Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXI Сем. № 8.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 248.

Нѣкоторыя приложенія математической логики къ ариѳметикѣ.

(Окончаніе).*

14. Формула (24) даетъ возможность сосчитать число элементовъ въ классѣ

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n ,$$

если мы знаемъ число элементовъ въ каждомъ изъ классовъ

$$A_1,\ A_2, \ldots A_{n-1},\ A_n , \qquad (31)$$

равно какъ и число элементовъ во всевозможныхъ произведеніяхъ по два, по три и т. д., наконецъ по $n—1$ классовъ изъ этихъ n классовъ, а также число элементовъ въ произведеніи всѣхъ этихъ классовъ.

Если классы (31), взятые во всевозможныхъ двойныхъ сочетаніяхъ, не имѣютъ общихъ элементовъ, то уравненіе (24) обращается въ уравненіе (10).

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ всѣ ${}_nP_2$ суть логическіе нули, а потому и (см. уравненіе 1) $N({}_nP_2)$ суть нули. Каждое же изъ ${}_nP_m$ при

*) См. „Вѣст. Оп. Физ.“ № 247.

$m > 2$ можетъ быть разбито такъ на два множителя, чтобы одинъ изъ этихъ множителей былъ однимъ изъ ${}_nP_2$, а потому, при $m > 2$, имѣемъ точно также (см. ур. 8):

$$ {}_nP_m = 0. $$

Поэтому формула 24 даетъ въ этомъ случаѣ

$$ N\sum_{k=1}^{k=n} A_k = \Sigma N({}_nP_1) = \sum_{k=1}^{k=n} N(A_k), $$

что совпадаетъ съ ур-іемъ (10).

15. Наоборотъ, если

$$ N(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n) $$

выражается формулой (10), то классы

$$ A_1,\ A_2 \ldots A_{n-1},\ A_n, $$

взятые по два, не имѣютъ общихъ элементовъ.

Дѣйствительно, примѣнивъ къ суммѣ двухъ классовъ

$$ A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} \text{ и } A_n $$

формулу (21), можно преобразовать

$$ N(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n) $$

къ виду:

$$ N(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n) = N[(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) + A_n] = $$
$$ = N(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) + N(A_n) - N[(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1})A_n] = $$
$$ = N(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) + N(A_n) - N(A_1A_n + A_2A_n + \ldots + A_{n-1}A_n). $$

Прилагая послѣдовательно такое же преобразованіе къ

$$ N(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}), $$

затѣмъ къ

$$ N(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-2}) $$

и т. д., получимъ:

$$ N(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n) = N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_n) - $$
$$ -[N(A_1A_2) + N(A_1A_2 + A_2A_3) + N(A_1A_4 + A_2A_4 + A_3A_4) + N(A_1A_n + A_2A_n + $$
$$ + \ldots + A_{n-1}A_n)]. $$

Если имѣетъ мѣсто уравненіе (10), то все выраженіе, стоящее въ послѣднемъ уравненіи въ большихъ скобкахъ, равно нулю, для чего каждый изъ классовъ, содержащихся въ этомъ выраженіи внутри малыхъ скобкахъ, долженъ быть логическимъ нулемъ, а потому

$$ A_1A_2 = 0 $$

$$ A_1A_3 + A_2A_3 = 0 $$

$$ \cdots\cdots\cdots $$

$$ A_1A_n + A_2A_n + \ldots + A_{n-1}A_n = 0, $$

откуда слѣдуетъ, что отдѣльно*)

$$A_1A_2=0,\ A_1A_3=0,\ A_2A_3=0, \ldots\ldots A_1A_n=0,\ A_2A_n=0,\ A_{n-1}A_n=0.$$

Эти равенства показываютъ, что классы

$$A_1,\ A_2, \ldots\ldots A_{n-1},\ A_n\ ,$$

взятые по два, не имѣютъ общихъ элементовъ.

16. Чтобы показать примѣненіе формулы 24, рѣшимъ слѣдующую задачу.

Сосчитать, сколько всѣхъ чиселъ, не превосходящихъ 10000 и дѣлящихся или на 10, или на 3, или на 28.

Условимся классъ, элементы котораго суть всѣ числа, не превосходящія 10000 и дѣлящіяся безъ остатка на цѣлое число m, обозначать черезъ $A^{(m)}$. Тогда задача наша сводится къ отысканію

$$N(A^{(10)}+A^{(3)}+A^{(28)})$$

По формулѣ (24)

$$N(A^{(10)}+A^{(3)}+A^{(28)})=$$
$$=N(A^{(10)})+N(A^{(3)})+N(A^{(28)})-N(A^{(10)}A^{(3)})-N(A^{(3)}A^{(28)})-N(A^{(28)}A^{(10)})+$$
$$+N(A^{(10)}A^{(3)}A^{(28)}).$$

Классъ чиселъ, дѣлящихся одновременно на нѣсколько данныхъ чиселъ, равенъ, какъ это извѣстно изъ ариѳметики, классу чиселъ дѣлящихся на наименьшее кратное этихъ нѣсколькихъ чиселъ.

Поэтому

$$A^{(10)}A^{(3)}=A^{(30)};\ A^{(3)}A^{(28)}=A^{(84)};\ A^{(28)}A^{(10)}={}^{(140)}$$
$$A^{(10)}A^{(3)}A^{(28)}=A^{(420)},$$

а слѣдовательно

$$N(A^{(10)}+A^{(3)}+A^{(28)})=N(A^{(10)})+N(A^{(3)})+N(A^{(28)})-N(A^{(30)})-N(A^{(84)})-$$
$$-N(A^{(140)})+N(A^{(420)});$$

или же, замѣчая, что число цѣлыхъ чиселъ, дѣлящихся на цѣлое число a и не превосходящихъ положительнаго числа L, равно $E\dfrac{L}{a}$, находимъ:

$$N(A^{(10)}+A^{(3)}+A^{(28)})=E({}^{10000}/_{10})+E({}^{10000}/_{3})+E({}^{10000}/_{28})-E({}^{10000}/_{30})-$$
$$-E({}^{10000}/_{84})-E({}^{10000}/_{140})+E({}^{10000}/_{420}),$$

что даетъ, послѣ надлежащихъ вычисленій,

$$N(A^{(10)}+A^{(3)}+A^{(28)})=4190.$$

*) Логическая сумма нѣсколькихъ классовъ обращается въ логическій нуль лишь тогда, когда каждый изъ слагаемыхъ классовъ представляетъ собою логическій нуль.

17. Уравненіе (24) можетъ послужить также для вывода любопытнаго ариѳметическаго тожества.

Рѣшая задачу: найти число всѣхъ чиселъ, не превосходящихъ даннаго цѣлаго числа n и дѣлящихся на всѣ простыя числа

$$2,\ 3\ \ldots\ldots,$$

не превышающія этого цѣлаго числа n, мы найдемъ, что искомое число равно $n-1$.

Съ другой стороны, примѣняя формулу (24) и замѣчая, что наименьшее кратное нѣсколькихъ простыхъ чиселъ равно ихъ произведенію, мы найдемъ:

$$n-1=\Sigma E\left(\frac{n}{p_1}\right)-\Sigma E\left(\frac{n}{p_2}\right)+\ldots\ldots+(-1)^{m-1}\Sigma E\left(\frac{n}{p_m}\right)+\ldots\ldots+$$

$$+(-1)^{\varphi-1}\Sigma E\left(\frac{n}{p_\varphi}\right), \qquad (31)$$

гдѣ φ обозначаетъ число всѣхъ простыхъ чиселъ, не превышающихъ n, p_1—какое-либо изъ этихъ простыхъ чиселъ, p_2—какое-нибудь двойное, p_3—тройное и т. д. произведеніе, составленное изъ чиселъ этого ряда. Значки Σ, какъ всегда, обозначаютъ, что надо брать сумму всевозможныхъ выраженій, стоящихъ подъ этимъ знакомъ, какія только можно составить.

18. Пусть рядъ

$$x_1,\ x_2\ \ldots\ldots\ x_k$$

есть рядъ всѣхъ простыхъ чиселъ, содержащихся между n и $2n$, а рядъ

$$p_1^{(1)},\ p_1^{(2)}\ldots\ p_1^{(\varphi)}$$

рядъ всѣхъ не превосходящихъ n простыхъ чиселъ.

Рядъ

$$p_1^{(1)},\ p_1^{(2)}\ldots\ p_1,^{(\varphi)}x_1,\ x_2\ldots\ x_k \qquad (32)$$

представитъ тогда собою всѣ $\varphi+k$ простыхъ чиселъ, не превышающихъ $2n$.

Измѣнимъ въ уравненіи (31) n на $2n$.

Тогда получимъ:

$$2n-1=\Sigma E\left(\frac{2n}{q_1}\right)-\Sigma E\left(\frac{2n}{q_2}\right)+\ldots\ldots+(-1)^{m-1}\Sigma E\left(\frac{2n}{q_m}\right)+\ldots\ldots+$$

$$+(1)^{\varphi+k-1}\Sigma E\left(\frac{2n}{q_{\varphi+k}}\right), \qquad (33)$$

гдѣ различныя q_1 суть различныя простыя числа въ ряду (32), q_2—всевозможныя двойныя, q_3 — тройныя и т. д. произведенія, какія только можно составить изъ чиселъ этого ряда.

Разбивая

$$\Sigma \mathrm{E}\left(\frac{2n}{q_1}\right)$$

надлежащимъ образомъ на двѣ суммы, получимъ:

$$\Sigma \mathrm{E}\left(\frac{2n}{q_1}\right)=\Sigma \mathrm{E}\left(\frac{2n}{p_1}\right)+\sum_{l=1}^{l=k} \mathrm{E}\left(\frac{2n}{x_l}\right),$$

гдѣ p_1 имѣетъ то же значенiе, какъ и въ уравненiи (31).

Но такъ какъ

$$2n > x_1 > n,$$

то

$$\mathrm{E}\,\frac{2n}{x_1}=1,$$

а потому

$$\sum_{l=1}^{l=k} \mathrm{E}\left(\frac{2n}{x_l}\right)=k.$$

Поэтому

$$\Sigma \mathrm{E}\left(\frac{2n}{q_1}\right)=\Sigma \mathrm{E}\left(\frac{2n}{p_1}\right)+k \qquad (34)$$

Возьмемъ теперь выраженiе

$$\Sigma \mathrm{E}\left(\frac{2n}{q_m}\right)$$

съ указателемъ m, удовлетворяющимъ неравенствамъ

$$\varphi \geqslant m > 1.$$

Представимъ это выраженiе въ видѣ

$$\Sigma \mathrm{E}\left(\frac{2n}{q_m}\right)=\Sigma \mathrm{E}\left(\frac{2n}{p_m}\right)+\Sigma \mathrm{E}\left(\frac{2n}{p_{m-r}\,.\,s_r}\right),$$

гдѣ p_m и p_{m-r} имѣютъ значенiе, указанное въ § 17, а s_r обозначаетъ произведенiе какихъ либо r чиселъ, взятыхъ изъ ряда

$$x_1,\ x_2 \ldots . x_{k-1},\ x_k\,. \qquad (35)$$

При этомъ значокъ r удовлетворяетъ неравенствамъ

$$r > 0;\ k \geqslant r;\ r \leqslant m.$$

Каждое изъ выраженiй $p_{m-r}\,.\,s_r$ болѣе $2n$, такъ какъ въ немъ есть хоть одинъ множитель, взятый изъ ряда (35) и потому большiй n и такъ какъ въ немъ, при общемъ числѣ множителей равномъ m, а слѣдовательно большемъ единицы, въ этомъ выраженiи всегда есть еще хоть одинъ множитель не меньшiй 2-хъ, взятый изъ ряда (32).

Итакъ

$$p_{m-r}\,.\,s_r > 2n,$$

а потому

$$E\left(\frac{2n}{p_{m-r}\cdot s_n}\right)=0.$$

Поэтому при

$$\varphi \geqslant m > 1$$

$$\Sigma E\left(\frac{2n}{q_m}\right)=\Sigma E\left(\frac{2n}{p_m}\right). \qquad (36)$$

Разсмотримъ теперь

$$\Sigma E\left(\frac{2n}{q_m}\right)$$

при

$$k+\varphi \geqslant m > \varphi$$

Произведенiе q_m, при $m>\varphi$, содержитъ въ себѣ хоть одно число изъ ряда (35); а такъ какъ въ этомъ произведенiи есть еще навѣрно одинъ множитель, не меньшiй 2-хъ, то всякое изъ произведенiй q_m болѣе $2n$.

Поэтому, при $m>\varphi$,

$$\Sigma E\left(\frac{2n}{q_m}\right)=0 \qquad (37).$$

Преобразуя уравненiе (33) при помощи формулъ (34), (36) и (37), получимъ:

$$2n-1=k+\Sigma E\left(\frac{2n}{p_1}\right)-\Sigma E\left(\frac{2n}{p_2}\right)+\Sigma E\left(\frac{2n}{p_3}\right)+\ldots+$$

$$+(-1)^{m-1}\Sigma E\left(\frac{2n}{p_m}\right)+\ldots+(-1)^{\varphi-1}\Sigma E\left(\frac{2n}{p_\varphi}\right),$$

гдѣ p_1, p_2.... сохраняютъ значенiе § 17-го.

Изъ этой формулы находимъ:

$$k=2n-1-\Sigma E\left(\frac{2n}{p_1}\right)+\Sigma E\left(\frac{2n}{p_2}\right)-\ldots+(-1)^m\,\Sigma E\left(\frac{2n}{p_m}\right)+$$

$$+\ldots+(-1)^\varphi\,\Sigma E\left(\frac{2n}{p_\varphi}\right). \qquad (38)$$

Уравненiе (38) даетъ возможность вычислить, зная всѣ простыя числа, не превосходящiя n, число простыхъ чиселъ, заключенныхъ между n и $2n$.

Такъ, напримѣръ, простыя числа, не превосходящiя 6, суть

2, 3, 5.

Ихъ двойныя произведенiя — 6, 10, 15; тройное — 30.

По формулѣ (38) имѣемъ:

$$k = 12 - 1 - \left(\mathrm{E}\frac{12}{2} + \mathrm{E}\frac{12}{3} + \mathrm{E}\frac{12}{5}\right) + \left(\mathrm{E}\frac{12}{6} + \mathrm{E}\frac{12}{10} + \mathrm{E}\frac{12}{15}\right) - \mathrm{E}\frac{12}{30} =$$

$$= 12 - 1 - (6 + 4 + 2) + (2 + 1 + 0) - 0 = 2.$$

Дѣйствительно, между числами 6 и 12 заключается лишь два простыхъ числа

7 и 11.

Е. Буницкій (Одесса).

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРІЯ ЭЛЛИПСА.

(Отвѣтъ на тему, предложенную профессоромъ Ермаковымъ въ № 110 „Вѣстника").

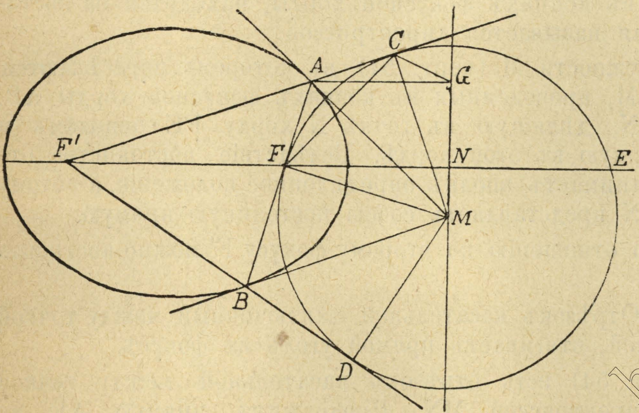
(Окончаніе).*

VII. Фокусы и директриссы.

60. Хорду, проходящую черезъ фокусъ, назовемъ фокусной.

Теорема. Фокусная хорда перпендикулярна къ прямой, соединяющей фокусъ съ точкой пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ концахъ хорды.

Пусть AB (черт. 54) есть хорда, проходящая черезъ фокусъ F, а FM—прямая, соединяющая фокусъ съ точкой M, въ которой пересѣкаются касательныя въ концахъ фокусной хорды.



Фиг. 54.

По теоремѣ § 38 прямая FM дѣлитъ пополамъ уголъ между лучами FA и FB, равный двумъ прямымъ; поэтому прямая FM перпендикулярна къ прямой AB.

61. **Теорема.** Если мы точку пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ концахъ фокусной хорды, примемъ за центръ, а пря-

*) См. „Вѣстника Оп. Физики" №№ 239, 240, 242, 243, 244, 245, 246 и 247.

мую, соединяющую эту точку съ фокусомъ, за радіусъ и начертимъ кругъ, то онъ коснется продолженія прямыхъ, соединяющихъ концы хорды съ фокусомъ, и отсѣчетъ отъ главной*) оси постоянный отрѣзокъ.

Пусть AB—(черт. 54) фокусная хорда, а M—точка встрѣчи касательныхъ, проведенныхъ въ концахъ хорды AB. На продолженія прямыхъ F′A и F′B опустимъ изъ точки M перпендикуляры MC и MD. Такъ какъ по предыдущей теоремѣ прямыя MF и AB взаимно перпендикулярны, и такъ какъ (§ 26) касательныя AM и BM суть соотвѣтственно биссекторы угловъ FAC и FBD, то

$$MC = MF = MD.$$

Поэтому окружность M радіуса MF касается прямыхъ AB, AC и BD въ точкахъ F, C и D. Такъ какъ черезъ точку F′ проходятъ уже двѣ касательныя къ окружности M — F′C и F′D, то прямая F′F есть сѣкущая, а потому она встрѣчаетъ окружность M еще въ одной точкѣ E. По свойству касательной

$$F'E \,.\, F'F = FC^2,$$

или,—принимая во вниманіе, что, вслѣдствіе равенства прямоугольныхъ треугольниковъ AMF и AMC (§ 26) отрѣзки AF и AC равны, а потому

$$F'C = F'A + AC = F'A + AF = 2a, —$$

$$F'E \,.\, F'F = (2a)^2.$$

Изъ этого уравненія вытекаетъ, что отрѣзокъ F′E, а вмѣстѣ съ нимъ и отрѣзокъ EF, равный

$$F'E - FF'$$

имѣетъ постоянную длину.

Слѣдствіе 1-е. Геометрическое мѣсто точки пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ концахъ фокусной хорды, находится на постоянной прямой, которая называется директриссой.

Изъ центра окружности M (черт. 54), въ которомъ пересѣкаются касательныя AM и BM, проведенныя въ концахъ фокусной хорды AB, проведемъ прямую MN, дѣлящую въ точкѣ N хорду FE пополамъ и потому перпендикулярную къ этой хордѣ. Вслѣдствіе постоянства отрѣзка FE точка N занимаетъ вполнѣ опредѣленное положеніе, а потому и перпендикуляръ MN представляетъ собою постоянную прямую.

Примѣчаніе. По отношенію ко второму фокусу F′ можно построить вторую директриссу.

Слѣдствіе 2-е. Отрѣзокъ касательной, заключенный между точкой касанія и директриссой, стягиваетъ прямой уголъ въ фокусѣ.

Пусть AM (черт. 54) есть отрѣзокъ касательной между точкой прикосновенія A и директриссой MN. Продолжимъ прямую AF до

*) Главная ось—тоже самое, что большая ось.

встрѣчи ея съ эллипсомъ въ точкѣ B и проведемъ касательную къ эллипсу въ этой точкѣ.

Эта касательная, директрисса MN и касательная AM пересѣкаются, согласно съ предыдущимъ слѣдствіемъ, въ одной точкѣ, а потому точка M, въ которой, по предположенію, встрѣчаются директрисса и касательная къ эллипсу въ точкѣ A, есть ни что иное, какъ точка встрѣчи касательныхъ, проведенныхъ къ эллипсу въ точкахъ A и B. Теперь ясно, что уголъ AFM равенъ прямому, такъ какъ онъ представляетъ собой уголъ между фокусной хордой и прямой, соединяющей фокусъ съ точкой пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ концахъ хорды (§ 60).

62. **Теорема.** Отношеніе разстояній каждой точки эллипса отъ фокуса и отъ директриссы есть величина постоянная.

Изъ точки эллипса A (черт. 54) опустимъ перпендикуляръ AG на директриссу, относящуюся къ фокусу F. Затѣмъ проведемъ въ точкѣ A касательную до встрѣчи ея съ директриссою въ точкѣ M. Изъ точки M опустимъ перпендикуляръ MC на прямую AF′ и проведемъ отрѣзки CG, CF, AF и MF. Четыреугольникъ ACMF есть вписуемый, такъ какъ уголъ MCA прямой по построенію, а уголъ AFM прямой, согласно со вторымъ слѣдствіемъ § 61. Такъ какъ уголъ AGM тоже прямой по построенію, то четыреугольникъ AGMF также вписуемый. Такимъ образомъ всѣ пять точекъ A, F, M, C, G лежатъ на одной окружности. Вписанные въ эту окружность углы AFC и AGC равны, какъ опирающіеся на общую хорду AC*).

Изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ AFM и ACM (§ 26) слѣдуетъ, что отрѣзки AF и AC равны, а потому углы AFC и ACF также равны; но выше было доказано, что уголъ AFC равенъ углу AGC; поэтому

$$\angle ACF = \angle AGC, \text{ или } \angle F'CF = \angle AGC.$$

Кромѣ того,

$$\angle CAG = \angle CF'F,$$

такъ какъ прямыя AG и F′F, будучи перпендикулярны (§ 61, сл. 1) къ одной и той же прямой MN, параллельны. Такимъ образомъ углы F′CF и CF′F треугольника FCF′ равны соотвѣтственно угламъ AGC и CAG треугольника GCA, а потому эти треугольники подобны, откуда слѣдуетъ, что

$$\frac{F'C}{AG} = \frac{FF'}{AC};$$

но

$$AC = AF,\ FF' = 2c,$$

и

$$F'C = F'A + AC = F'A + AF = 2a,—$$

*) Слѣдуетъ доказать, кромѣ того, что точки F и G лежатъ по одну сторону прямой AC; это легко доказать способомъ доказательства отъ противнаго, руководствуясь, тѣмъ, что уголъ AGN—прямой, а тотъ изъ четырехъ угловъ между директриссой и прямой F′A, внутри котораго ложитъ фокусъ F,—острый.

слѣдовательно

$$\frac{AF}{AG}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

Для концовъ большой оси треугольники CFF' и ACG исчезаютъ, а потому для этихъ точекъ эллипса справедливость теоремы слѣдуетъ провѣрить, вычисливъ длины радіусовъ векторовъ, соединяющихъ концы большой оси съ фокусомъ, и разстояніе директриссы отъ фокуса.

Въ этомъ частномъ случаѣ найдемъ, что (§ 2)

$$AF=a\pm c,$$

а

$$AG^{*)}=\frac{a(a\pm c)}{c},$$

какъ легко это вычислить при помощи уравненій (см. §§ 61 и 62)

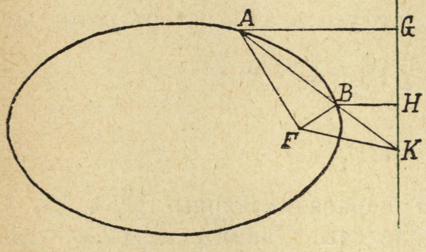
$$F'E\,.\,F'F=(2a)^2$$

и

$$FN=\frac{FE}{2}.$$

§ 63. **Теорема.** Прямая, соединяющая фокусъ и точку пересѣченія продолженія хорды съ директриссою, будетъ внѣшнимъ биссекторомъ угла между прямыми, соединяющими фокусъ съ концами хорды.

Пусть AB есть данная хорда, продолженіе которой встрѣчаетъ директриссу, относящуюся къ фокусу F, въ точкѣ K (черт. 55). Опустивши изъ концовъ хорды AB перпендикуляры AG и BH на директриссу, получимъ (§ 62)



Фиг. 55.

$$\frac{AF}{AG}=\frac{c}{a} \text{ и } \frac{BF}{BH}=\frac{c}{a},$$

а потому

$$\frac{AF}{AG}=\frac{BF}{BH},$$

или

$$\frac{AF}{AG}=\frac{AG}{BH}.$$

Но изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ BHK и AGK имѣемъ:

$$\frac{AG}{BH}=\frac{AK}{BK};$$

*) Въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ точка G совпадаетъ съ точкой N чертежа.

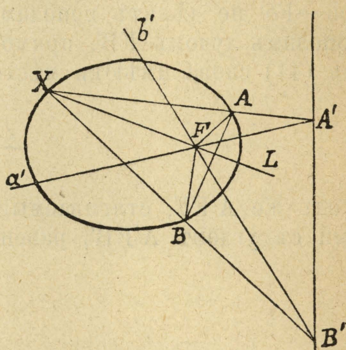
слѣдовательно

$$\frac{AF}{BF}=\frac{AK}{BK};$$

это уравненіе показываетъ*), что прямая FK есть внѣшній биссекторъ угла AFB.

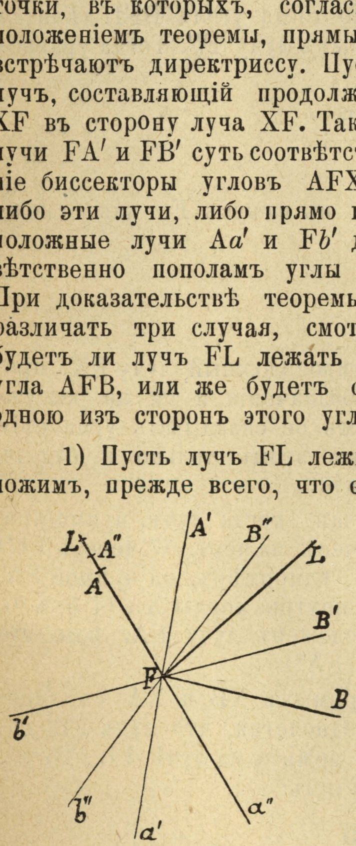
§ 64. **Теорема.** *Уголъ, вписанный въ эллипсъ и опирающійся на постоянную хорду, отсѣкаетъ отъ директриссы отрѣзокъ, стягивающій въ фокусѣ уголъ, который равенъ либо половинѣ угла, стягиваемаго въ фокусѣ постоянною хордою, либо углу, дополняющему эту половину до двухъ прямыхъ.*

Пусть AB—постоянная хорда (черт. 56), AXB—вписанный уголъ, опирающійся на эту хорду; обозначимъ соотвѣтственно черезъ A′ и B′ точки, въ которыхъ, согласно съ предположеніемъ теоремы, прямыя XA и XB встрѣчаютъ директриссу. Пусть FL есть лучъ, составляющій продолженіе отрѣзка XF въ сторону луча XF. Такъ какъ (§ 63) лучи FA′ и FB′ суть соотвѣтственно внѣшніе биссекторы угловъ AFX и BFX, то либо эти лучи, либо прямо имъ противоположные лучи Aa' и Fb' дѣлятъ соотвѣтственно пополамъ углы AFL и BFL. При доказательствѣ теоремы мы будемъ различать три случая, смотря по тому, будетъ ли лучъ FL лежать внутри, внѣ угла AFB, или же будетъ совпадать съ одною изъ сторонъ этого угла.



Фиг. 56.

1) Пусть лучъ FL лежитъ внутри угла AFB (черт. 57). Предположимъ, прежде всего, что стороны угла AXB встрѣчаютъ директриссу въ двухъ точкахъ A′ и B′ расположенныхъ такъ, что лучи FA′ и FB′ дѣлятъ пополамъ углы AFL и BFL. Тогда (§ 63)



Фиг. 57.

$$\left.\begin{aligned}\angle A'FL&=\frac{\angle AFL}{2}\\ \angle B'FL&=\frac{\angle BFL}{2}\end{aligned}\right\}\quad(41)$$

Сложивши эти равенства, получимъ:

$$\angle A'FB'=\frac{\angle AFB}{2}.$$

Пусть теперь стороны вписаннаго угла AXB встрѣчаютъ директриссу въ такихъ двухъ точкахъ a' и b', что не лучи Fa' и Fb', но

*) См. „Элементарная Геометрія“ Киселева (1892 г.), стр. 124, § 199.

прямо противоположные имъ лучи FA' и FB' дѣлятъ соотвѣтственно пополамъ углы AFL и BFL. Въ этомъ случаѣ уравненія (41) попрежнему даютъ

$$\angle A'FB' = \frac{\angle AFB}{2},$$

а такъ какъ противоположные углы $a'Fb'$ и $A'FB'$ равны, то опять

$$\angle a'Fb' = \frac{\angle AFB}{2}.$$

Пусть, наконецъ, стороны угла AXB встрѣчаютъ директриссу въ такихъ двухъ точкахъ A' и B', что одинъ изъ лучей FA' и FB',—напримѣръ, FA', дѣлитъ соотвѣтствующій уголъ AFL пополамъ, а другой—Fb' не дѣлитъ пополамъ угла BFL. Но тогда уголъ BFL дѣлится пополамъ лучомъ FB', прямо противоположнымъ лучу Fb'. Тогда уравненія (41) снова имѣютъ мѣсто, а потому

$$\angle A'FB' = \frac{\angle AFB}{2};$$

уголъ же $A'Fb'$, стягиваемый отрѣзкомъ $A'b'$ въ фокусѣ F, какъ смежный съ угломъ $A'FB'$, равенъ

$$2d - \frac{\angle AFB}{2}$$

2) Пусть теперь лучъ FL, прямо противоположный лучу FX, проходитъ внѣ угла AFB. Сохраняя тѣ же обозначенія и тѣ же разсужденія при доказательствѣ, мы должны будемъ не складывать уравненія (41), но вычитать ихъ одно изъ другого; въ этомъ только и будетъ разница между первымъ и вторымъ случаемъ.

3) Разсмотримъ, наконецъ, третій случай—когда лучъ, прямо противоположный лучу FX (этотъ лучъ обозначенъ на черт. 57 черезъ FL') лежитъ на одной изъ прямыхъ FA или FB, напримѣръ, на прямой FA. Такъ какъ фокусъ F можетъ лежать лишь внутри хорды XA (§ 5, § 9), то лучъ FX долженъ быть прямо противоположенъ лучу FA, или, что все равно, лучъ FL, совпадаетъ съ лучомъ FA*).

Обозначимъ теперь точки встрѣчи прямыхъ XB и XA съ директрисой соотвѣтственно черезъ B'' и A'', предполагая, что лучъ FB'' дѣлитъ уголъ $L'FB$ пополамъ, и что точка A'' лежитъ на лучѣ FL'. Тогда, примѣняя къ хордѣ XB теорему § 63, получимъ:

$$\angle A''FL' = \frac{\angle AFB}{2}.$$

---

*) Предполагается, что точка X не можетъ совпадать съ точкой A, такъ какъ тогда сторона AX угла AXB обращается въ нуль и не имѣетъ никакого опредѣленнаго направленія; впрочемъ, можно распространить теорему и на этотъ случай, замѣняя обратившуюся въ нуль хорду XA касательной въ точкѣ A.

Предположимъ теперь (черт. 57), что прямая XA встрѣчаетъ директриссу въ точкѣ a'', лежащей на лучѣ, противоположномъ лучу FL', а прямая XB—въ точкѣ b'', расположенной такъ, что лучъ Fb'' не дѣлитъ угла $L'FB$ пополамъ; тогда лучъ FB'', противоположный лучу Fb'', дѣлитъ этотъ уголъ пополамъ; слѣдовательно (§ 63):

$$\angle a''Fb'' = \angle AFB'' = \frac{\angle AFB}{2}.$$

Наконецъ, если прямыя XA и XB встрѣчаютъ директриссу въ точкахъ A'', лежащей на лучѣ FA,—и b'', расположенной такъ, что не лучъ Fb'' дѣлитъ уголъ $L'FB$ пополамъ, но противоположный ему лучъ FB'', то, опять примѣняя къ хордѣ XB теорему § 63, найдемъ:

$$\angle A''FB'' = \frac{\angle AFB}{2}$$

и

$$\angle A''Fb'' = 2d - \angle A''FB'' = 2d - \frac{\angle AFB}{2}$$

Если соотвѣтственныя точки встрѣчи прямыхъ XA и XB съ директриссой, а именно точки a'' и B'' расположены такъ, что лучъ FB'' дѣлитъ уголъ $L'FB$ пополамъ, но a'' лежитъ на лучѣ, противоположномъ лучу FA, то опять

$$\angle a''FB'' = 2d - \angle AFB'' = 2d - \frac{\angle AFB}{2}.$$

Примѣчаніе. При доказательствѣ предыдущей теоремы, мы разобрали всѣ возможныя комбинаціи расположенія лучей, исходящихъ изъ фокуса F. Но вопросъ, всѣ ли такія комбинаціи могутъ имѣть мѣсто въ дѣйствительности, остается невыясненнымъ, а потому вышеприведенное доказательство не даетъ точнаго указанія, въ какихъ случаяхъ искомый уголъ равенъ углу

$$\frac{AFB}{2},$$

и въ какихъ случаяхъ—его дополненію до $2d$. Предоставляя читателю самому произвести точный анализъ теоремы, мы приводимъ лишь окончательный результатъ.

Проведемъ черезъ концы хорды AB *двѣ прямыя, параллельныя директриссѣ.*

Искомый уголъ равенъ

$$2d - \frac{\angle AFB}{2}$$

или просто

$$\frac{\angle AFB}{2}$$

смотря по тому, лежитъ ли вершина вписаннаго угла X *между двумя вышеупомянутыми параллельными прямыми или не лежитъ между ними.*

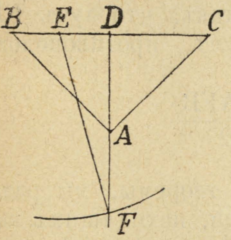
Такимъ образомъ, если эти двѣ параллельныя прямыя совпадаютъ, т. е. если хорда AB сама параллельна директриссѣ, то искомый уголъ всегда равенъ

$$\frac{\angle AFB}{2}.$$

Совѣтуемъ читателю, пользуясь этимъ указаніемъ, составить себѣ чертежи, соотвѣтствующіе различнымъ случаямъ теоремы § 64; это значительно облегчитъ пониманіе доказательства.

Приближенное построеніе правильнаго вписаннаго девятиугольника.

Если радіусъ окружности примемъ за единицу, то длина стороны правильнаго вписаннаго въ эту окружность девятиугольника будетъ больше 0,6840 и меньше 0,6841. Для построенія прямолинейнаго отрѣзка, длина котораго заключается между этими предѣлами, поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Строимъ прямоугольный треугольникъ ABC, катеты котораго AB и AC равны единицѣ. Изъ средины D гипотенузы этого треугольника возставимъ къ ней перпендикуляръ. Окружность, описанная изъ точки E, средины отрѣзка BD, радіусомъ $EF = {}^4/_3$, пересѣчетъ этотъ перпендикуляръ въ F. Далѣе, на данной окружности откладываемъ хорду $D'F'$, равную DF, и изъ центра O этой окружности опустимъ на $D'F'$ перпендикуляръ ON, который, будучи продолженъ, пересѣчетъ окружность въ M. Линія $D'M$ (или $F'M$) будетъ равняться сторонѣ правильнаго вписаннаго въ окружность O девятиугольника съ точностью до 0,0001.



Фиг. 1.

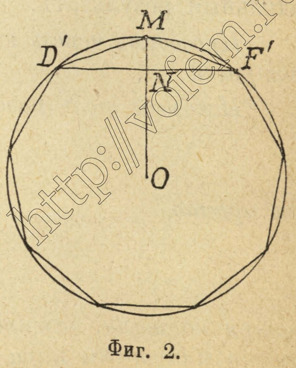
Дѣйствительно, вычислимъ длину отрѣзка $D'M$. Будемъ имѣть:

$$DF = \sqrt{EF^2 - ED^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{238}}{12} = D'F',$$

$$ON = \sqrt{OD'^2 - ND'^2} = \sqrt{OD'^2 - \left(\frac{D'F'}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{238}}{24}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{238}{576}} = \frac{\sqrt{338}}{24}.$$



Фиг. 2.

Далѣе, изъ треугольника $OD'M$ имѣемъ:

$$D'M^2 = OD'^2 + OM^2 - 2OM \cdot ON =$$

$$= 1 + 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{338}}{24} = 2 - \frac{\sqrt{338}}{12},$$

откуда

$$D'M = \sqrt{2 - \frac{\sqrt{338}}{12}}.$$

Вычислимъ теперь выраженіе второй части предыдущаго равенства съ шестью десятичными знаками:

$$\sqrt{338} = 18{,}384776310850 \ldots,$$

$$\sqrt{338} : 12 = 1{,}532064692570 \ldots,$$

$$2 - \frac{\sqrt{338}}{12} = 0{,}467935307430 \ldots,$$

$$\sqrt{2 - \frac{\sqrt{338}}{12}} = D'M = 0{,}684057 \ldots,$$

Отсюда видно, что величина отрѣзка $D'M$ заключается между 0,6840 и 0,6841, а слѣдовательно этотъ отрѣзокъ можетъ быть принятъ за сторону правильнаго вписаннаго девятиугольника, причемъ погрѣшность будетъ менѣе 0,0001.

М. З.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Перемѣстительность и сочетательность произведенія алгебраическихъ количествъ.—Даже въ лучшихъ учебникахъ алгебры нѣтъ точнаго доказательства предложенія, что произведеніе алгебраическихъ количествъ обладаетъ свойствами перемѣстительности и сочетательности. Между тѣмъ доказательство этого предложенія весьма несложно.

Прежде всего ясно, что абсолютная величина произведенія, получаемая при помощи ариѳметическаго перемноженія абсолютныхъ величинъ сомножителей, не должна измѣняться при перестановкѣ и группировкѣ этихъ сомножителей. Поэтому достаточно заняться знакомъ произведенія. Изъ опредѣленія умноженія алгебраическихъ количествъ непосредственно вытекаетъ:

1) Присоединеніе къ ряду множителей новаго положительнаго множителя не измѣняетъ знака произведенія.

2) Присоединеніе новаго отрицательнаго множителя измѣняетъ знакъ произведенія на обратный.

Отсюда слѣдуетъ, что произведеніе нѣсколькихъ сомножителей имѣетъ знакъ $+$ или $-$, смотря по тому, четно или нечетно число отрицательныхъ множителей въ произведеніи (считая и 0 за четное число).

Такъ какъ при перестановкѣ сомножителей число отрицательныхъ среди нихъ не измѣняется, то и знакъ произведенія остается безъ перемѣны.

Перейдемъ къ свойству сочетательности.

Пусть все произведеніе S разбито на группы множителей P и Q. Если число отрицательныхъ множителей въ S четное, то произведенія P и Q (одно изъ чиселъ P и Q можетъ представлять собой также лишь одного множителя), имѣя одновременно либо четное, либо нечетное число отрицательныхъ множителей, имѣютъ одинаковые знаки. Поэтому PQ имѣетъ знакъ $+$, т. е. знакъ произведенія S.

Если же произведеніе S содержитъ нечетное число отрицательныхъ множителей, то изъ группъ P и Q одна содержитъ четное число таковыхъ, а другая нечетное. Въ этомъ случаѣ знаки чиселъ P и Q разные, а потому произведеніе PQ имѣетъ знакъ $-$, т. е. опять знакъ произведенія S.

Во всемъ предыдущемъ всѣ множители предполагались отличными отъ нуля.

Если же въ произведеніи есть множители (или одинъ множитель), равные нулю, то, согласно съ условіями

$$0 . A = A . 0 = 0 . 0 = 0,$$

оно долно оставаться нулемъ при всевозможныхъ перестановкахъ и группировкахъ сомножителей.

Н. С.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Регулированіе давленія въ трубкахъ Рёнтгена. — Такъ какъ при употребленіи трубокъ Рёнтгена давленіе внутри ихъ постепенно уменьшается, то г. *Dorn* снабжаетъ трубку придаткомъ, внутри котораго помѣщаетъ очень маленькій кусочекъ ѣдкаго кали. Лишь только давленіе внутри трубки упадетъ, кусочекъ этотъ слегка подогрѣваютъ пламенемъ бунзеновской горѣлки, благодаря чему выдѣляется нѣкоторое количество водяного пара. *B. Walter* усовершенствовалъ этотъ способъ, замѣнивъ горѣлку платиновой спиралью, нагрѣваемой токомъ, который легко можетъ быть регулируемъ. Если этотъ токъ хорошо регулированъ, то трубка можетъ функціонировать, не измѣняясь, очень долго. (Elektrotechn. Zeitschr.).

Е. Е.

Климатъ Манджуріи и прилежащихъ странъ. — Пользуясь опубликованными недавно метеорологическими наблюденіями въ Манджуріи и сосѣднихъ странахъ, г. *М. Венюковъ* вычислилъ нѣкоторыя климатическія данныя для этой малоизученной мѣстности. Оказалось, что по среднимъ годовымъ температурамъ Манджурія, лежащая подъ той же широтою, что и Франція съ Корсикой (53^0—40^0), приближается по климату къ Финляндіи и Остзейскимъ губерніямъ ($70^0—53^0$). Наивысшая годовая температура достигаетъ $+6^0,6$ въ Ин-це, подъ $40^040'$ с. ш., самая низшая $-5^0,7$ въ Нерчинскѣ подъ $51^058'$ с. ш. Но хотя январскіе морозы въ Манджуріи, на берегахъ Амура и Сунгари суровѣе, чѣмъ въ Финляндіи, лѣто тамъ достаточно теплое для созрѣванія винограда. Іюльская изотерма $+24^0$ проходитъ во Франціи черезъ Перпиньянъ (44^0 с. ш.), а въ Манджуріи она поднимается всего на 1 градусъ. Слѣдующія данныя характеризуютъ континентальность климата Манджуріи: въ *Ин-це* ($40^040'$) январьскій minimum равенъ $-18^0,2$, а іюльскій maximum $+25^0,8$, амплитуда $=44^0$; въ *Мукденѣ* ($40^050'$) min $=-26^0,7$, max. $=+28^0,5$, амплитуда $=55^0,2$; въ *Хабаровскѣ* ($48^028'$) min. $=-27^0,2$, max. $=+22^0,6$, амплитуда $=49^0,8$; въ *Благовѣщенскѣ на Амурѣ* ($50^016'$) min. $=-30^0,7$, max. $=24^0,0$, амплитуда $=54^0,7$. Количество осадковъ на этихъ четырехъ станціяхъ колеблется между 489 и 653 mm.; влажность увеличивается по направленію къ востоку.

Е. Е.

Вліяніе магнитнаго поля на электрическіе разряды въ разрѣженныхъ газахъ. — Желая выяснить вопросъ о томъ, насколько вліяніе сильнаго магнитнаго поля сказывается на силѣ тока и на разности потенціаловъ на электродахъ трубки съ разрѣженнымъ газомъ, *P. G. Melani* (Il nuovo Cimento. V, 329) произвелъ рядъ измѣреній, пользуясь цилиндрическими трубками, анодъ которыхъ имѣлъ форму острія, а катодъ—форму диска. Трубки эти во время опытовъ оставались въ соединеніи съ разрѣжающимъ насосомъ, что давало возможность измѣрять степень разрѣженія и по произволу измѣнять ее во время опыта. Разность потенціаловъ на анодѣ и катодѣ трубки измѣрялась при помощи квадрантнаго электрометра, а самая трубка помѣщалась между полюсами сильнаго электромагнита и устанавливалась либо такъ, что ось ея была параллельна силовымъ линіямъ магнитнаго поля, либо перпендикулярна къ нимъ, либо составляла съ ними уголъ въ 45^0. Сила поля измѣрялась особымъ магнитометромъ. Черезъ трубку пропускался токъ отъ батареи въ 500 маленькихъ аккумуляторовъ, сила котораго измѣрялась зеркальнымъ гальванометромъ.

Самые опыты велись такъ: изъ трубки выкачивался воздухъ и затѣмъ сквозь нее пропускался токъ, причемъ выкачиваніе продолжалось, пока трубка не начинала свѣтиться. Въ этотъ моментъ отмѣчались давленіе въ трубкѣ, разность ея потенціаловъ и сила тока. Затѣмъ токъ прерывался, возбуждалось магнитное поле опредѣленной силы, черезъ трубку снова пропускался токъ и изъ нея снова выкачивался воздухъ, пока она не начинала свѣтиться; тогда повторялись предыдущія измѣренія и изъ трубки продолжали выкачивать воздухъ, пока она не тухла. Тогда прекращали дѣйствіе электромагнита и трубка начинала снова свѣтиться; выкачивая воздухъ ее доводили до того, что токъ переставалъ проходить черезъ нее и производили тогда послѣднія измѣренія. Такія измѣренія производились при различныхъ положеніяхъ, трубки относительно силовыхъ линій магнитнаго поля и при четырехъ различныхъ величинахъ его напряженія.

Результаты этихъ опытовъ приведены въ таблицахъ и выражены кромѣ того въ видѣ кривыхъ, по абсциссамъ которыхъ откладывались давленія газа внутри трубки, а по ординатамъ—разности потенціаловъ. Вотъ главные выводы:

1. Ходъ кривыхъ одинаковъ почти во всѣхъ случаяхъ.

2. При увеличеніи напряженія магнитнаго поля 1) внезапное паденіе разности потенціаловъ (при которой трубка свѣтится) и наименьшее значеніе, котораго эта разность достигаетъ при каждомъ опытѣ, уменьшаются, когда силовыя линіи магнитнаго поля перпендикулярны къ направленію тока въ трубкѣ, или наклонены къ нему подъ угломъ въ 45^0, или, наконецъ, параллельны ему, но направлены въ противоположную сторону. 2) Давленіе, при которомъ трубка начинаетъ свѣтиться, увеличивается, если силовыя линіи параллельны направленію тока и одинаково съ нимъ направлены, и уменьшается въ остальныхъ трехъ случаяхъ. 3) Давленіе, при которомъ прекращается свѣченіе трубки, измѣняется очень мало; оно уменьшается, когда силовыя линіи поля параллельны направленію тока и одинаково съ нимъ направлены и увеличивается въ трехъ остальныхъ случаяхъ.

3. Когда силовыя линіи магнитнаго поля параллельны направленію тока въ трубкѣ и направлены въ ту же сторону, то трубка начинаетъ свѣтиться при болѣе сильномъ разрѣженіи и тухнетъ при меньшемъ разрѣженіи, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда трубка не находится подъ дѣйствіемъ магнитнаго поля. Въ остальныхъ трехъ случаяхъ замѣчается обратное.

4. Вообще всѣ полученные результаты приводятъ къ общему выводу, что разрядъ внутри трубки облегчается, когда силовыя линіи поля одинаково направлены съ токомъ, и болѣе или менѣе затрудняется въ остальныхъ случаяхъ. Это затрудненіе особенно замѣтно въ томъ случаѣ, когда силовыя линіи поля перпендикулярны къ направленію тока въ трубкѣ.

Вліяніе магнитнаго поля сказывается также и на характерѣ свѣта внутри трубки. Когда ось трубки перпендикулярна къ силовымъ линіямъ поля, то магнитные полюсы какъ бы сжимаютъ слои свѣта (при бо́льшихъ давленіяхъ внутри трубки) и диффузный свѣтъ (при меньшихъ давленіяхъ). Когда трубка составляетъ съ силовыми линіями уголъ въ 45^0, свѣтъ въ ней вращается, а когда трубка параллельна силовымъ линіямъ, то свѣтъ на отрицательномъ электродѣ увеличивается или уменьшается, смотря по тому, направлены ли силовыя линіи и токъ въ противоположныя стороны, или въ одну и ту же сторону. (Naturwiss. Rundsch.).

В. Г.

Опредѣленіе высокихъ температуръ при помощи мельдометра.—Изобрѣтенный *Joly* мельдометръ представляетъ собою приборъ для измѣренія высокихъ температуръ; существенной его частью является платиновая лента длиною въ 10 cm и шириною въ 1 mm; лента эта нагрѣвается электрическимъ токомъ и о температурѣ ея судятъ по ея удлиненію, которое измѣряется микрометрическимъ винтомъ. Чтобы градуировать приборъ, на ленту кладутъ кусочекъ вещества, температура плавленія котораго извѣстна и, повышая постепенно температуру ленты, наблюдаютъ при помощи микроскопа моментъ, когда вещество начинаетъ плавиться. Сдѣлавъ нѣсколько такихъ опредѣленій съ различными веществами и замѣтивъ положеніе микрометрическаго винта въ моментъ плавленія каждаго изъ нихъ, можно затѣмъ построить кривую, которая даетъ возможность опредѣлять и неизвѣстныя точки плавленія другихъ веществъ, лежащія между тѣми, которыя послужили для градуировки прибора.

Вотъ нѣкоторые изъ результатовъ, полученныхъ при помощи этого прибора гг. *W. Ramsay*'емъ и *Eumorfopoulos*'омъ и опубликованныхъ ими въ Phil. Mag. (t. XLI, стр. 360—367):

Вещество.	Точка плавленія.
Сода	851°
Поташъ	880°
Поваренная соль	792°
Хлористый калій	762°
Хлористый кальцій	710°
Глауберова соль	884°
Сѣрнокислое кали	1052°
Сѣрнокислый свинецъ	937°
Хлористое серебро	460°
Калійная селитра	339°.

В. Г.

Упражненія для учениковъ.

Изъ „Journal de Mathématiques Elémentaires“, № 9 за 1897 г.

Boutin'a.

1. Приводимая ниже таблица содержитъ всѣ положительныя числа вида $4n+1$, расположенныя по ихъ численной величинѣ по спирали, начиная отъ единицы (предполагается, что таблица продолжена безгранично). Доказать, что:

	137	133	129	125	121
65	61	57	53	49	117
69	17	13	9	45	113
73	21	1	5	41	109
77	25	29	33	37	105
81	85	89	93	97	101

a) Діагональ 1—9 содержитъ квадраты всѣхъ нечетныхъ чиселъ.

b) Часть діагонали 1 — 17 или 1 — 33 содержитъ квадраты четныхъ чиселъ, увеличенные на единицу; другая ея часть содержитъ квадраты другихъ четныхъ чиселъ, уменьшенные тремя единицами.

c) Діагональ 5 — 45, продолженная безгранично въ направленіи 5—45, не содержитъ простыхъ чиселъ, начиная съ 45.

Числа, стоящія на этой діагонали, суть числа вида

$$16n^2 + 24n + 5 = (4n + 1)(4n + 5).$$

d) Діагональ 21 — 77, продолженная безгранично въ направленіи 21—77, не содержитъ простыхъ чиселъ.

Числа этой діагонали имѣютъ общій видъ:

$$16n^2 + 40n + 21 = (4n + 3)(4n + 7).$$

e) Діагональ 97—105, продолженная безгранично въ направленіи 97—105, не содержитъ простыхъ чиселъ, начиная со 105.

Числа этой діагонали имѣютъ общій видъ:

$$16n^2 + 88n + 105 = (4n + 7)(4n + 15).$$

f) Діагональ 137—65, продолженная безгранично въ направленіи 137—65, не содержитъ простыхъ чиселъ, начиная съ 65.

Числа этой діагонали суть числа вида:

$$16n^2 + 72n + 65 = (4n + 5)(4n + 13).$$

g) Линія 1—85, продолженная безгранично въ направленіи 1—85 не содержитъ простыхъ чиселъ, начиная съ 85.

Числа, стоящія по этой линіи, имѣютъ общій видъ:

$$64n^2 + 20n + 1 = (4n + 1)(16n + 1).$$

Очевидно, что число подобныхъ предложеній можно увеличивать безконечно.

2. Таблица

67	63	59	55	51
71	19	15	11	47
75	23	3	7	43
79	27	31	35	39
83	87	91	95	99

которая тоже предполагается продолженной безгранично, отличается отъ предыдущей тѣмъ, что всѣ числа увеличены въ ней на два. Доказать, что

a) Діагональ 3—35, продолженная до безконечности въ направленіи 3—35, не содержитъ простыхъ чиселъ, кромѣ числа 3.

Числа этой діагонали имѣютъ общій видъ $(4n + 1)(4n + 3)$.

b) Діагональ 15 — 63, продолженная до безконечности въ направленіи 15 — 63, не содержитъ простыхъ чиселъ.

Числа этой діагонали суть числа вида $(4n + 3)(4n + 5)$ и т. д.

ЗАДАЧИ.

№ 409. Обозначимъ черезъ $E(p)$ наибольшее цѣлое положительное число, содержащееся въ p, такъ что

$$1 + E(p) > p \geqslant E(p).$$

Доказать, что

$$E\left[\frac{1}{\alpha} E\left(\frac{N}{\beta}\right)\right] = E\left(\frac{N}{\alpha\beta}\right),$$

гдѣ N, α и β суть цѣлыя положительныя числа.

P. Q.

№ 410. Данъ равносторонній треугольникъ ABC, каждая сторона котораго равна a. На сторонахъ его AB, BC, CA отложены отрѣзки AD, BE, CF, изъ которыхъ каждый обозначенъ черезъ x. Изъ точекъ D, E, F проведены прямыя DD', EE', FF', соотвѣтственно параллельныя сторонамъ CA, AB, BC. Эти прямыя образуютъ равносторонній треугольникъ $A'B'C'$. Ромбы $ADA'E'$, $BEB'F'$, $CFC'D'$ отрѣзаны и оставшіяся три равнобочныя трапеціи поворачиваются около сторонъ треугольника $A'B'C'$, пока прямыя $A'D$ и $A'E'$, $B'E$ и $B'F'$, $C'F$ и $C'D'$ не совпадутъ. Тогда составится правильная усѣченная треугольная пирамида. Опредѣлить, при какомъ значеніи x эта усѣченная пирамида имѣетъ объемъ maximum?

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 411. Показать, что

$$\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8} = {}^3/_2$$

и

$$\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = {}^3/_2.$$

(Заимств.). *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 412. Найти отношеніе катетовъ прямоугольнаго треугольника, въ которомъ одинъ изъ острыхъ угловъ равенъ полусуммѣ другого остраго угла и угла Брокара того же треугольника. Построить самый треугольникъ.

М. Зиминъ (Орелъ).

№ 413. Рѣшить уравненія:

$$\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{y^2 - b^2} + \sqrt{z^2 - c^2} = 0,$$
$$\sqrt{x^2 - a'^2} + \sqrt{y^2 - b'^2} + \sqrt{z^2 - c'^2} = 0,$$
$$x + y + z = 0,$$

гдѣ a, b, c и a', b', c' суть стороны двухъ треугольниковъ.

(Заимств.) *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 414. На блокѣ машины Атвуда навита длинная, совершенно гибкая нить, къ свободному концу которой прикрѣпленъ движущій грузъ. Ось блока вращается безъ тренія и служитъ въ то же время осью диска съ n отверстіями, расположенными на одной и той же окружности въ равныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга. Мѣхъ, дающій непрерывную струю воздуха, расположенъ такимъ образомъ, что токъ воздуха направленъ нормально къ диску и по окружности отверстій. Въ извѣстный моментъ движущій грузъ опускаютъ.

Требуется:

1) объяснить, какое акустическое явленіе произведетъ движущаяся система;

2) вычислить высоту звука, какой получился бы, начиная съ момента t, если бы движущій грузъ былъ въ этотъ моментъ отнятъ;

3) вычислить рядъ моментовъ t, въ теченіе которыхъ высота звука соотвѣтствовала бы ряду нотъ третьей гаммы;

4) вычислить ускореніе силы тяжести въ другомъ мѣстѣ земного шара, зная, что при повтореніи того же опыта въ этомъ мѣстѣ, въ тѣ же моменты t слышатся тѣ же ноты, какъ и прежде, но только со знакомъ діезъ.

Численное приложеніе. — Длина окружности блока $= L = 0{,}20$ m. Число отверстій диска $= n = 10$. Ускореніе силы тяжести (въ первомъ мѣстѣ земного шара) $= g = 9{,}81$. *La* третьей гамы, $la_3 = 435$ двойныхъ колебаній.

(Заимств.) *М. Г.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 26 (1 сер.).—Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ данной окружности и данной внѣ ея точки.

Пусть O центръ данной окружности, A данная внѣ ея точки и B—точка, принадлежащая искомому геометрическому мѣсту.

Соединимъ O и B и пусть точка пересѣченія OB съ окружностью будетъ C; по условію имѣемъ

$$BC = AB = OB - OC,$$

откуда

$$OB - AB = OC = R,$$

гдѣ R радіусъ данной окружности.

Отсюда заключаемъ, что искомое геометрическое мѣсто точекъ есть гипербола, фокусы которой суть O и A.

А. Бобятинскій; Ф. Рустамбековъ.

№ 67 (1 сер.).—Какимъ образомъ опредѣлить направленіе магнитнаго меридіана при помощи стрѣлки наклоненія?

Когда плоскость стрѣлки не совпадаетъ съ плоскостью магнитнаго меридіана, силы, наклоняющія ее, разлагаются, и наклоненіе, слѣдовательно, будетъ тѣмъ больше, чѣмъ меньшій уголъ составляетъ плоскость стрѣлки съ плоскостью магнитнаго меридіана. Наибольшее наклоненіе стрѣлки будетъ при совпаденіи плоскости ея съ плоскостью магнитнаго меридіана, наименьшее—при совпаденіи ея плоскости съ плоскостью, перпендикулярной къ плоскости магнитнаго меридіана.

Латынинъ (СПБ); *S. Y. C.* (Псковъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ-на-Дону).

№ 82 (1 сер.).—Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ данной окружности и данной внутри ея точки.

Пусть O—центръ даннаго круга; A—данная внутри круга точка и B—точка, принадлежащая искомому геометрическому мѣсту.

Проведемъ чересъ B радіусъ OC; по условію имѣемъ

$$AB = BC \text{ и } OB + AB = OB + BC = R,$$

гдѣ R радіусъ даннаго круга.

Отсюда видно, что искомое геометрическое мѣсто точекъ есть эллипсъ, большая ось котораго равна радіусу и фокусы котораго суть точки O и A.

А. Бобятинскій.

№ 174 (1 сер.).—Доказать теорему: если проведемъ въ кругѣ діаметръ MN и перпендикулярную къ нему хорду AC, если на этой хордѣ или на ея продолженіи возьмемъ произвольную точку K, то прямыя KM и KN (или ихъ продолженія) пересѣкутъ окружность въ двухъ точкахъ B и D, которыя съ точками A и C образуютъ вершины гармоническаго четыреугольника.

Изъ треугольника ACD, въ которомъ либо уголъ ADC либо смежный съ нимъ уголъ дѣлится прямою DK пополамъ (смотря по тому, будетъ ли точка K лежать внутри или внѣ круга), имѣемъ:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AK}{CK}; \qquad (1);$$

точно также изъ треугольника ABC имѣемъ

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AK}{CK} \qquad (2)$$

Изъ (1) и (2) имѣемъ:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{CB}$$

или

$$AD \cdot CB = AB \cdot CD.$$

С. Блажко (Смоленскъ); *В. Каганъ* (Одесса); *Е. Ассѣевъ* (Курскъ), *А. Бобятинскій* (Егорьевской Золотой пр.).

№ 211 (1 сер.).—Предполагая, что n, оставаясь цѣлымъ числомъ, безгранично возрастаетъ, найти предѣлъ выраженія

$$\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\frac{1}{n^2+3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+(n-1)^2}.$$

Такъ какъ искомая сумма меньше

$$\frac{n}{n^2+1^2},$$

а это выраженіе при возрастаніи n до безконечности стремится къ нулю, то и искомая сумма равна въ предѣлѣ нулю.

Г. Барховъ (Ревель); *Мясковъ* (Слонимъ).

№ 298 (1 сер.).—Найти условія, при которыхъ выраженіе $2x+1$ и $2x-1$ будутъ полными квадратами.

Нечетное число можетъ быть квадратомъ только нечетнаго числа, поэтому изъ равенствъ

$$2x+1=(2n-1)^2 \text{ и } 2x-1=(2n-1)^2$$

мы найдемъ искомыя условія

$$x=2n(n-1) \text{ и } x=2n(n-1)+1.$$

Н. В. (Воронежъ); *Г. Легошинъ* (с. Знаменка); *И. Кумсковъ* (Воронежъ); *П. Свѣшчиковъ* (Троицкъ); *В. Гиммельфарбъ* (Кіевъ); *П. Трипольскій* (Полтава).

№ 30 (2 сер.).—Положимъ, что въ треугольникѣ ABC построены такія точки M и M', что углы MAC, MCB, MBA, $M'AB$; $M'BC$, $M'CA$ равны между собою (точки Брокара). Назовемъ каждый изъ этихъ угловъ черезъ Θ и опустимъ изъ этимъ точекъ перпендикуляры MA', MB', MC', $M'A''$, $M'B''$, $M'C''$ на стороны BC, CA и AB. Доказать, что:

1) Треугольники $A'B'C'$ и $A''B''C''$ равны между собою и подобны треугольнику ABC.

2) Стороны каждаго изъ этихъ треугольниковъ относятся къ сходственнымъ сторонамъ треугольника ABC, какъ $\sin\Theta:1$.

Уголъ Θ опредѣляется уравненіемъ*)

$$\operatorname{cotg}\Theta=\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C$$

Разсмотримъ одну изъ точекъ Брокара M.

Изъ вписуемости въ кругъ четыреугольниковъ

$$AC'MB',\ A'MC'B,\ A'MB'C$$

слѣдуетъ:

$$\angle MA'C'=\angle\Theta \text{ и } \angle B'A'M=\angle B'CM, \qquad \text{(I)}$$

откуда

$$\angle ACB=\angle C'A'B',$$

*) См. „Новая геометрія треугольника“, статья Д. Е., № 232 „Вѣстника“, стр. 87, § 8.

точно также

$$\angle BAC = \angle A'B'C'$$

$$\angle ABC = \angle A'C'B',$$

слѣдовательно,

$$\triangle ABC \infty \triangle A'B'C'.$$

Изъ равенствъ, аналогичныхъ равенствамъ (I), вытекаетъ также, что

$$\triangle BAM \infty \triangle B'C'M,$$

а потому

$$\frac{C'B'}{AB} = \frac{B'M}{AM} = \frac{\sin\Theta}{1} \qquad \text{(II)}$$

Построивъ для второй точки Брокара M' треугольникъ $A''B''C''$, найдемъ при помощи аналогичныхъ разсужденій, что

$$\triangle ABC \infty \triangle A''B''C''$$

и

$$\frac{C''B''}{AB} = \frac{\sin\Theta}{1};$$

отсюда и изъ (II) слѣдуетъ, что

$$C'B' = C''B'',\ A'B' = A''B'',\ A'C' = A''C'';$$

поэтому

$$\triangle A'B'C' = \triangle A''B''C''.$$

Е. Буницкій (Одесса); *В. Х.* (Курскъ).

№ 62 (2 сер).—Въ кругѣ радіуса R проведены три діаметра AOB, COD и EOF такъ что $\angle AOC = \alpha$ и $\angle COF = \beta$.

Изъ произвольной точки этой окружности опущены перпендикуляры на эти діаметры и ихъ основанія соединены прямыми. Опредѣлить стороны полученнаго такимъ образомъ треугольника и найти условія, при которыхъ полученный треугольникъ будетъ 1) прямоугольный и 2) равносторонній.

Опустивъ изъ точки L перпендикуляры LG, LH и LK на данные діаметры и соединивъ точки G, H и K, получимъ $\triangle HGK$.

Не трудно видѣть, что четыреугольникъ $OKLG$ вписуемъ, и окружность, описанная около него, пройдетъ черезъ H, а прямая LO, равная R, будетъ ея діаметромъ.

Такъ какъ углы треугольника GHK равны даннымъ угламъ между діаметрами α, β и $180-\alpha-\beta$, а радіусъ описаннаго около него круга равенъ $\frac{R}{2}$, то стороны легко вычисляются по извѣстнымъ формуламъ,

$$KG = R\sin\alpha,\ HK = R\sin\beta,\ GH = R\sin(\alpha+\beta).$$

Треугольникъ GHK будетъ равносторонній, когда $\alpha = \beta = 60^0$, прямоугольный—когда α или β или $\alpha+\beta$ равняется 90^0.

М. Акопянцъ (Тифлисъ); *Л. Лебедевъ* (Курскъ); *В. Моргунъ* (Кіевъ); *И. Постоевъ* (Курскъ).

№ 31 (3 сер.).—Даны n силъ, равныхъ по величинѣ числамъ натуральнаго ряда отъ 1 до n. Требуется разбить эти силы на двѣ такія группы, чтобы, заставляя каждую изъ этихъ группъ дѣйствовать по одной изъ сторонъ прямого угла на точку, помѣщенную въ его вершинѣ, получить равнодѣйствующую minimum.

Обозначимъ сумму всѣхъ данныхъ силъ черезъ S, а суммы силъ, направленныхъ соотвѣтственно по двумъ сторонамъ прямого угла, черезъ

$$x=\frac{S}{2}+\alpha$$

и (1)

$$y=\frac{S}{2}-\alpha.$$

Тогда равнодѣйствующая R выразится черезъ

$$R=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{S^2}{2}+2\alpha^2},$$

откуда видно, что R достигаетъ minimum'a одновременно съ α^2, или, что все равно, [см. уравненія (1)] одновременно съ

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

Такъ какъ x и y суть, по условію задачи, числа цѣлыя, то, при нечетномъ S, разность $x-y$ не можетъ быть менѣе 1 по абсолютной величинѣ.

Если $n=4k$, то положимъ

$$x=(k+1)+(k+2)+\ldots+3k.$$

Если $n=4k-1$, то можно положить

$$x=k+(k+1)+\ldots+3k-1.$$

Въ обоихъ случаяхъ, послѣ надлежащихъ вычисленій, найдемъ, что

$$x-y=0,$$

а потому R достигаетъ minimum'a.

Если же n равно $4k+1$ или $4k+2$, то S нечетно, а потому уже нельзя разность $x-y$ сдѣлать равной нулю.

Но за то можно, при $n=4k+1$, взять

$$x=(k+2)+(k+3)+\ldots+(3k+1)$$

а при $n=4k+2$

$$x=(4k+1)+[(k+1)+k+\ldots+3k].$$

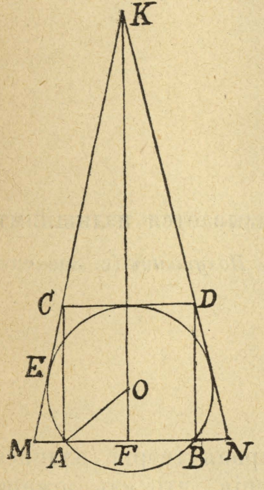
Въ послѣднихъ двухъ случаяхъ, при указанномъ выборѣ x, найдемъ, что

$$x-y=-1,$$

а потому R опять достигаетъ minimum'a.

I. Федоровъ (Тамбовъ); *В. Рюминъ* (Николаевъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ-на-Дону); *О. Ривошъ* (Вильно); *Р. Лукицкій* (Полоцкъ); *М. Пряcловъ* (Ревель); *Я. Блюмбергъ* (Рига); *Уч. Кіево-Печ. гим.*, *Л* и *Р*.

№ 77 (3 сер.)—Окружность радіуса R проходитъ черезъ вершины вписаннаго въ равнобедренный тр-къ квадрата $ABCD$ и касается равныхъ сторонъ тр-ка, а также и стороны CD квадрат , параллельной основанію тр-ка. Вычислить стороны тр-ка.



Фиг. 1.

Пусть центръ круга будетъ O, а сторона квадрата x, тогда $OF=x-R$. Изъ прямоугольнаго тр-ка AOF имѣемъ:

$$x=\frac{8R}{5}.$$

Изъ прямоугольнаго тр-ка ACM имѣемъ

$$(ME+EC)^2=AC^2+AM^2$$

или

$$ME^2+\frac{8R}{5}ME-AM^2=\frac{48R^2}{25}\ .\ .\ .\ (I)$$

Кромѣ того

$$ME^2=AM\left(AM+\frac{8R}{5}\right)$$

или

$$ME^2-\frac{8R}{5}AM-AM^2=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (II)$$

Изъ (I) и (II) имѣемъ:

$$ME=\frac{6R}{5}-AM.$$

Подставляя это значеніе для ME въ ур. (II), получимъ

$$AM=\frac{9R}{25},$$

откуда

$$MN=\frac{58R}{25}.$$

Изъ подобія же тр-ковъ MKN и CKD мы легко получимъ

$$Mk = 5\frac{64}{225}R.$$

С. Конюховъ (Харьковъ); *А. Павлычевъ* (Иваново-Вознесенскъ); *И. Барковскій* (Могилев. губ.); *Уч. Кіево-Печ. гимн. Л. и Р.*; *А, Бачинскій* (Холмъ); *П. Ивановъ* (Одесса); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *П. Р.* (Ромны).

Маленькій вопросъ № 1. — Какъ найти сумму двухъ чиселъ, умѣя производить надъ числами только операціи вычитанія, умноженія и дѣленія?

Рѣшеніе видно изъ формулъ

$$a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b}$$

или

$$a+b=2a-(a-b);$$

при послѣднемъ рѣшеніи и дѣйствіе дѣленія оказывается излишнимъ.

М. Зиминъ (Елецъ); *П. Соловьевъ* (Н.-Новгор.); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ).

Поправка.

Въ примѣчаніи къ § 33 статьи „Элементарная теорія эллипса“, (№ 244, стр. 95), при доказательствѣ предложенія, что изъ лежащей внѣ эллипса точки всегда можно провести двѣ различныхъ касательныхъ, — вкралась опечатка, требующая слѣдующей поправки: вмѣсто „одна изъ двухъ касательныхъ EM и EM′, напримѣръ, EM—встрѣчала бы эллипсъ еще въ одной точкѣ M′“, надо читать: „.... встрѣчала бы окружность O′....“.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 16-го Сентября 1897 г.
„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

Обложка
ищется

Обложка
пщется