сгустить фторъ, но пока только установилъ, что подъ атмосфернымъ давленіемъ и при температурѣ — 95° фторъ еще не сгущается въ жидкость. *В. Г.*

Новое видоизмѣненіе фосфора. До сихъ поръ были извѣстны 3 видоизмѣненія фосфора: 1) желтый фосфоръ, 2) красный фосфоръ и 3) металлическій. Vernon (Phil. Mag.) открылъ теперь 4-ое видоизмѣненіе фосфора, получающееся изъ желтаго, но кристаллизующееся въ ромбическихъ призмахъ, (желтый фосфоръ кристаллизуется въ октаэдрахъ). Кромѣ того новое видоизмѣненіе плотнѣе желтаго фосфора: его плотность при 13° — 1,8272, тогда какъ плотность желтаго — 1,8177, и плавится при высшей температурѣ. Получается оно при медленномъ охлажденіи расплавленнаго желтаго фосфора ниже температуры его плавленія, т. е. при переохлажденіи жидкаго желтаго фосфора. *В. Г.*

Новѣйшіе успѣхи астрономіи. Радіальною скоростью звѣздъ называется быстрота, съ которою онѣ приближаются къ землѣ или удаляются отъ нея въ прямомъ отъ наблюдателя направленіи. Обыкновенными измѣреніями, конечно, такой скорости опредѣлить нельзя, такъ какъ звѣзда сохраняетъ на небѣ одно и то же положеніе. Но есть однако возможность косвеннымъ образомъ узнать эту скорость. Поясним это примѣромъ. Человѣкъ, стоящій на линіи желѣзной дороги, можетъ опредѣлить по свисту паровоза, приближается ли поѣздъ или удаляется. Если свистъ усиливается и вмѣстѣ съ тѣмъ повышается тономъ, то поѣздъ приближается и наоборотъ, при удаленіи поѣзда свистъ ослабѣваетъ и тонъ его понижается. Въ первомъ случаѣ число звуковыхъ волнъ, достигающихъ уха въ единицу времени, увеличивается, а во второмъ — уменьшается.

Тоже самое можно сказать о свѣтовыхъ колебаніяхъ. Если звѣзда приближается къ землѣ, то количество достигающихъ до земли свѣтовыхъ колебаній увеличивается, при удаленіи — уменьшается. При спектральномъ анализѣ исходящихъ отъ звѣзды лучей съ увеличеніемъ количества вибрацій, цвѣтныя полосы спектра постоянно удлиняются отъ краснаго конца къ фіолетовому и, наоборотъ, сокращаются отъ фіолетоваго къ красному съ уменьшеніемъ числа вибрацій. Соотвѣтственно передвиженію цвѣтныхъ полосъ двигаются и фраунгоферовы линіи, т. е. передвигаются въ сторону фіолетоваго конца, если свѣтъ приближаются и обратно, въ сторону краснаго, если онъ удаляется. Спектръ звѣзды затѣмъ сравниваютъ со спектромъ какого либо неподвижнаго земного источника свѣта и передвиженія фраунгоферовыхъ линій измѣряются при помощи фотографическихъ снимковъ. Эти уклоненія совершенно незамѣтны простому глазу, но подъ сильнымъ микроскопомъ ихъ можно наблюдать. Удалось вычислить, что уклоненіе линіи на двѣ сотыхъ миллиметра соотвѣтствуетъ скорости движенія звѣзды въ 5 верстъ въ секунду.

Позднѣйшія астрономическія наблюденія дали средства опредѣлять приблизительно величину и силу свѣта звѣздъ. Астрономъ Горъ (Gare) разсчиталъ, что блескъ солнца въ 26 разъ сильнѣе блеска нѣкоторыхъ звѣздъ первой величины. Каждое свѣтило созвѣздія Кассіопеи, кажущееся звѣздою третьяго разряда, равняется 0,32 величины солнца. Звѣзда Сиріусъ, самая свѣтлая въ созвѣздіи Пса, приближающаяся лѣтомъ къ солнцу, въ сорокъ разъ ярче послѣдняго. Относительно звѣзды третьей величины Кастора, Горъ разсчиталъ, что на ея разстояніи отъ земли блескъ солнца не превзошелъ бы свѣта звѣзды пятаго разряда.

Путемъ подобныхъ же вычисленій, тотъ же астрономъ пришелъ къ заключенію, что каждое свѣтило созвѣздія Большой Медвѣдицы въ сорокъ разъ больше солнца. *П. П.*

Новые астероиды. Въ послѣднее время были открыты еще 3 малыя планеты, а именно: планета (322) 27 ноября 1891 г. Борелли въ Марсели, планета (323) 22 декабря Вольфомъ въ Гейдельбергѣ и имъ же планета (324) 1 декабря.

Такимъ образомъ въ прошломъ году было открыто новыхъ планетъ изъ пояса астероидовъ 22.

Открытіе всѣхъ малыхъ планетъ распредѣляется между астрономами такъ: *Пализа* (Вѣна) 81, *Петерсъ* (Клинтонъ С. А. С. Ш.) 48, *Шарлуа* (Ницца) 25, *Лютеръ* (Дюззельдорфъ) 24, *Ватсонъ* (Аннъ Арборъ. С. А.) 22, *Борелли* (Марсель) 17. Всего въ Европѣ 244 и въ Америкѣ 74. *Бхм.*

Ударъ молніи въ низкія деревья. Хотя извѣстно, что молнія при ударѣ въ землю не всегда выбираетъ высокіе предметы, но падаетъ и на болѣе низкіе, но такъ какъ эти случаи сравнительно рѣдки, то они заслуживаютъ особеннаго вниманія.

Г-нъ *Громадко* описываетъ (Meteor. Zeitschr. VIII. p. 393,

1891) такой случай. 16 августа въ 11 часовъ до обѣда надъ Таборомъ разразилась гроза, и хотя облака и проходили надъ деревьями и зданіями, лежащими на 150 м. выше, однако молнія ихъ не поражала, а упала вблизи берега рѣки въ два небольшія деревца (груши), отстоящія другъ отъ друга на 200 м. Одно изъ деревцовъ было затронуто слегка, у другаго же была сбита вся листва. *Бхм.*

ЗАДАЧИ.

№ 316. Построить касательную къ данной окружности въ данной на ней точкѣ, не употребляя циркуля, при помощи одной только линейки. *Э. Госъ* (Харьковъ).

№ 317. Медіана гипотенузы есть средняя пропорціональная между катетами. Опредѣлить острые углы треугольника.

М. Фридманъ (Кіевъ).

№ 318. Биссекторъ прямого угла дѣлитъ гипотенузу въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Опредѣлить острые углы треугольника. *М. Фридманъ* (Кіевъ).

№ 319. Доказать, что при $\alpha > \beta > 0$ и $n > 0$, величина выраженія

$$\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}$$

заключается между $\frac{n+1}{n}\alpha$ и $\frac{n+1}{n}\beta$. (Заимств.) *П. П.*

№ 320. Рѣшить уравненіе

$$(x + a + b)^5 = x^5 + a^5 + b^5.$$

(Заимств.) *П. П.*

№ 321. Радіусы двухъ окружностей соотвѣтственно равны R и r, а разстояніе Oo между центрами ихъ равно d. Вторая окружность расположена внутри первой. Прямая Oo пересѣкаетъ при продолженіи первую окружность въ точкахъ A и B. ~~Вписать~~ въ большую окружность такой шестиугольникъ, что~~бы~~ стороны его ~~были~~ касательны къ меньшей окружности и ~~чтобы~~ прямая AB ~~была~~ есть его діагональ~~ю~~. Выразить стороны этого шестиугольника черезъ R, r и d. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

УПРАЖНЕНІЯ.

Прилагаю ниже нѣсколько примѣровъ, касающихся вопроса о преобразованіи однихъ уравненій въ другія, болѣе удобныя для рѣшенія.

1) Не рѣшая уравненія $x^2 - 7x + 10 = 0$, преобразовать его въ другое, корни котораго были бы на 4 больше корней даннаго:

Подставляя $y - 4$ вм. x, получимъ искомое уравненіе

$$y^2 - 15y + 54 = 0.$$

2) Рѣшить уравненіе $x^3 - 28x + 48 = 0$, не прибѣгая къ формулѣ кубическаго уравненія.

Замѣнимъ это уравненіе другимъ, корни котораго были бы въ a разъ меньше корней даннаго, для чего вмѣсто x подставимъ ay; получимъ:

$$a^3y^3 - 28ay + 48 = 0.$$

Дѣля это уравненіе на a^3, получимъ

$$y^3 - \frac{28}{a^2}y + \frac{48}{a^3} = 0.$$

Полагая $a = 2$, имѣемъ

$$y^3 - 7y + 6 = 0,$$

или

$$(y - 1)(y^2 + y - 6) = 0.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе ясно.

3) Рѣшить уравненіе

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Преобразуемъ это уравненіе въ другое, корни котораго были бы на 2 больше корней даннаго, для чего подставимъ $y - 2$ вмѣсто x; получимъ уравненіе

$$(y - 2)^3 + 2(y - 2)^2 + 3(y - 2) + 2 = 0,$$

или

$$y^3 - 4y^2 + 7y - 4 = 0,$$

или

$$y^3 - y^2 - 3y^2 + 3y + 4y - 4 = 0,$$

или

$$(y - 1))y^2 - 3y + 4) = 0.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе очевидно.

4) Рѣшить уравненіе

$$x^3 + (1 \pm \sqrt{3})x^2 + (2 \pm \sqrt{3})x + 2 = 0.$$

Преобразуемъ данное уравненіе въ другое, корни котораго будутъ равны квадратамъ корней даннаго уравненія, для чего подставимъ y вмѣсто x^2 или $y^{1/2}$ вмѣсто x; получимъ

$$y^{3/2} + (1 \pm \sqrt{3})y + (2 \pm \sqrt{3})y^{1/2} + 2 = 0.$$

Оставивъ члены съ дробными показателями въ лѣвой части, а остальные перенеся въ правую, возвысимъ обѣ части въ квадратъ; получимъ

$$y^3 + 3y - 4 = 0,$$

или

$$y^3 - y + 4y - 4 = 0,$$

или

$$(y - 1)(y^2 + y - 3) = 0.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе ясно.

5) Корни уравненія $x^3 + 3x - 4 = 0$ равны квадратамъ корней уравненія $y^3 + ay^2 + by + c = 0$. Опредѣлить a, b и c.

Полагая $y = x^{1/2}$, получимъ

$$x^{3/2} + ax + bx^{1/2} + c = 0.$$

Перенося члены съ дробными показателями въ одну часть уравненія, а остальные въ другую и возвышая обѣ части въ квадратъ, получимъ:

$$x^3 + x^2(2b - a^2) + x(b^2 - 2ac) - c^2 = 0.$$

Сравнивая это уравненіе съ $x^3 + 3x - 4 = 0$, находимъ

$$c = \pm 2.$$

$$2b - a^2 = 0$$

$$b^2 - 2ac = 3.$$

Если $c = 2$, то

$$2b = a^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

и

$$b^2 = 4a + 3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Скадывая (1) и (2) почленно и прибавляя въ обѣ части по 1, получимъ

$$(b + 1)^2 = (a + 2)^2,$$

а потому

$$\pm (b + 1) = \pm (a + 2),$$

откуда

$$b + 1 = a + 2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

или

$$b + 1 = - a - 2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Рѣшая (1) и (3), найдемъ

$$a = 1 \pm \sqrt{3}, \; b = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Рѣшая (1) и (4), найдемъ

$$a = - 1 \pm 7i, \;\; b = - 2 \pm 7i$$

Если $c = -2$, то подобнымъ же образомъ получимъ

$$a = 1 \pm 5i, \qquad b = -2 \pm 5i,$$

или

$$a = -1 \pm \sqrt{3}, \qquad b = 2 \pm \sqrt{3}.$$

А. Войновъ (Харьковъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 98 (2 сер.). Въ треугольникѣ ABC сторона $AB = c$ и $AC = b$. Чрезъ вершины A и B проходитъ окружность радіуса R, пересѣкающая сторону BC въ D. Черезъ A, C и D также проведена окружность, радіусъ которой требуется опредѣлить.

Пусть центры окружностей, описанныхъ на AB и AC, будутъ O и O'. Треугольникъ AOO' подобенъ ABC, потому что $\angle ABC = \angle AOO'$ и $\angle ACB = \angle AO'O$. Изъ подобія треугольниковъ имѣемъ

$$\frac{AO}{AO'} = \frac{AB}{AC} \quad \text{или} \quad \frac{R}{AO'} = \frac{c}{b},$$

откуда

$$AO' = \frac{b \cdot R}{c}.$$

А. Плетневъ (Спб.), *В. Роесовская, К. Щиголевъ, П. Писаревъ* (Курскъ), *М. Акопянцъ* (Тифлисъ).

№ 141 (2 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{a}{x^4+mx^3+px^2+mx+1} + \frac{b}{x^4+nx^3+px^2+nx+1} = \frac{c}{x^3+x}.$$

Раздѣливъ знаменателей на x^2 и положивъ

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \qquad x + \frac{1}{x} = y,$$

получимъ

$$\frac{a}{y^2+my+p-2} + \frac{b}{y^2+ny+p-2} = \frac{c}{y}.$$

Раздѣливъ знаменателей на y и положивъ $y + \frac{p-2}{y} = z$, находимъ

$$\frac{a}{z+m} + \frac{b}{z+n} = c,$$

Такимъ образомъ данное уравненіе приводится къ 3 квадратнымъ.

И. Вонсикъ, *Г. Ширинкинъ* (Воронежъ), *А. Охитовичъ* (Спб.), *Б. Брутъ* (Пермь).

№ 172 (2 сер.) Начертить окружность, проходящую черезъ данную точку и пересѣкающую двѣ данныя окружности подъ прямыми углами.

Такъ какъ радіусы искомой окружности, проведенные въ точки пересѣченія ея съ данными окружностями, представляютъ равныя касательныя, то, слѣдовательно, центръ искомой окружности лежитъ на радикальной оси; кромѣ того, эта окружность пройдетъ чрезъ точку, симметричную данной относительно радикальной оси. Поэтому, пусть данныя окружности O и O′, данная точка A, и симметричная ей B. На прямой AO найдемъ точку D, удовлетворяющую, по свойству касательной, равенству $r^2 =$ $= AO \,.\, OD$ (r — радіусъ окружности O). Точка D, слѣдовательно, лежитъ на искомой окружности. Такимъ образомъ остается провести окружность чрезъ точки A, B и D.

И. Бискъ (Кіевъ), *Ц. Архиповъ* (Донск. К. К.)

№ 194 (2 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{9\mathrm{Sin}x - 24\mathrm{Sin}^3x + 16\mathrm{Sin}^5x}{3\mathrm{Cos}x - 16\mathrm{Cos}^3\mathrm{s} + 16\mathrm{Cos}^5x} = 1.$$

Данное уравненіе можно представить такъ:

$$\frac{\mathrm{Sin}x + 3\mathrm{Sin}x - 4\mathrm{Sin}^3x + 5\mathrm{Sin}x - 20\mathrm{Sin}^3x + 16\mathrm{Sin}^5x}{\mathrm{Cos}x + 4\mathrm{Cos}^3x - 3\mathrm{Cos}x + 5\mathrm{Cos}x - 20\mathrm{Cos}^3x + 16\mathrm{Cos}^5x} = 1$$

или

$$\frac{\mathrm{Sin}x + \mathrm{Sin}3x + \mathrm{Sin}5x}{\mathrm{Cos}x + \mathrm{Cos}3x + \mathrm{Cos}5x} = 1,$$

или

$\mathrm{tg}3x = 1.$ (См. № 432 (1 сер.) VIII сем. № 85).

Слѣдовательно $x = 15°$.

А. П. (Пенза), *Я. Тепляковъ* (Радомысль).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса 18 Мая 1892 г.
Типо-литографія Штаба Одесскаго военнаго Округа. Тираспольская, № 14.

Обложка
ищется

Обложка
пщется