Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXXIV Сем. № 5.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

№ 401.

Содержаніе: Вертящійся волчокъ. Публичный докладъ, прочитанный въ засѣданіи „Британской Ассоціаціи" въ Лидсѣ (Продолженіе). *Проф. Джона Перри.* — Законъ Паскаля. Историческій очеркъ профессора *П. Дюгема.* Переводъ *I. Л.* — Соотношенія между сторонами треугольника, углы котораго находятся въ извѣстномъ отношеніи. *Н. Агрономова.* — Какія нужны реформы въ преподаваніи математики?—Задачи для учащихся, №№ 671—676 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ, №№ 575, 576, 579. — Объявленія.

ВЕРТЯЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.

Публичный докладъ, прочитанный въ засѣданіи „Британской Ассоціаціи" въ Лидсѣ.

Проф. Джона Перри.

*(Продолженіе *).*

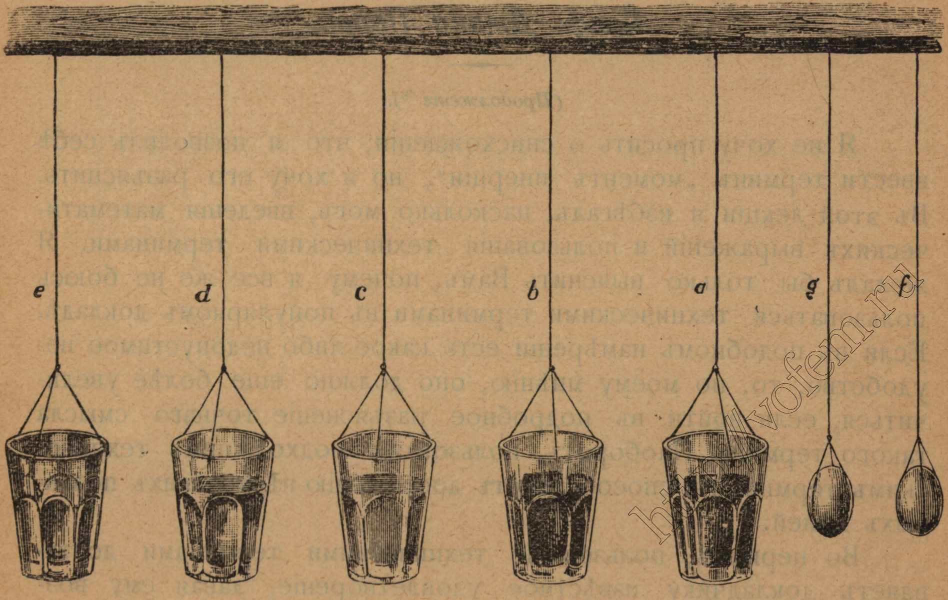
Я не хочу просить о снисхожденіи, что я позволилъ себѣ ввести терминъ „моментъ инерціи", но я хочу его разъяснить. Въ этой лекціи я избѣгалъ, насколько могъ, введенія математическихъ выраженій и пользованія техническими терминами. Я желалъ бы только выяснить Вамъ, почему я все же не боюсь пользоваться техническими терминами въ популярномъ докладѣ. Если въ подобномъ намѣреніи есть какое либо недопустимое неудобство, то, по моему мнѣнію, оно должно еще болѣе увеличиться, если войти въ подробное разъясненіе точнаго смысла такого термина. Наоборотъ, пользованіе подходящимъ техническимъ терминомъ способствуетъ достиженію нѣсколькихъ полезныхъ цѣлей.

Во первыхъ, пользованіе техническими терминами доставляетъ докладчику извѣстное удовлетвореніе, давая ему воз-

*) См. № 398 „Вѣстника".

можность изложить кое-что точно; такимъ образомъ достигается его цѣль—сдѣлать вполнѣ яснымъ ходъ своихъ мыслей; а утомлять своихъ слушателей обстоятельными разъясненіями онъ, къ счастью, совсѣмъ не имѣетъ времени. Во вторыхъ, пользованіе такими терминами отнимаетъ у слушателей популярнаго доклада широко распространенную увѣренность, будто теперь они узнали все, что можно сказать по поводу излагаемаго предмета. Въ третьихъ, при помощи этого пріема всякій, не исключая и докладчика, убѣждается, что при изложеніи новаго предмета можно допустить мѣстами извѣстнаго рода скачки; примѣняя такой методъ изложенія, мы часто ничего не теряемъ, а наоборотъ, въ большинствѣ случаевъ много выигрываемъ.

Нѣсколько лѣтъ тому назадъ утверждали, что если бы земля представляла собой оболочку, наполненную жидкостью, и если бы эта жидкость не испытывала никакого тренія, то мы при изученіи ея „предходящаго“ движенія (прецессіи) должны были бы принять во вниманіе лишь моментъ инерціи оболочки; а если бы эта оболочка была вязкой, то „предходящее“ движеніе (прецессія) скоро должно было бы совершенно прекратиться. Чтобы показать наглядно значеніе момента инерціи, я подвѣсилъ здѣсь нѣсколько стакановъ—одинъ (a), наполненный пескомъ, другой (b)—сиропомъ, третій (c)—масломъ, четвертый (d)—водой, а пятый пустой (фиг. 44).



Фиг. 44.

Какъ вы видите, если я закручу проволоки, на которыхъ подвѣшены стаканы, и затѣмъ предоставлю ихъ самимъ себѣ, то начинается колебательное движенiе, похожее на качанiе маятника часовъ. Замѣтьте теперь, что стаканъ съ водой движется очень быстро; въ данномъ случаѣ оказываетъ дѣйствiе моментъ инерцiи одного только стакана. Продолжительность колебанiя почти одинакова для этого стакана и для пустого; т. е. вода, повидимому, не движется вмѣстѣ со стаканомъ. Вы замѣчаете также, что колебанiя этого стакана продолжаются въ теченiе значительнаго промежутка времени.

Наоборотъ, стаканъ, наполненный пескомъ, колеблется медленно; въ этомъ случаѣ моментъ инерцiи великъ, такъ какъ песокъ и стаканъ представляютъ изъ себя вмѣстѣ твердое тѣло, и колебанiе продолжается долго.

У стакановъ, наполненныхъ масломъ и сиропомъ, перiоды колебанiя болѣе продолжительны, чѣмъ у стакана съ водой или у пустого, но болѣе коротки, чѣмъ это имѣло бы мѣсто, если бы колеблющiяся тѣла были совершенно твердыми, такъ какъ вслѣдствiе внутренняго тренiя колебанiя прекращаются все-таки скорѣе.

Вареное (f) яйцо и невареное (g), которыя одинаковымъ образомъ подвѣшены на проволокѣ, обнаружатъ ту же самую разницу въ свойствахъ колебательнаго движенiя, какъ и два тѣла, изъ которыхъ одно внутри твердое, а другое жидкое; Вы видите, насколько медленнѣе колебанiя варенаго, чѣмъ неваренаго яйца.

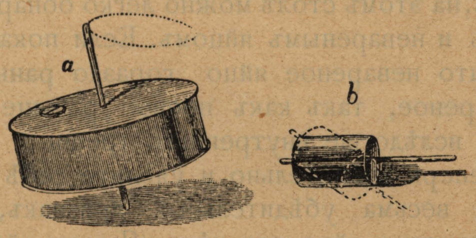
Даже здѣсь, на этомъ столѣ можно легко обнаружить разницу между вареным и невареным яйцомъ. Если покатить оба яйца, то Вы видите, что невареное яйцо гораздо раньше останавливается, чѣмъ вареное, такъ какъ первое раньше приходитъ въ состоянiе покоя вслѣдствiе внутренняго тренiя.

Слѣдите теперь внимательно и уясните себѣ вполнѣ отчетливо слѣдующiй весьма убѣдительный признакъ, по которому можно узнать, сварено яйцо или нѣтъ. Я качу яйцо или же вращаю его вокругъ вертикальной оси, а затѣмъ прикасаюсь къ нему пальцемъ только на одно мгновенiе, какъ разъ въ теченiе такого промежутка времени, чтобы остановить движенiе скорлупы. Вы видите, что вареное яйцо совсѣмъ прекратило свое движенiе, между тѣмъ какъ у неваренаго остановилось только движенiе скорлупы, а жидкое содержимое не только продолжаетъ двигаться, но даже возобновляетъ своимъ движенiемъ движенiе скорлупы, какъ только я удаляю отъ нея свой палецъ.

И вотъ отсюда заключили, что если бы земля была внутри жидкой, то ея «предходящее» движенiе должно было бы быть гораздо быстрѣе, чѣмъ это наблюдается въ дѣйствительности, такъ какъ моментъ инерціи оболочки, единственно имѣющій значеніе въ данномъ случаѣ, оказался бы сравнительно незначительнымъ и, какъ мы видѣли это изъ предыдущихъ примѣровъ, совершенно не зависѣлъ бы отъ момента инерціи жидкости.

Это и приводилось, какъ доводъ противъ предположенія, что внутреннее содержимое земли находится въ жидкомъ состояніи.

Мы знаемъ, что наблюдаемыя нами полугодовыя и полумѣсячныя измѣненія «предходящаго» движенія были бы гораздо значительнѣе, если бы земля представляла изъ себя оболочку, содержащую внутри себя много жидкости, и тогда, если бы только эта оболочка не была почти безконечно тверда, не могло бы происходить явленіе прилива и отлива; но не подлежитъ никакому сомнѣнію, что по отношенію къ общему «предходящему» движенію (прецессіи) прежняя цѣпь доказательствъ ошибочна. Если бы даже земля была внутри жидкой, то все-таки она вращается настолько скоро, что по отношенію къ такому медленно совершающемуся явленію, какъ предвареніе равноденствій, она должна быть разсматриваема, какъ твердое тѣло. Дѣйствительно, въ рядѣ прежнихъ доказательствъ было упущено изъ вида то важное обстоятельство, что быстрое вращеніе вокругъ оси можетъ сообщить даже жилкимъ тѣламъ кажущуюся твердость. Вотъ полый бронзовый волчокъ, наполненный водою (фиг. 45 a).

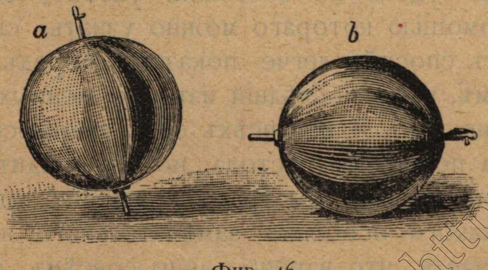


Фиг. 45.

Внѣшняя его оболочка очень легка, и находящаяся внутри него вода имѣетъ гораздо большую массу, чѣмъ эта оболочка. Если внимательно изслѣдовать этотъ волчокъ, то оказывается, что онъ вращается совершенно такъ же, какъ если бы находящаяся внутри него вода была твердымъ тѣломъ, т. е. какъ если бы весь волчокъ былъ твердымъ тѣломъ. И вотъ Вы видите, какъ онъ вращается и движется «предходящимъ» движеніемъ точно такъ же, какъ и твердый волчокъ. Я знаю, что этотъ волчокъ, не вполнѣ, а только отчасти наполненъ водою; но будетъ ли онъ ею наполненъ вполнѣ или отчасти, онъ вращается почти такъ, какъ твердый волчокъ.

Но нельзя сказать того же, если мы возьмемъ длинный полый наполненный водою волчокъ. Какъ я уже Вамъ сказалъ, у всякаго тѣла есть ось, вокругъ которой оно особенно легко можетъ вращаться. Внѣшняя металлическая часть этого волчка проявляетъ уже хорошо извѣстныя Вамъ особенности: тренiе ея нижняго остраго конца о поверхность стола заставляетъ ее стать прямо вдоль самой длинной своей оси. Однако, находящуюся внутри волчка жидкость ничто не принуждаетъ вращаться вокругъ самой длинной оси; а такъ какъ она, подобно всѣмъ тѣламъ такого рода, которыя я Вамъ показывалъ, предпочитаетъ болѣе короткую ось, то она вращается по своему; вслѣдствiе тренiя и давленiя на футляръ она заставляетъ его вращаться вокругъ болѣе короткой оси, постоянно парализуя такимъ образомъ стремленiе внѣшней части подняться вверхъ, направивъ вертикально свою длинную ось. Поэтому оказывается, что длиннаго, полаго и наполненнаго водою волчка совсѣмъ нельзя заставить кружиться.

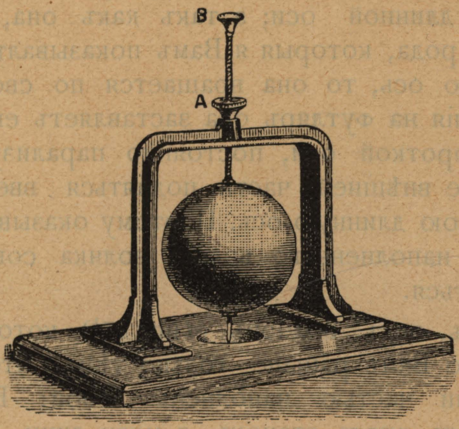
Напримѣръ, вотъ волчокъ (фиг. 45^b), который отличается отъ показаннаго Вамъ раньше только тѣмъ, что онъ длиннѣе. Онъ вполнѣ или частью наполненъ водой; Вы видите, что, вставивши его въ этотъ станокъ, я могу лишь постепенно привести его въ быстрое вращенiе; но какъ только я выпускаю его на поверхность стола подобно волчку, демонстрированному раньше, какъ онъ внезапно опрокидывается и рѣшительно отказывается вращаться на своемъ остреѣ. Это различiе свойствъ особенно замѣчательно у двухъ полыхъ волчковъ, которые Вы видите передъ собой на фиг. 46. Оба они почти шарообразны и оба на-



Фиг. 46.

полнены водой. Они кажутся до того схожими, что немного лицъ въ этомъ собранiи взялись бы указать, какую разницу они замѣчаютъ въ ихъ внѣшнемъ видѣ. Но на самомъ дѣлѣ одинъ изъ нихъ (a) немного приплюснутъ, какъ померанецъ, а другой (b), наоборотъ, немного вытянутъ въ длину, какъ лимонъ. Оба эти волчка я приведу при помощи этого станка (фиг. 47) въ ускоряющееся мало по малу вращательное движенiе, чтобы при достаточно дродолжительномъ вращенiи навѣрно возникло бы также и вращенiе воды.

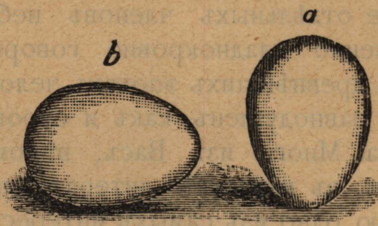
Сейчасъ послѣ того, какъ ихъ выпускаютъ на свободу, оба волчка двигаются на поверхности стола, какъ обыкновенные волчки; и вода и бронза двигаются, какъ части одного твердаго тѣла. Вы видите, что волчокъ, имѣющiй форму померанца, про-



Фиг. 47.

должаетъ вращаться и двигаться „предходящимъ" движенiемъ, и если его толкнуть, онъ выпрямляется, какъ обыкновенный твердый волчокъ—я даже очень рѣдко видѣлъ болѣе удачный волчокъ; наоборотъ, волчокъ, имѣющiй форму лимона, внезапно падаетъ на бокъ и сейчасъ же перестаетъ вовсе двигаться.

Теперь Вы будете въ состоянiи усвоить себѣ четвертый способъ, съ помощью котораго можно узнать, сварено ли яйцо или нѣтъ; этотъ способъ легче показать передъ многочисленнымъ собранiемъ, чѣмъ послѣднiй изъ изложенныхъ. Вотъ невареное яйцо (фиг. 48^b). Я изо всѣхъ силъ стараюсь привести его во вращенiе на поверхности стола, но Вы видите, что я не въ состоянiи сообщить ему быстраго вращенiя; при этомъ не наблюдается никакого особенно замѣчательнаго явленiя. Наоборотъ, Вы замѣчаете, что вареное яйцо совсѣмъ легко привести во вращенiе, при чемъ по пречинамъ, теперь очень хорошо Вамъ извѣстнымъ, это яйцо ведетъ себя такъ же, какъ и тѣ камни, которые закручивалъ Томсонъ на взморьѣ: оно сейчасъ же поднимается вдоль своей болѣе длинной оси, доставляя пріятное зрѣлище для нашего привычнаго глаза (фиг. 48^{a}). Всѣ Вы знаете также, руководствуясь свойствами волчка, имѣющаго форму лимона, что если бы я могъ при помощи быстро вращающагося и внезапно остановленнаго стола или какимъ-либо дру-



Фиг. 48.

гимъ способомъ привести невареное яйцо во вращеніе вокругъ оси, то все-таки оно никогда не обнаружило бы ни малѣйшей попытки стать на острый конецъ и вращаться вокругъ болѣе длинной оси.

Надѣюсь, Вы не находите, что я уже слишкомъ много времени посвятилъ астрономическимъ вопросамъ, такъ какъ есть еще одно важное обстоятельство, которое тѣсно связано съ астрономіей и о которомъ я долженъ поговорить. Вы знаете, что на практикѣ мнѣ совсѣмъ не приходилось имѣть дѣла съ астрономіей, и все-таки я питаю къ этому предмету живой интересъ. Это весьма замѣчательный и въ то же время несомнѣнный фактъ, что люди, занятые практической дѣятельностью опредѣленнаго рода, рѣдко замѣчаютъ ея привлекательныя стороны; ихъ видитъ скоро увлекающійся диллетантъ. Переутомленный астрономъ имѣетъ другую точку зрѣнія. Какъ только какая нибудь дѣятельность становится обязательной, дѣлается ежедневной работой, она теряетъ обыкновенно значительную долю своей привлекательности. Обратите вниманіе на то обстоятельство, что изобрѣтеніе въ какой либо отрасли инженернаго дѣла почти всегда бываетъ сдѣлано лицомъ, стоящимъ внѣ этого поприща; такія изобрѣтенія дѣлаются обыкновенно людьми, которые приступаютъ къ изученію предмета со свѣжей головой. Кто слышалъ когда нибудь, чтобы лицо, прожившее въ Японіи или въ Перу много лѣтъ, написало объ этй странѣ интересную книгу? Всякій, кто прожилъ тамъ два года, замѣчаетъ во время прогулки большей частью только самыя общеизвѣстныя вещи; онъ ощущаетъ неудержимое презрѣніе къ бродягѣ, который послѣ путешествія въ теченіе одного мѣсяца по наиболѣе оживленнымъ дорогамъ страны, пишетъ о ней книгу. Усыпленный своими успѣхами астрономъ забылъ теперь о затрудненiяхъ, которыя испытывали его предшественники, и смотритъ съ недовѣрiемъ на профана. Уже много времени прошло съ тѣхъ поръ, какъ онъ ощущалъ тотъ священный ужасъ, который овладѣваетъ нами, профанами, когда мы созерцаемъ звѣздное небо и опредѣляемъ объемъ и отдаленiе отдѣльныхъ членовъ небеснаго воинства. Астронамъ совершенно хладнокровно говоритъ о миллiонахъ лѣтъ, и упоминая о древнѣйшихъ эпохахъ человѣческой исторiи, онъ почти такъ же равнодушенъ, какъ и суровый геологъ. Причина этого очевидна. Многiе изъ Васъ, вѣроятно, знаютъ, что Морской Альманахъ, въ качествѣ литературнаго произведенiя, представляетъ собою одно изъ самыхъ интересныхъ справочныхъ изданiй, какое только существуетъ. Онъ безсвязнѣе словаря, и я думаю, что составленiе окладныхъ и избирательныхъ списковъ есть занятiе гораздо болѣе привлекательное, чѣмъ вычисленiе таблицъ Морского Альманаха. И все-таки одна единственная цифра изъ миллiона тѣхъ цифръ, которыя записываетъ въ эти таблицы переутомленный счетчикъ, можетъ рѣшить роковымъ образомъ вопросъ о жизни и смерти какъ команды, такъ и пассажировъ судна, которое на основанiи значенiя одной единственной буквы будетъ искать прiюта въ гавани или будетъ стараться избѣжать подводныхъ камней, грозящихъ гибелью.

Можетъ быть этотъ взглядъ преувеличенъ. Я вѣдь такъ рѣдко имѣю дѣло съ вопросами астрономiи и такъ мало знакомъ съ огорченiями и однообразiемъ обыденной жизни астронома, что я не поручусь, справедливы ли указанные факты именно по отношенiю къ астроному. Я думаю только, что они должны быть очень близки къ истинѣ, такъ какъ они оказываются вѣрны по отношенiю къ представителямъ другихъ профессiй.

Съ чувствомъ удовлетворенiя я могу сказать, что я прихожу въ соприкосновенiе съ разнаго рода людьми всевозможныхъ профессiй и, между прочимъ, съ нѣсколькими лицами, отрицающими множество вещей, которыя излагаются въ нашихъ самыхъ первоначальныхъ учебникахъ, напримѣръ, что земля кругла, или что она вращается вокругъ своей оси, или что французъ говоритъ на языкѣ, который отличается отъ нашего языка. Но ни одинъ человѣкъ, который бывалъ въ морѣ, не будетъ оспаривать того факта, что земля кругла; и никто изъ людей, бывшихъ во Францiи, не станетъ отрицать того, что французскiй языкъ отличается отъ нашего; но есть много людей, которые слышали во время своего обученiя въ школѣ о вращенiи земли и имѣли множество случаевъ наблюдать небесныя тѣла и которые несмотря на это все-таки отрицаютъ вращенiе земли вокругъ своей оси. Наоборотъ, они говорятъ Вамъ, что луна и звѣзды движутся вокругъ земли, такъ какъ они вѣдь видятъ, что эти свѣтила изъ ночи въ ночь описываютъ свои круговые пути; они говорятъ, что солнце движется вокругъ земли, такъ какъ они видятъ это каждый день. И если надъ этимъ подумать, то дѣйствительно не легко доказать вращенiе земли вокругъ ея оси. Съ помощью хорошаго телескопа и электрическаго телеграфа или хорошаго хронометра легко показать, основываясь на отсутствiи параллакса, что эти звѣзды должны отстоять отъ насъ очень далеко; но изъ всего этого мы узнаемъ только то, что вращается либо земля либо небесный сводъ. Разумѣется, кажется безконечно болѣе вѣроятнымъ, что вращается маленькая земля, чѣмъ что все звѣздное небо вращается вокругъ земли, какъ центра; а безконечная вѣроятность почти равносильна полной достовѣрности. Но нѣтъ, навѣрно, ни одного человѣка, которому не было бы желательно получить непосредственное, прямое доказательство. Явленiе приливовъ и отливовъ и почти всякое астрономическое открытiе можно разсматривать, какъ косвенное доказательство. Но все-таки всегда остается еще недостатокъ полной увѣренности, и если намъ скажутъ, что явленiе вращенiя волчка даетъ намъ возможность не выходя изъ комнаты получить настоящее доказательство вращенiя земли, то, конечно, мы будемъ привѣтствовать эту возможность; а между тѣмъ, изучивши это доказательство, мы будемъ надъ нимъ смѣяться, какъ надъ совершенно лишнимъ.

(Прдолженiе слѣдуетъ).

Законъ Паскаля. (2)

Историческiй очеркъ профессора **P. Duhem** (Бордо).

Переводъ У. Л.

*(Продолженiе *).*

III. Влiянiе Симона Стевина.

Труды этого ученаго занимаютъ первое мѣсто между тѣми изслѣдованiями въ области гидростатики, съ которыми Паскаль долженъ былъ познакомиться, благодаря работамъ Мерсенна.

Среди математическихъ изслѣдованiй Симона Стевина (1548—1620) статика представляетъ огромный интересъ, какъ по своему

*) См. № 400 „Вѣстника“.

значенію (въ исторіи науки), такъ и оригинальностью изложенныхъ [1]) въ ней принциповъ; въ самой этой статикѣ наибольшаго удивленія заслуживаетъ отдѣлъ гидростатики, какъ по оригинальности содержанія такъ и по строгости изложенія.

То, что Стевинъ написалъ о давленіи тяжелыхъ жидкостей, представляетъ собою рѣдкій въ исторіи физики примѣръ самороднаго творчества: дѣйствительно, гидростатическія открытія Бенедетти и Галилея (мы о нихъ скажемъ ниже), обнаруживаютъ еще замѣтные слѣды вліянія мыслителей, жившихъ раньше ихъ; теоремы же Стевина и его методы доказательства, повидимому, совершенно свободны отъ всякой традиціи.

Первое предложеніе Стевина—о давленіи тяжелыхъ жидкостей на стѣнки сосуда—изложено слѣдующимъ образомъ [2]).

„Давленіе воды на плоскую горизонтальную поверхность равно вѣсу столба воды съ основаніемъ, равнымъ площади данной поверхности и высотой, равной вертикальному разстоянію послѣдней отъ свободной поверхности воды".

Приступая къ доказательству этого предложенія, Стевинъ указываетъ на очевидность его для того случая, когда разсматриваемая поверхность служитъ основаніемъ сосуда, имѣющаго форму прямого цилиндра и наполненнаго жидкостью; чтобы доказать истинность теоремы для всевозможныхъ прочихъ случаевъ, Стевинъ прибѣгаетъ къ искусственному пріему, которымъ никто, кажется, не пользовался со времени Герона Александрійскаго: пріемъ этотъ состоитъ въ допущеніи, что равновѣсіе нѣкоторой массы воды не нарушается, если какая либо часть ея *отвердѣетъ*.

Доказанную такимъ образомъ теорему нѣкоторые предугадали еще до изслѣдованій Стевина; этого нельзя, однако, сказать о дальнѣйшихъ теоремахъ, которыя голландскій геометръ излагаетъ въ упомянутомъ сочиненіи: задача состоитъ въ опредѣленіи величины, направленія и точки приложенія давленія, которое тяжелая жидкость оказываетъ на вертикальную или косую стѣнку. Стевинъ далъ полное рѣшеніе этой задачи, никѣмъ до него не рѣшенной, и рѣшеніе это до сихъ поръ считается классическимъ. Можно оспаривать строгость метода, которымъ при этомъ пользовался Стевинъ, но необычайному остроумію его нельзя не удивляться.

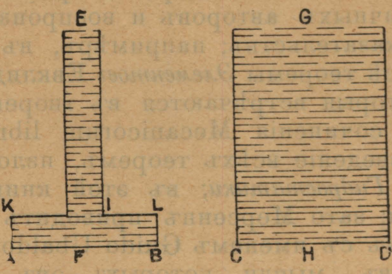
Вскорѣ послѣ появленія въ свѣтъ *Элементовъ Гидростатики* Стевинъ опубликовалъ книгу *о принципахъ практической механики;* въ этой книгѣ онъ дѣлаетъ слѣдующій выводъ изъ вышеуказаннаго предложенія:

---

[1]) Принципы статики Стевина мы разобрали въ нашей статьѣ *Les origines de la Statique,* глава XII: Симонъ Стевинъ (Revue des Questions scientifiques, янв. 1905 г.).

[2]) Simonis Stevini: *Tomus quartus mathematicorum hypomnematum;* de Statica; liber quartus Staticae: de hydrostaticis elementis, 8 theorema 10 propositio, p. 119.

„Предположимъ, что основанія AB и CD двухъ сосудовъ равны другъ другу; допустимъ также, что и высота EF равна высотѣ JH; но вообразимъ далѣе, что часть сосуда EJ, находящаяся поверхъ части KLAB, меньше соотвѣтственнаго объема GCD настолько, что вода, заключенная въ сосудѣ EAB вѣситъ одинъ ливръ, тогда какъ вода въ сосудѣ GCD вѣситъ десять



Фиг. 2.

ливровъ; допустимъ еще, что сосудъ GCD имѣетъ форму цилиндра; объемъ его въ десять разъ превосходитъ объемъ EAB. Мы утверждаемъ, что основаніе AB испытываетъ такое же точно давленіе, какое оказываетъ вода въ сосудѣ GCD на основаніе CD“.

Стевинъ указываетъ цѣлый рядъ остроумныхъ опытовъ, посредствомъ которыхъ можно провѣрить какъ вышеизложенную теорему, такъ и различныя другія слѣдствія, вытекающія изъ законовъ, изложенныхъ въ *Элементахъ гидростатики*. Большинство этихъ опытовъ почти безъ всякихъ измѣненій описывается въ нашихъ элементарныхъ учебникахъ; и демонстрируется ученикамъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Элементы Гидростатики Стевина написаны на фламандскомъ языкѣ; они впервые напечатаны въ Лейденѣ [1]) въ 1586 г., одновременно съ появленіемъ въ свѣтъ *Элементовъ Статики*. Въ 1608 году Стевинъ воспроизвелъ ихъ въ десятомъ собраніи своихъ „Математическихъ Мемуаровъ“, написанныхъ на фламандскомъ языкѣ. Одновременно съ появленіемъ въ свѣтъ этихъ мемуаровъ они были переведены и на латинскій языкъ [2]). Статика вмѣстѣ съ гиростатикой составили четвертый томъ этого изданія. На-

[1]) *De Beghinselen des Waterwichts*, beschrevendver Simon Stevin van Brugghe, tot Leyden, inde Druckerye van Christoffel Plantyn, by Francoys van Raphelinhen; MDLXXXVI.

[2]) *Hypomnemata mathematica*, quo comprehenduntur ea inquibussese exercuit illustrissimus, illustrissimo et antiquo stemmate ortus Princeps ac Dominus Mauritius, Princeps Auraicus, Comes Nassoviae,... conscripta a *Simon Stevino* Brugensi, Lugodini Batavorum, ex officini Joannis Patii, Academiae typographi Anno MDCV.

конецъ, въ 1634 г., Albert Girard перевелъ *Hypomnemata mathematica* на французскій языкъ.

Но Мерсеннъ не имѣлъ надобности ждать этого перевода, чтобы познакомить французскихъ математиковъ съ открытіями, которыя Стевинъ сдѣлалъ въ области гидростатики. Начиная съ 1626 г., дѣятельный францисканецъ сталъ издавать интересную серію небольшихъ сочиненій [1]), написанныхъ на латинскомъ языкѣ; каждое такое сочиненіе содержало рядъ теоремъ, заимствованныхъ у различныхъ авторовъ и воспроизведенныхъ безъ чертежей и безъ доказательствъ; напримѣръ, въ одномъ такомъ томикѣ помѣщены всѣ теоремы *Элементовъ* Евклида, въ другомъ—всѣ предложенія, которыя встрѣчаются въ твореніяхъ Архимеда. Такъ, въ III книгѣ сочиненія Mecanicorum libri мы находимъ буквальное воспроизведеніе всѣхъ теоремъ, изложенныхъ Стевиномъ въ *Элементахъ Гидростатики;* въ этой книгѣ III имя Стевина не упоминается; зато Мерсеннъ приводитъ его имя въ началѣ книги II рядомъ съ именемъ Guido Ubaldo del Monte, какъ одного изъ авторовъ, мысли которыхъ онъ имѣетъ въ виду излагать.

Мерсеннъ, однако, не довольствовался этой первой передачей идей Стевина. Въ 1664 г. онъ вторично изложилъ гидростатическія теоремы, открытыя Стевиномъ, включивъ ихъ въ свои *Cogitata physico-mathematica* [2]). Тѣ разсужденія Мерсенна, которыя мы воспроизвели въ предыдущемъ параграфѣ, онъ развиваетъ, какъ слѣдствія, вытекающія изъ одной такой теоремы Стевина.

Теперь мы можемъ считать установленнымъ, что Паскаль раньше, чѣмъ приступить къ излѣдованіямъ о равновѣсіи жидкостей, зналъ все, что Стевинъ сдѣлалъ въ этой области; краткое изложеніе выводовъ Стевина Паскаль нашелъ въ книгахъ Мерсенна; весьма вѣроятно, что Паскаль не довольствовался передачей Мерсенна и прочелъ самыя работы голландскаго математика. Такимъ образомъ самому Паскалю не пришлось открывать то положеніе, которое носитъ его имя и представляетъ собою руководящій принципъ „*Трактата о равновѣсіи жидкостей*“.

IV. Вліяніе Giovani Battista Benedetti.

Существуетъ несомнѣнная аналогія между большей частью теоремъ, изложенныхъ Паскалемъ, съ одной стороны, и формулированныхъ Паскалемъ—съ другой; послѣ всего сказаннаго аналогія эта должна болѣе удивлять насъ; однакоже, исходя изъ этой аналогіи, слѣдуетъ отмѣтить одно существенное отличіе.

---

[1]) *Sinopsis mathematica*, ad clarissimum virum D. Jacobum Laetus, Doctorem medicum Parisiensem. Lutetiae, ex officina Rob. Stephani, MDCXXVI.— Имя автора въ книгѣ не обозначено, но королевская привиллегія выдана на имя французскаго монаха P. Marin Mersenne.

[1]) F. Martini Mersenni *Cogitata physico-mathematica;* Ars Navigandi; Hydrostaticae liber primus.

Стевинъ изучилъ исключительно лишь давленіе тяжелой жидкости на стѣнки вмѣщающаго ее сосуда: онъ не задумывался надъ вопросомъ, какимъ образомъ внѣшнее давленіе, независимое отъ вѣса самой жидкости и сообщаемое ей вѣсомъ нагруженнаго поршня, передается черезъ жидкость другому поршню. Мерсеннъ же, а вслѣдъ за нимъ и Паскаль, считали эту задачу существенной; рѣшая ее, они открыли принципъ гидравлическаго пресса.

Совершенно ли самостоятельно Мерсеннъ обратилъ вниманіе на эту новую задачу, не разсмотрѣнную Стевиномъ? Или же онъ сдѣлалъ это благодаря вліянію какого-то другого ученаго? На этотъ послѣдній вопросъ мы должны отвѣтить утвердительно; какъ намъ кажется, здѣсь сказывается вліяніе Giovanni-Battista Benedetti.

Собраніе сочиненій Benedetti появилось въ свѣтъ въ 1585 году подъ названіемъ *Diversarum speculationum liber;* здѣсь мы находимъ письмо [1]) (число не обозначено), которое авторъ адресуетъ нѣкоему Giovanni-Paolo Capra, метр-д-отелю герцога Савойскаго; въ этомъ письмѣ, посвященномъ гидростатикѣ, Benedetti случайно упоминаетъ о давленіи вѣсомой жидкости на косыя стѣнки сосуда; изъ немногихъ словъ его явственно видно, что законы этого явленія ему неизвѣстны; но независимо отъ того въ письмѣ мы находимъ нѣсколько пунктовъ, представляющихъ существенный интересъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Соотношенія между сторонами треугольника, углы котораго находятся въ извѣстномъ отношеніи.

Н. Агрономова.

Прежде, чѣмъ приступать къ выводу общей формулы, разсмотримъ частные случаи.

1) Въ треугольникѣ ABC уголъ $B=2A$. Найти соотношеніе между сторонами $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$.

Раздѣлимъ уголъ B на равныя части биссекторомъ BD. Треугольникъ ADB будетъ равнобедренный, а треугольники BCD и ACB подобны. Изъ двухъ послѣднихъ получаемъ:

$$b:a=c:\overline{BD},\ \ c:\overline{BD}=a:\overline{CD}.$$

[1]) So. Baptistae Benedicti, patritii Veneti, philosophi *Diversarum speculationum liber;* Taurini, apud haeredem Nicolai Bevilaquae, MDLXXXV; стр. 287.

Изъ первой пропорціи получаемъ, что $BD=\frac{ac}{b}$, а изъ второй,—что $CD=\frac{aa}{b}=\frac{a^2}{b}$. Отсюда $AD=AC-CD=b-\frac{a^2}{b}$; но $BD=AD$, слѣдовательно, $ac=b^2-a^2$. Итакъ, искомое соотношеніе между сторонами есть

$$ac=b^2-a^2. \qquad 1)$$

Перейдемъ къ болѣе сложному случаю.

2) Въ треугольникѣ ABC уголъ $B=3A$. Найти соотношеніе между сторонами $AB=c$, $AC=b$ и $BC=a$. Проводимъ прямую Bc такъ, чтобы уголъ CBc равнялся углу A; примѣняемъ къ треугольнику ABc рѣшеніе первой задачи. Треугольники BCc и ACB подобны, а потому

$$b:a=c:Bc \text{ и } c:Bc=a:Cc.$$

Изъ этихъ пропорцій находимъ, что

$$Bc=\frac{ac}{b},\quad Cc=\frac{a^2}{b} \text{ и, кромѣ того, } Ac=\frac{b^2-a^2}{b}.$$

Въ треугольникѣ ABc положимъ сторону $AB=\gamma$, $Ac=\beta$, $Bc=\alpha$. Между этими сторонами, какъ извѣстно изъ первой задачи, существуетъ такое соотношеніе:

$$\beta^2-\alpha^2-\alpha\gamma=0; \qquad 2)$$

но

$$\gamma=c,\ \beta=\frac{b^2-a^2}{b},\ \alpha=\frac{ac}{b}.$$

Подставляя эти значенія въ формулу 2, получимъ искомое соотношеніе въ слѣдующей формѣ:

$$(b^2-a^2)^2-ac^2(a+b)=0$$

или

$$(b^2-a^2)(b-a)-ac^2=0$$

или

$$b^3-ab^2-a^2b+a^3-ac^2=0.$$

Для поясненія рѣшимъ еще одну задачу.

3. Въ треугольникѣ ABC уголъ $B=4A$. Найти соотношеніе между его сторонами $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$.

Проведемъ прямую Bc такъ, чтобы уголъ $CBc=A$. Треугольникъ BCc подобенъ треугольнику ACB, а потому, какъ и прежде,

$$Bc=\frac{ac}{b},\ Cc=\frac{a^2}{b},\ Ac=\frac{b^2-a^2}{c}.$$

Въ треугольникѣ ABc по рѣшенію 2 задачи существуетъ такое соотношеніе:

$$\beta^3-\alpha\beta^2-\alpha^2\beta-\alpha(\gamma^2-\alpha^2)=0, \qquad 3)$$

гдѣ

$$\gamma=AB,\ \beta=Ac,\ \alpha=Bc.$$

Подставивъ вмѣсто α, β, γ ихъ значенія $\frac{ac}{b}$, $\frac{b^2-a^2}{b}$, c въ равенства 3, найдемъ искомое соотношеніе въ слѣдующей формѣ:

$$b^4-a(2a+c)b^2-a(c^2-a^2)(a+c)=0.$$

4) Случаи съ B=5A, 6A, 7A и т. д. не заслуживаютъ вниманія и поэтому я сразу перехожу къ общей задачѣ, а именно:

Задача. Въ треугольникѣ ABC уголъ B$=n$A; найти соотношеніе между его сторонами.

Раздѣлимъ рѣшеніе задачи на 2 части: a) $n=2i$, b) $n=2i+1$.

Случай I, $n=2i$.

Составляемъ таблицу.

$$i=1,\ B=b^2-a(c+a),$$

$$i=2,\ D=b^4-a(c+2a)b^2-a(c+a)(c^2-a^2),$$

$$i=3,\ F=b^6-a(c+3a)b^4-a(c+a)(c^2+ac-3a^2)b^2-$$
$$-a(c+a)(c^2-a^2)^2 \text{ и т. д.}$$

Въ правой части помѣщены выраженія, обращающіяся въ нуль для треугольниковъ, у которыхъ $\angle B=\angle 2A$, $\angle B=\angle 4A$, $\angle B=\angle 6A$ и т. д.; эти соотношенія вычислены пока непосредственно.

Составляемъ теперь другую таблицу:

$$D-B(b^2-a^2+c^2)=-b^2c^2,$$

$$F-D(b^2-a^2+c^2)=-b^2c^2(b^2-a^2)+ab^2c^3,$$

$$H-F(b^2-a^2+c^2)=-b^2c^2(b^2-a^2)+ab^2c^3(b^2-a^2)+$$
$$+a^2b^2c^4+ab^2c^5 \text{ и т. д.}$$

Эти формулы дѣлимъ на $-b^2c^2$:

$$\frac{B(b^2-a^2+c^2)-D}{b^2c^2}=1,$$

$$\frac{D(b^2-a^2+c^2)-F}{b^2c^2}=b^2-a^2-ac=B,$$

$$\frac{F(b^2-a^2+c^2)-H}{b^2c^2}=(b^2-a^2)-ac(b^2-a^2)-a^2c^2-ac^4=D \text{ и т. д.}$$

Отсюда

$$D=(b^2-a^2+c^2)B-b^2c^2,$$

$$F=(b^2-a^2+c^2)D-b^2c^2B,$$

$$H=(b^2-a^2+c^2)F-b^2c^2D \text{ и т. д.}$$

Таково соотношеніе между B, D, F, H, гдѣ B, D, F, H суть соотношенія между сторонами треугольника, у котораго одинъ уголъ въ $2i$ разъ болѣе другого.

Случай II, $n=2i+1$.

Тѣ же самыя соображенія приведутъ насъ къ аналогичнымъ законамъ для A, C, E, G и т. д., гдѣ A, C, E, G суть соотношенія между сторонами треугольника, у котораго одинъ уголъ въ $2i+1$ разъ болѣе другого, а именно:

$$E=(b^2-a^2+c^2)C-b^2c^2A,$$

$$G=(b^2-a^2+c^2)E-b^2c^2C,$$

$$J=(b^2-a^2+c^2)G-b^2c^2E \text{ и т. д.}$$

Подобное рѣшеніе задачи за нѣкоторыми измѣненіями принадлежитъ Леонарду Эйлеру.

5. Рѣшеніе нашей задачи еще нельзя считать полнымъ: мы нашли только законъ, связывающій соотношенія между сторонами, но общей формулы для соотношеній еще нѣтъ.

Обозначимъ для краткости

$b^2-a^2+c^2$ черезъ $2k$,

$-b^2c^2$ черезъ f;

кромѣ того, B обозначимъ черезъ P_1, D черезъ P_2, F черезъ P_3 и т. д.

Тогда для перваго случая получимъ слѣдующій рядъ выраженій:

$$P_3=2kP_2+fP_1,$$

$$P_4=2kP_2+fP_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n=2kP_{n-1}+fP_{n-2} \qquad \alpha)$$

и, кромѣ того,

$$P_2=2kP_1+f. \qquad \alpha)$$

Пусть $P_n=xp^n+yt^n$.

Тогда $P_{n-2}=xp^{n-2}+yt^{n-2}$,

$$P_{n-1}=xp^{n-1}+yt^{n-1}.$$

Изъ равенства α получимъ:

$$xp^{n-2}(p^2-2kp-f)+yt^{n-2}(t^2-2kt-f).$$

Здѣль можно положить $p^2-2kp-f=0$,

$$t^2-2kt-f=0,$$

вслѣдствіе произвольности количествъ p, t.

Тогда $p=k\pm\sqrt{k^2+f}$, $t=k\pm\sqrt{k^2+f}$.

Возьмемъ $p=k+\sqrt{k^2+f}$, а $t=k-\sqrt{k^2+f}$.

Такъ какъ

$$P_1=xp+yt,$$

$$P_2=xp^2+yt^2,$$

то

$$x=\frac{tP_1-P_2}{pt-p^2},$$

$$y=\frac{pP_1-P_2}{pt-t^2}.$$

Возьмемъ опять равенство

$$P_n=xp^n+yt^n.$$

Но такъ какъ x, y, p, t намъ извѣстны, то

N) $$P_n=\left(\frac{tP_1-P_2}{pt-p^2}\right)\cdot\left(k+\sqrt{k^2+f}\right)^n+\left(\frac{pP_1-P_2}{pt-t^2}\right)\cdot\left(k-\sqrt{k^2+f}\right)^n,$$

гдѣ

$$f=-b^2c^2,$$

$$k=\frac{b^2-a^2+c^2}{2},$$

$$P_1=b^2-a(a+c)=B,$$

$$P_2=b^4-a(2a+c)b^2-a(a+c)(c^2-a^2),$$

$$n=2i.$$

Приравнявъ P_n нулю, мы найдемъ соотношеніе между сторонами такого треугольника, у котораго одинъ уголъ въ $2i$ разъ болѣе другого.

Подобное же соотношеніе можно найти для случая $2i+1$.

Выведемъ теперь общую формулу аналитическимъ путемъ.

Обозначимъ для этого уголъ A черезъ a, тогда $B=na$. Имѣемъ два соотношенія:

$$(\cos na+i\sin na)=(\cos a+i\sin a)^n$$

$$(\cos na-i\sin n\alpha)=(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n.$$

Отсюда:

$$\frac{\cos na+i\sin na}{\cos na-i\sin na}=\frac{(\cos a+i\sin a)^n}{(\cos a-i\sin a)^n},\text{ гдѣ } i=\sqrt{-1}.$$

Разсмотримъ два случая: $n=2i$ и $n=2i+1$. Пусть $n=2i$. Извлекая изъ послѣдняго равенства квадратный корень, получимъ:

$$\frac{\cos i\alpha+\sqrt{-1}\sin i\alpha}{\cos i\alpha-\sqrt{-1}\sin i\alpha}=\frac{(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)^i}{(\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha)^i}.$$

Извѣстно: $\cos 2i\alpha=\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

$$\cos i\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+c)^2-b^2}{ac}} \text{ и } \sin i\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-2(c-a)^2}{ac}},$$

затѣмъ

$$\cos\alpha=\frac{b^2-a^2+c^2}{2bc} \text{ и }$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}{2bc}.$$

Положимъ для краткости

$$\Delta=\sqrt{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2};$$

тогда наше уравненіе будетъ таково:

$$\frac{(a+c)^2-b^2+\Delta}{(a+c)^2-b^2-\Delta}=\frac{(b^2-a^2+c^2+\Delta)^i}{(b^2-a^2+c^2-\Delta)^i}.$$

Или

$$[(a+c)^2-b^2-\Delta][b^2-a^2+c^2+\Delta]^i-$$

$$-[(a+c)^2-b^2+\Delta]\cdot[b^2-a^2+c^2-\Delta]^i=0.$$

Это уравненіе тождественно съ уравненіемъ N), если въ послѣднемъ сдѣлать соотвѣтствующія подстановки.

Теперь разсмотримъ 2 случай, когда $n=2i+1$.

Имѣемъ:

$$\frac{\cos 2i\alpha+\sqrt{-1}\sin 2i\alpha}{\cos 2i\alpha-\sqrt{-1}\sin 2i\alpha}=\left[\frac{\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha}{\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha}\right]^{2i}.$$

Извлечемъ корень квадратный; тогда

$$\frac{\cos i\alpha+\sqrt{-1}\sin i\alpha}{\cos i\alpha-\sqrt{-1}\sin i\alpha}=\left[\frac{\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha}{\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha}\right]^{i} \quad \text{M)}$$

Такъ какъ $C=180^0-2(i+1)A=180-2(i+1)\alpha$,

то $\cos 2(i+1)\alpha=\dfrac{c^2-b^2-a^2}{2ab}$, $\cos(1+i)\alpha=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c^2-(b-a)^2}{ab}}$,

$$\sin(1+i)\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+a)^2-c^2}{ab}},\quad \cos\alpha=\frac{b^2-a^2-c^2}{2bc}.$$

Изъ этихъ выраженій найдемъ:

$$\cos ia = \frac{b+a}{2c\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{c^2-(b-a)^2},$$

$$\sin ia = \frac{b-a}{2c\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{(b+a)^2-c^2}.$$

Подставивъ значенія $\cos a$, $\sin \alpha$, $\cos ia$, $\sin ia$ въ формулу M, найдемъ:

$$\left[(b+a)-\frac{(b-a)\Delta}{c^2-(b-a)^2}\right](b^2-a^2+c^2+\Delta)^i-\left[(b+a)+\frac{(b-a)\Delta}{c^2-(b-a)^2}\right]\cdot$$

$$\cdot\,(b^2-a^2+c^2-\Delta)^i=0.$$

Итакъ, наша задача рѣшена.

Возможенъ случай, когда $b=c$ и случай, когда $c=a$. Вывести общія формулы для этихъ случаевъ не представляетъ затрудненій. Интересующихся этимъ вопросомъ отсылаемъ къ оригинальной статьѣ Леонарда Эйлера. Полное заглавіе статьи таково: Proprietates triangulorum, quorum anguli certani inter se tenet rationem; она помѣщена въ XI томѣ академическаго журнала Novi Commentarii.

Какія нужны реформы въ преподаваніи математики?

Редакція журнала *„L'enseignement mathématique"* предприняла анкету по вопросу о реформѣ преподаванія математики. Съ этой цѣлью редакція обращается къ лицамъ, интересующимся вопросами преподаванія математики, съ просьбой отвѣтить на слѣдующіе три вопроса:

1) Какія возможны улучшенія въ постановкѣ преподаванія чистой математики?

2) Какова должна быть роль высшихъ учебныхъ заведеній въ дѣлѣ подготовки преподавателей математики для среднихъ учебныхъ заведеній?

3) Какъ нужно поставить преподаваніе математики, чтобы оно возможно лучше отвѣчало потребностямъ другихъ наукъ, чистыхъ и прикладныхъ?

Ниже мы изложимъ содержаніе нѣкоторыхъ отвѣтовъ, полученныхъ редакціей.

Мнѣніе профессора Gino Loria (Gênes, Италія).

Огромное зданіе математики, основаніе котораго заложено древними геометрами, съ каждымъ днемъ разростается въ вышину, ширину и глубину. Слѣдовало бы не такъ много времени и труда удѣлять ознакомленію учениковъ съ подвальнымъ этажомъ: онъ и темнѣе другихъ и менѣе привлекателенъ, чѣмъ они; если слишкомъ долго задерживаться въ немъ, то у учениковъ не хватитъ ни времени, ни желанія для ознакомленія съ верхними этажами науки. Нужно ускорить темпъ преподаванія; придется, конечно, поступиться нѣкоторыми главами, на которыя съ благоговѣніемъ взираетъ историкъ; за то освободится мѣсто для другихъ отдѣловъ, усвоеніе которыхъ въ настоящее время представляетъ бо́льшую важность. Напримѣръ, съ успѣхомъ можно было бы опустить евклидову теорію пропорцій, излагаемую въ нѣкоторыхъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, элементарную теорію коническихъ сѣченій Аполлонія и т. п. Вмѣсто этихъ теорій было бы желательно и вполнѣ возможно ввести въ курсъ средней школы нѣкоторыя дисциплины, которыя теперь относятся къ разряду высшихъ: въ этихъ видахъ нетрудно было бы разработать, и, такъ сказать, демократизировать элементы аналитической геометріи, начертательной геометріи и т. п.

Желательно было бы дать учащимся ясное представленіе о прикладной сторонѣ математики; гармоническое сочетаніе чистой теоріи съ приложеніями удовлетворяло бы и привлекало въ равной степени и тѣхъ учащихся, вниманіе которыхъ направлено на *факты*, и тѣхъ, которые интересуются *идеями*.

Существенныя, коренныя измѣненія необходимы въ дѣлѣ подготовки преподавателей математики; въ настоящее время профессіональныя потребности этихъ послѣднихъ совершенно игнорируются; напримѣръ, будущій учитель математики не освааивается съ приближеннымъ вычисленіемъ, не умѣетъ сдѣлать на доскѣ такой чертежъ, который бы являлся для учащихся дѣйствительнымъ подспорьемъ; его не знакомятъ съ существенными пріобрѣтеніями научной подготовки, и т. д. Высшія учебныя заведенія должны удѣлять вниманіе будущему учителю математики въ неменьшей степени, чѣмъ они это дѣлаютъ по отношенію къ будущему медику.

Мнѣніе г. Emile Borel (профессоръ Faculté des Sciences въ Парижѣ).

Этотъ педагогъ останавливается на слѣдующемъ частномъ вопросѣ, которому онъ придаетъ большое значеніе:

Въ настоящее время преподаваніе геометріи въ средней школѣ ведется по системѣ Евклида. Такое положеніе вещей совершенно не соотвѣтствуетъ современному состоянію науки. Въ преподаваніи геометріи необходимо проникнуться основнымъ положеніемъ современной науки: „геометрія есть изученіе группы движеній“. Чтобы замѣнить систему Евклида, которая разрабатывалась и совершенствовалась вѣками, другой системой, въ духѣ современной науки, понадобится, конечно, колоссальный трудъ. Но предстоящія трудности не должны останавливать насъ; имѣя ихъ въ виду, будемъ снисходитеьно относиться ко всякой попыткѣ въ указанномъ направленіи.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги: 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 671 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC, зная сумму сторонъ его $b+c=m$, сумму высотъ $h_b+h_c=n$ и радіусъ вписаннаго въ него круга r.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 672 (4 сер.). По даннымъ діагоналямъ m и n ортодіагональнаго *) четыреугольника построить четыреугольникъ такъ, чтобы въ него можно было вписать и чтобы вмѣстѣ съ тѣмъ около него можно было описать кругъ.

Д. Е.

№ 673 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x+\sqrt{xy}+y=a,$$

$$x^3+2xy\sqrt{xy}+y^3=a^3.$$

Г. Оганянцъ (Эривань).

№ 674 (4 сер.). Доказать справедливость тожества

$$(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)\ldots(2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1.$$

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 675 (4 сер.). Найти предѣлъ, къ которому стремится выраженіе

$$\frac{2tg^2x}{1-\cos x}$$

въ то время, когда x стремится къ предѣлу 0.

Д. Колянковскій (с. Степановка).

№ 676 (4 сер.). Съ аэростата находившагося надъ моремъ, бросили тѣло; звукъ всплеска донесся черезъ 10 секундъ. Опредѣлить высоту, на которой находился аэростатъ.

Л. Ямпольскій (Braunschweig).

---

*) О свойствахъ ортодіагональнаго четыреугольника см. „Новая геометрія треугольника“ Д. Ефремова.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 575 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$x^9+x^8y+x^7y^2+x^6y^3+x^5y^4-x^4y^5-x^3y^6-x^2y^7-xy^8-y^9=0,$$

$$x^2+y^2=1.$$

Представивъ первое изъ данныхъ уравненій въ видѣ

$$x^5(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)-y^5(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)=0,$$

выводимъ за скобки $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$; тогда получимъ:

$$(x^5-y^5)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)=0,$$

откуда, разлагая x^5-y^5 на множителей, находимъ

$$(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)^2=0 \qquad (1).$$

Такимъ образомъ первое изъ уравненій распадается на два:

$$x-y=0 \quad (2) \qquad \text{или} \quad x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=0 \quad (3).$$

Рѣшая уравненіе (2) совмѣстно со вторымъ изъ данныхъ уравненій, получимъ:

$$x=y, \quad 2x^2=1, \quad \text{откуда } x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (4).$$

Уравненіе (2) можно представить въ видѣ

$$(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2+xy(x^2+y^2)=0,$$

или

$$x^2y^2-(x^2+y^2)xy-(x^2+y^2)^2=0 \qquad (5).$$

Но на основаніи второго изъ данныхъ уравненій $x^2+y^2=1$, а потому (см. (5))

$$x^2y^2-xy-1=0,$$

откуда

$$xy=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \qquad (6).$$

Рѣшая каждое изъ уравненій (6) совмѣстно со вторымъ уравненіемъ (напр., способомъ подстановки), находимъ:

$$x=\pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{1-(1\pm\sqrt{5})^2}}{2}} \qquad (7).$$

Подставляя каждое изъ восьми значеній x изъ формулы (7) въ равенство (5), находимъ соотвѣтствующія значенія y, причемъ при радикалѣ $\sqrt{5}$ надо при подстановкѣ въ равенство (6) брать тотъ же знакъ, какой взятъ въ подставляемомъ значеніи x. Найденныя рѣшенія (см. (4), (7)) можно объединить въ общія формулы. Дѣйствительно, равенство (1) равносильно равенству $x^5-y^5=0$, откуда $\left(\frac{x}{y}\right)^5=1$. Слѣдовательно, $\frac{x}{y}=\alpha$, гдѣ α—одно изъ значеній корня пятой степени изъ единицы, такъ что $x=\alpha y$ (8). Подставляя это значенiе x въ равенство $x^2+y^2=1$ и опредѣляя y, получимъ (см. (8))

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}},\quad x=\pm\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}},\qquad (9)$$

гдѣ въ обѣихъ формулахъ надо взять одинъ и тотъ же знакъ. Давая α *) каждое изъ пяти возможныхъ значенiй, получаемъ (см. (9)) всѣ десять рѣшенiй данной системы.

А. Варенцовъ (Ростовъ н/Д); *М. Кузнецовъ* (Астрахань); *В. Гейманъ* (Өеодосiя); *А. Турчаниновъ* (Брестъ); *Е. Хандановъ* (Тифлисъ); *В. Смирновъ*; *М. Сейдель* (Ростовъ н/Д); *А. Варенцовъ* ((Ростовъ н/Д).

№ 576 (4 сер.). *Доказать, что при нечетномъ значенiи* n *число*

$$1^n+2^n+3^n+\ldots+(a-1)^n+a^n$$

дѣлится на

$$1+2+3+\ldots+(a-1)+a.$$

Называя сумму $1^n+2^n+\ldots+(m-1)^n+m^n$ черезъ s_m имѣемъ:

$$2s_m=[1^n+2^n+\ldots+(m-1)^n+m^n]+[m^n+(m-1)^n+\ldots 2^n+1^n]=$$

$$=[1^n+m^n]+[2^n+(m-1)^n]+\ldots+[x^n+(m-x+1)^n]+\ldots+[m^n+1^n]\quad (1).$$

Но каждая изъ суммъ, заключенныхъ въ квадратныя скобки, какъ сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней, дѣлится на сумму

$x+(m-x+1)=m+1$. Итакъ, $2s_m$ кратно $m+1$, а потому $2s_a$ кратно $a+1$.

Но

$$2s_a=2[1^n+2^n+\ldots+(a-1)^n]+2a^n=2s_{a-1}+2a^n\qquad (2).$$

Такъ какъ, по доказанному выше, $2s_{a-1}$ кратно a, то (см. (2)) $2s_a$ тоже кратно a. Итакъ число $2s_a$ кратно двухъ взаимно простыхъ чиселъ $a+1$ и a, а потому оно кратно произведенiя $a(a+1)$, т. е.

$$2s_a=a(a+1)k\qquad (3).$$

гдѣ k—число цѣлое. Дѣля равенство (3) на 2, получимъ:

$$1^n+2^n+\ldots+a^n=s_a=k\cdot\frac{a(a+1)}{2}=k(1+2+\ldots+a),\ \text{т. е.}$$

число $1^n+2^n+\ldots+a^n$ дѣлится на $1+2+\ldots+a$.

А. Варенцовъ (Ростовъ н/Д); *М. Кузнецовъ* (Астрахань); *Г. Оганянцъ* (Москва); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *М. Сейдель* (Ростовъ н/Д); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н/Д); *Е. Хандановъ* (Тифлисъ).

№ 579 (4 сер.). *На сонометръ натянута грузомъ въ* 1 *килограммъ мѣдная струна длиною въ* 1 *метръ. Рядомъ съ ней натянута желѣзная струна такого же сѣченiя.* 1) *Опредѣлить натяженiе желѣзной струны, когда она звучитъ въ унисонъ съ мѣдной, при условiи, чтобы длина желѣзной струны равнялась тоже* 1 *метру.* 2) *Опредѣлить длину желѣзной струны, издающей тотъ же звукъ, какой издаетъ*

---

*) Значенiя α опредѣляются изъ уравненiя $z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$, причемъ уравненiе $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ можно рѣшить по способу возвратныхъ уравненiй.

данная мѣдная струна, при условіи, чтобы натяженіе желѣзной струны равнялось 1 килограмму. 3) *Какую длину должна имѣть желѣзная струна при одинаковомъ натяженіи съ мѣдной, чтобы издаваемый ею звукъ былъ квинтой звука мѣдной струны? Плотности желѣза и мѣди равны соотвѣтственно* 7,45 *и* 8,95

По формулѣ Taylor'а число колебаній N струны равно

$$\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{pg}{dw}} \quad (1),$$

гдѣ l—длина въ сантиметрахъ, p—натяженіе въ граммахъ, g—ускореніе силы тяжести, d—плотность, w—площадь поперечнаго сѣченія, которая, по условію, остается для желѣзной и для мѣдной струны постоянной. 1) Для мѣдной струны $l=100$, $p=1000$, $d=8{,}95$; для желѣзной струны, согласно съ условіемъ перваго вопроса, $l=1000$, а $d=7{,}45$. Называя неизвѣстное натяженіе желѣзной струны черезъ x, находимъ, что числа колебаній разсматриваемыхъ мѣдной и желѣзной струны соотвѣтственно равны

$$\frac{1}{2.100}\sqrt{\frac{100g}{8{,}95w}} \text{ и } \frac{1}{2.100}\sqrt{\frac{xg}{7{,}45w}};$$

но эти струны звучатъ въ унисонъ, а потому

$$\frac{1}{2.100}\sqrt{\frac{1000g}{8{,}95w}}=\frac{1}{2.100}\sqrt{\frac{xg}{7{,}45w}},$$

откуда

$$x=\frac{1000.7{,}45}{8{,}95}=832{,}4 \text{ грамма.}$$

2) Оставляя прежнія значенія l, p и d для мѣдной струны, мы должны положить для желѣзной, по смыслу второго вопроса, $p=1000$, $d=7{,}45$ и обозначить искомую ея длину черезъ y. Тогда

$$\frac{1}{2.100}\sqrt{\frac{1000g}{8{,}95w}}=\frac{1}{2y}\cdot\sqrt{\frac{1001g}{7{,}45w}},$$

откуда

$$y=100.\sqrt{\frac{8{,}95}{7{,}45}}=109{,}6 \text{ сантиметра.}$$

3) Изъ формулы (1) видно, что при прочихъ равныхъ условіяхъ высота звука струны обратно пропорціональна ея длинѣ. Искомая желѣзная струна третьяго вопроса, давая квинту желѣзной струны второго вопроса, должна имѣть число колебаній, равное $\frac{3}{2}$ числа колебаній желѣзной струны, длиною въ $100\sqrt{\frac{8{,}95}{7{,}45}}$ сантим., при томъ же натяженіи и томъ же сѣченіи. Поэтому ея длина равна

$$\frac{2}{3}\cdot 100\sqrt{\frac{8{,}95}{7{,}45}}=73{,}07 \text{ сантиметра.}$$

А. Варенцовъ (Ростовъ н/Д); *В. Гейманъ* (Θеодосія); *Г. Оганянцъ* (Москва); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н/Д); *Е. Хандановъ* (Тифлисъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66.

Обложка
ищется

Обложка
ищется