Обложка
ищется

Обложка
пщется

XLII Сем. № 2.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 494.

Успѣхи динамическаго воздухоплаванія.

Докладъ о присужденіи преміи Озириса въ 1909 году.

Э. Пикара,

члена французской Академіи Наукъ.

Премія въ 100 000 франковъ, которую Институтъ имѣетъ возможность выдавать каждые 3 года благодаря щедрости г. Озириса, имѣетъ цѣлью „вознаграждать открытія или труды, наиболѣе замѣчательные въ области науки, литературы, искусства, промышленности и вообще всего, что касается общественныхъ интересовъ". Въ настоящемъ году намъ предстоитъ выдать эту премію въ третій разъ. Шесть лѣтъ тому назадъ мы наградили этой преміей одного изъ своихъ сочленовъ, достойнаго преемника Пастера, за блестящіе успѣхи, достигнутые имъ въ леченіи губительной болѣзни; три года тому назадъ премія была назначена выдающемуся историку, только-что окончившему свой трудъ по исторіи Европы и французской революціи.

Въ намѣренія г. Озириса отнюдь не входило чередованіе различныхъ отраслей науки и искусства, культивируемыхъ въ отдѣльныхъ

Академіяхъ Института Франціи*). Сообразно этому избранная Вами коммиссія старалась, главнымъ образомъ, выбрать то открытіе или произведеніе послѣднихъ трехъ лѣтъ, которое больше всего обратило на себя вниманіе и, повидимому, будетъ имѣть наиболѣе глубокія послѣдствія. Коммиссія единодушно признала, что весьма значительные успѣхи были достигнуты въ вопросѣ воздухоплаванія — успѣхи, одинаково интересующіе какъ людей науки и промышленности, такъ и общественныхъ дѣятелей. Такъ какъ, согласно волѣ жертвователя, иностранцы не могутъ принимать участія въ конкурсѣ, то мы предлагаемъ Вамъ назначить премію Озириса представителямъ французскаго воздухоплаванія.

Въ настоящемъ докладѣ мы изложимъ соображенія, которыми мы руководились, дѣлая выборъ между различными претендентами, посвятившими себя дѣлу завоеванія воздушнаго океана.

I.

Не восходя до легендарнаго Икара и до искусственнаго голубя Архита Тарентскаго, мы считаемъ полезнымъ бросить сначала бѣглый взглядъ на исторію воздухоплаванія. Въ эпоху Возрожденія Леонардо да-Винчи впервые понялъ, что птица при полетѣ опирается на воздушныя массы; послѣ своихъ изслѣдованій полета онъ описываетъ геликоптеръ**) и парашютъ.

Въ слѣдующія два столѣтія, какъ обнаруживаютъ многочисленные документы, задачи воздухоплаванія вызывали живой интересъ. При этомъ не ограничивались аппаратами, болѣе тяжелыми, чѣмъ воздухъ; въ концѣ XVII столѣтія нѣкоторые представили уже изобрѣтенные ими воздушные шары. Около 1750 года съ различныхъ сторонъ появляются проекты летающихъ людей и летательныхъ машинъ; были построены приборы,— нѣчто въ родѣ ортоптеровъ, — снабженные крыльями на шарнирахъ, бьющими по воздуху нормально***); было даже предложено присоединить къ геликоптеру винтъ, который сообщалъ бы аппарату горизонтальное движеніе. Однако, произведенные опыты не дали благопріятныхъ результатовъ. При всемъ томъ нельзя не отмѣтить, что нѣкоторыя изъ сдѣланныхъ тогда предложеній нашли примѣненіе,— правда, гораздо позже.

Всѣ эти опыты съ аппаратами, болѣе тяжелыми, чѣмъ воздухъ, (только такіе аппараты мы имѣемъ въ виду въ настоящемъ очеркѣ)

---

*) Институтъ Франціи состоитъ, какъ извѣстно, изъ пяти „Академій“. Коммиссія, которой довѣряется присужденіе преміи Озириса, составляется изъ пяти членовъ Института, избираемыхъ по одному отъ каждой Академіи. *Ред.*

**) Летательный снарядъ, подымающійся вверхъ при помощи винта или пропеллера, лопасти котораго вращаются вокругъ вертикальной или наклонной оси. Идеи Леонардо да-Винчи долго оставались безъ всякаго вліянія на искусство воздухоплаванія, такъ какъ рукописи его были опубликованы только въ XVIII столѣтіи. *Ред.*

***) Подъ ортоптеромъ, собственно, и разумѣютъ снарядъ, основанный на томъ принципѣ, что двигательный аппаратъ бьетъ по воздуху нормально. Въ этого рода приборахъ крылья, какъ у птицы, вращаются вокругъ горизонтальной или почти горизонтальной оси.

были прерваны въ 1783 г. знаменитыми опытами братьевъ Монгольфьеръ (Montgolfier), вызвавшими неописуемый энтузіазмъ*). Черезъ 6 мѣсяцевъ послѣ этихъ опытовъ Менье (Meusnier) представилъ Академіи Наукъ замѣчательный мемуаръ, опубликованный, однако, гораздо позже. Въ его проектѣ мы находимъ указанія на существенныя условія, которыя должны были привести къ осуществленію управляемыхъ аэростатовъ: продолговатая форма аэростатовъ, небольшой внутренній шаръ, который можетъ быть наполненъ воздухомъ, и примѣненіе горизонтальнаго винтового двигателя (пропеллера). Именно благодаря пути, который былъ указанъ Менье, скончавшимся въ 1793 году, полковникъ Ренаръ (Renard) построилъ теорію управляемыхъ аэростатовъ и имѣлъ возможность осуществить знаменитый опытъ 1884 года**).

Несмотря на торжество аэростатовъ, аппараты, болѣе тяжелые чѣмъ воздухъ, все же находили своихъ приверженцевъ. Однако, то что было сдѣлано въ теченіе первой половины истекшаго столѣтія, не

---

*) Что посредствомъ аэростата физически возможно поднять въ воздухъ значительный грузъ и удерживать таковой на высотѣ, впервые понялъ Ф. Лана (F. Lana). Въ послѣдней четверти XVII столѣтія Лана предложилъ изготовить изъ жести или изъ какого-либо другого матеріала шаръ и выкачать изъ него воздухъ: тогда онъ необходимо долженъ будетъ подниматься вверхъ. Однако, практически осуществить это оказалось невозможнымъ, такъ какъ тонкая стѣнка не выдерживала давленія воздуха.

Около середины XVIII столѣтія Кавендишъ открылъ водородъ, который оказался въ $14^{1}/_{2}$ раза легче атмосфернаго воздуха. Въ 1782 г. Кавалло пытался наполнить водородомъ резервуары изъ различныхъ веществъ, но его аэростаты все-таки не подымались: газъ ускользалъ очень быстро черезъ оболочку шара. Однако, принципы, на которыхъ можетъ быть построенъ аэростатъ, были, такимъ образомъ, указаны правильно.

Въ 1783 г. І. Монгольфьеръ обратилъ вниманіе на то, что нагрѣваніе воздуха въ резервуарѣ должно разрѣжать его и можетъ такимъ образомъ сообщить аэростату подъемную силу; нужно было только изготовить шары большого объема съ тонкой оболочкой; за этимъ дѣло не стало. Монгольфьеръ сдѣлалъ шары сначала изъ бумаги, а потомъ изъ полотна. При увеличеніи резервуара его поверхность, а, слѣдовательно, и вѣсъ оболочки, возрастали пропорціонально квадрату діаметра, объемъ же, а съ ними и подъемная сила возрастали пропорціонально кубу діаметра.

При объемѣ шара въ 2000 *кб. м.* было уже возможно, нагрѣвая содержащійся въ немъ воздухъ, поднять нѣсколько человѣкъ. 21 ноября 1783 г. Пилатръ де Розье (Pilâtre de Rozier) и маркизъ д'Арландъ (d'Arlandes) произвели первый полетъ на воздушномъ шарѣ.

**) Пользуясь указаніемъ Менье, Ренардъ и Кребсъ построили первый управляемый аэростатъ. Трудность осуществленія идей Менье заключалась, главнымъ образомъ, въ устройствѣ достаточно легкаго мотора. Ренаръ и Кребсъ воспользовались электрическимъ двигателемъ; моторъ приводился въ движеніе батареей изъ 3 элементовъ, вѣсилъ 98 *кг.* и давалъ $8^{1}/_{2}$ лошадиныхъ силъ. Шаръ былъ наполненъ водородомъ и вѣсилъ около 2000 *кг.*; онъ могъ поднять еще до 350 *кг.*, стало быть, двухъ пассажировъ и около 200 *кг.* балласта. 9 августа 1884 г. Ренардъ при безвѣтренной погодѣ поднялся на этомъ шарѣ, обошелъ на небольшой высотѣ полукругъ въ 300 метровъ въ діаметрѣ и затѣмъ возвратился обратно къ своей стоянкѣ.

поддерживало ихъ надеждъ. Недостаточно правильныя изслѣдованія полета птицъ, принадлежавшія выдающимся ученымъ, приводили къ заключенію, что ласточка должна затрачивать огромную работу, чтобы держаться въ воздухѣ; по этому поводу даже острили, что математики доказали невозможность полета птицъ; было бы менѣе остроумно, но болѣе правильно сказать, что нѣкоторые представители механики*), недостаточно наблюдая полетъ птицъ, установили своими вычисленіями, что дѣйствительныя условія полета птицъ совершенно не совпадаютъ съ тѣми, которыя были положены въ основу этихъ вычисленій. Ошибка обусловливалась тѣмъ, что полетъ птицъ изучали, основываясь на сопротивленіи, которое испытываетъ плоскость, двигаясь въ воздухѣ перпендикулярно къ направленію движенія. Однако сэръ Кэли (G. Cayley) въ 1809 г. и Дюбоше (Dubochet) въ 1834 г. указывали уже, что летаніе представляетъ собой прежде всего скольженіе**); они замѣтили, что птица обыкновенно летаетъ головой по вѣтру. Нѣкоторые другіе авторы,—какъ, напримѣръ, Овель (Hauvel) и Венамъ (Wenham),—также являлись настойчивыми поборниками теоріи скольженія.

Лишь около 1865 г. воздухоплаваніе снова привлекаетъ къ себѣ вниманіе; дебаты Французскаго Общества Воздухоплаванія, за которыми въ свое время внимательно слѣдили, сейчасъ еще читаются съ большимъ интересомъ. Академія Наукъ со времени опытовъ Борда (Borda) всегда относилась съ особеннымъ интересомъ къ вопросамъ о сопротивленіи жидкостей; въ 1874 г. по предложенію Бертрана (J. Bertrand) Академія объявила въ качествѣ темы на премію вопросъ о полетѣ птицъ. Премію получилъ въ 1876 г. одинъ изъ наиболѣе дѣятельныхъ членовъ Общества Воздухоплаванія А. Пено (A. Pénaud), человѣкъ выдающагося ума. Ключъ къ воздухоплаванію, по воззрѣніямъ Пено, заключается въ томъ, что при поступательномъ полетѣ птица, двигаясь впередъ, ударяетъ о воздухъ подъ весьма малымъ угломъ. Онъ настаиваетъ на томъ, что ударять по воздуху въ наклонномъ направленіи имѣетъ большія преимущества передъ нормальнымъ ударомъ; для иллюстраціи своей теоріи онъ построилъ игрушку, представлявшую первый механическій приборъ, которому дѣйствительно удалось летать; эта игрушка поддерживалась вогнутыми крыльями, двигателемъ же служила закрученная резина, приводившая во вращеніе небольшой винтъ; для поддержанія равновѣсія служилъ хвостъ (рис. 1). Пено глубже изслѣдовалъ различные виды полета, которые разсматривались и до него, а вслѣдъ за нимъ Маре (Marey) установилъ нѣкоторые сомнительные пункты при помощи мгновенной фотографіи. При парящемъ полетѣ крыло встрѣчаетъ обыкновенно воздухъ подъ весьма малымъ угломъ и играетъ, такимъ образомъ, роль аэроплана; мускульная сила

*) Навье (Navier) и Бабине (Babinet). *Ред.*

**) Т. е. наклонное паденіе, при которомъ направленіе паденія не перпендикулярно къ плоскости горизонта, а образуетъ съ ней лишь небольшой уголъ. *Ред.*

птицы весьма незначительна и расходуется почти исключительно на горизонтальное передвиженіе.

Мы должны остановиться еще на принадлежащемъ Пено изслѣдованіи сопротивленія, испытываемаго тонкой плоскостью, двигающейся въ жидкости; это сопротивленіе при равныхъ относительныхъ скоростяхъ зависитъ отъ угла наклоненія. Давно полагали, что сопротивленіе это, какъ указываетъ Ньютонъ, пропорціонально квадрату синуса этого угла; Борда, а затѣмъ Кэли, повидимому, въ первый разъ высказали предложеніе, что это сопротивленіе пропорціонально первой степени синуса. Пено, на основаніи своихъ наблюденій надъ полетомъ воронъ, пришелъ къ заключенію, что правиленъ законъ пер-

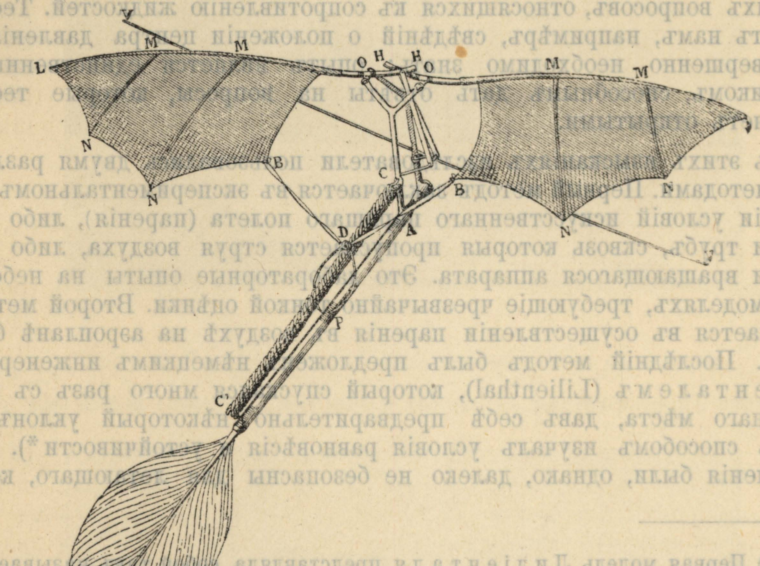


Рис. 1.

Орнитоптеръ Пено.

вой степени и воспользовался имъ для установленія нѣкоторыхъ постоянныхъ. Впрочемъ, эмпирическіе законы этого рода могутъ быть выражены различно; было предложено нѣсколько формулъ, которыя приводятъ всѣ приблизительно къ тому же результату.

Мы видимъ, такимъ, образомъ, что неправильныя представленія о полетѣ птицъ, господствовавшія такъ долго, несмотря на серьезныя возраженія, были оставлены около 1880 г. Принципъ скольженія, по крайней мѣрѣ, въ примѣненіи къ плоскому полету уже не оспаривается. Поддерживаніе (висѣніе) въ воздухѣ обусловливается, повидимому, поступательнымъ движеніемъ, вертикальной слагающей давленія, производимаго жидкостью на тѣло, которая уравновѣшиваетъ вѣсъ тѣла. Такимъ образомъ, изобрѣтатели мало-по-малу отказались отъ типа ортоптера, геликоптеръ имѣетъ все меньше и меньше сторонниковъ и усилія изслѣдователей сосредоточиваются на аэропланѣ, который необходимо изучить съ механической точки зрѣнія. Положеніе центра давленія, вліяніе угла наклоненія, формы крыльевъ играютъ важную роль въ изученіи условій равновѣсія и устойчивости. Въ изученіе этихъ трудныхъ вопросовъ вложено много остроумія и труда, получены важные результаты, хотя далеко не во всѣхъ пунктахъ достигнуто согласіе. Знаніе общихъ принциповъ динамики, несомнѣнно, необходимо для правильныхъ разсужденій въ этой области; но одной только теоріи въ настоящее время недостаточно для рѣшенія весьма сложныхъ вопросовъ, относящихся къ сопротивленію жидкостей. Теорія не даетъ намъ, напримѣръ, свѣдѣній о положеніи центра давленія, а это совершенно необходимо знать; опытъ является единственнымъ источникомъ, способнымъ дать отвѣты на вопросы, которые теорія оставляетъ открытыми.

Въ этихъ изысканіяхъ изслѣдователи пользовались двумя различными методами. Первый методъ заключается въ экспериментальномъ разысканіи условій искусственнаго парящаго полета (паренія), либо при помощи трубъ, сквозь которыя пропускается струя воздуха, либо при помощи вращающагося аппарата. Это лабораторные опыты на небольшихъ моделяхъ, требующіе чрезвычайно тонкой оцѣнки. Второй методъ заключается въ осуществленіи паренія въ воздухѣ на аэропланѣ безъ мотора. Послѣдній методъ былъ предложенъ нѣмецкимъ инженеромъ Лиліенталемъ (Lilienthal), который спускался много разъ съ возвышеннаго мѣста, давъ себѣ предварительно нѣкоторый уклонъ, и такимъ способомъ изучалъ условія равновѣсія и устойчивости*). Эти упражненія были, однако, далеко не безопасны для летающаго, кото-

*) Первая модель Лиліенталя представляла собой такъ называемый „монопланъ", т. е. аэропланъ, состоящій изъ одной „несущей" плоскости. Аппаратъ Лиліенталя нѣсколько напоминалъ летучую мышь съ распростертыми крыльями. Поверхность аэроплана составляла 14 *кв. м.*, а вѣсъ — 20 *кгм.*

Въ 1890 г. Лиліенталь приступилъ къ практическому выполненію опытовъ скольженія. Въ слѣдующіе годы онъ построилъ цѣлую серію аппаратовъ и экспериментировалъ съ ними. Сначала Лиліенталь былъ чрезвычайно остороженъ. Онъ поставилъ у себя въ саду надъ небольшимъ лугомъ на высотѣ одного метра доску, съ которой спускался на своемъ аппаратѣ. Приспособившись къ этимъ полетамъ послѣ стократныхъ упражненій, онъ поднялъ высоту доски до $2^1/_2$ *м.*, спускаясь съ которой, онъ имѣлъ возможность безопасно проскальзывать вдоль всего луга. Лишь послѣ того, какъ онъ вполнѣ приспособился къ этимъ полетамъ, онъ сталъ спускаться съ значительныхъ высотъ.

Онъ построилъ себѣ нѣчто въ родѣ башенки съ плоской крышей, съ которой и спускался. Полетъ производился всегда въ направленіи противъ вѣтра, который своимъ дуновеніемъ долженъ былъ поддерживать аэропланъ; въ этомъ собственно и заключается разгадка „паренія", какъ это уже указано въ текстѣ. Въ 1894 г. Лиліенталь производилъ уже свои опыты съ холма, имѣвшаго 15 *м.* высоты (рис. 2). Въ слѣдующемъ же году онъ построилъ рый собственными движеніями долженъ былъ поддерживать равновѣсіе. Какъ извѣстно, въ 1896 г. несчастный воздухоплаватель поплатился жизнью, повидимому, вслѣдствіе разрыва нѣкоторыхъ частей машины.

(Окончаніе слѣдуетъ).

аэропланъ другого типа — **бипланъ** (рис. 3); онъ состоялъ изъ двухъ несу-

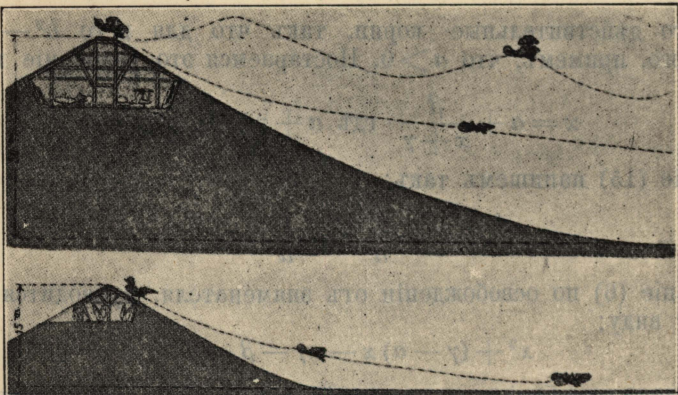


Рис. 2.
Опыты Лиліенталя надъ скольженіемъ съ высоты.

щихъ плоскостей (плановъ), имѣвшихъ каждая въ распростертомъ видѣ $5^1/_2$ *м.*

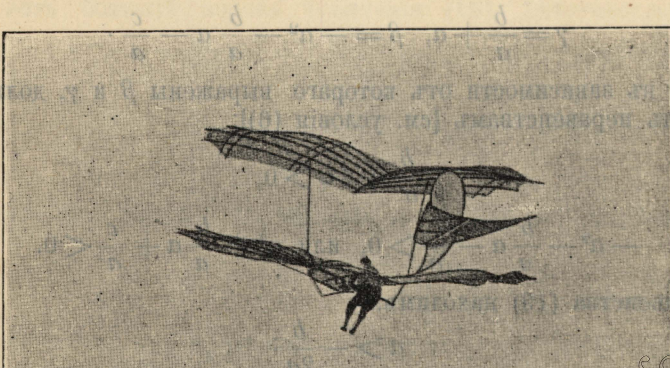


Рис. 3.
Бипланъ Лиліенталя.

въ длину и площадь въ 9 *кв. м.* Разстояніе между планами составляло приблизительно четверть длины крыла.

Приближенное вычисленіе корней квадратнаго уравненія.

М. Зимина.

(Окончаніе).*

§ 3. Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію квадратнаго уравненія общаго вида

$$ax^2+bx+c=0, \tag{15}$$

имѣющаго дѣйствительные корни, такъ что для него $b^2-4ac>0$; кромѣ того, примемъ, что $a>0$. Постараемся это уравненіе привести къ виду

$$x=\alpha+\frac{\beta}{x+\gamma}, \text{ гдѣ } \alpha+\gamma>0,\ \beta>0. \tag{6}$$

Уравненіе (15) напишемъ такъ:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0, \tag{16}$$

а уравненіе (6) по освобожденіи отъ знаменателя, приводится къ слѣдующему виду:

$$x^2+(\gamma-\alpha)x-\alpha\gamma-\beta=0. \tag{17}$$

Сопоставляя коэффиціенты уравненій (16) и (17), приходимъ къ равенствамъ:

$$\gamma-\alpha=\frac{b}{a},\quad \alpha\gamma+\beta=-\frac{c}{a},$$

изъ которыхъ находимъ:

$$\gamma=\frac{b}{a}+\alpha,\ \ \beta=-\alpha^2-\frac{b}{a}\alpha-\frac{c}{a}\cdot \tag{18}$$

Число α, въ зависимости отъ котораго выражены β и γ, должно удовлетворять неравенствамъ [см. условія (6)]:

$$\frac{b}{a}+2\alpha>0, \tag{19}$$

$$-\alpha^2-\frac{b}{a}\alpha-\frac{c}{a}>0, \text{ или } \alpha^2+\frac{b}{a}\alpha+\frac{c}{a}<0. \tag{20}$$

Изъ неравенства (19) находимъ:

$$\alpha>-\frac{b}{2a}; \tag{21}$$

неравенству же (20) удовлетворимъ, если предположимъ, что α заключено между корнями уравненія (15), т. е. если положимъ:

$$-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<\alpha<-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{22}$$

Неравенства (21) и (22) сводятся къ слѣдующимъ:

$$-\frac{b}{2a}<\alpha<-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{23}$$

Какъ отсюда видно, предѣлы для α такого характера, что при условіи дѣйствительности корней уравненія (15) число α всегда можетъ быть выбрано, а по формуламъ (18) найдемъ затѣмъ β и γ. Тогда уравненіе (15) замѣняется слѣдующимъ:

$$x = \alpha + \frac{-\alpha^2 - \frac{b}{a}\alpha - \frac{c}{a}}{x + \frac{b}{a} + \alpha},$$

или

$$x = \frac{\alpha\alpha x - c}{ax + a\alpha + b}. \tag{24}$$

Если теперь возьмемъ число $x_1 \geqq \alpha$ и затѣмъ составимъ рядъ чиселъ

$$x_2 = \frac{a\alpha x_1 - c}{ax_1 + a\alpha + b},$$

$$x_3 = \frac{a\alpha x_2 - c}{ax_2 + a\alpha + b},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$x_n = \frac{a\alpha x_{n-1} - c}{ax_{n-1} + a\alpha + b},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

то полученныя числа будутъ имѣть предѣломъ корень уравненія (15), и именно тотъ корень, для котораго $x + \gamma > 0$. Не трудно показать, что это есть большій корень уравненія (15). Дѣйствительно, если $x + \gamma > 0$, то $x > -\gamma$, или $x > -\frac{b}{a} - \alpha$; но изъ неравенства (23) слѣдуетъ:

$$0 > \alpha + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

а, складывая почленно это неравенство и предыдущее, получаемъ:

$$x > -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

откуда и слѣдуетъ, что предѣломъ чиселъ $x_1, x_2, \dots$ служитъ большій корень уравненія (15).

Что касается погрѣшности приближенія x_n, то ее найдемъ по формулѣ (12), замѣняя въ ней β и γ ихъ выраженіями (18) черезъ α; именно, обозначая черезъ B большій корень уравненія (15), можемъ написать:

$$|x_n - B| < \left[\frac{-\left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\alpha + \alpha^2\right)}{\left(\frac{b}{a} + 2\alpha\right)^2 - \left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\alpha + \alpha^2\right)}\right]^{n-1} |x_2 - x_1|,$$

или по упрощеніи

$$|x_n - B| < \left\{ \frac{-a(aa^2 + ba + c)}{b^2 - 4ac + 3a(aa^2 + ba + c)} \right\}^{n-1} |x_2 - x_1|. \quad (25)$$

Число a, удовлетворяющее неравенствамъ (23), выгоднѣе выбрать такъ, чтобы при возможно меньшемъ числѣ подстановокъ получить возможно болѣе приближенное значеніе корня. Изъ формулы (25), опредѣляющей погрѣшность, видно, что, чѣмъ меньше будетъ положительное число

$$-a(aa^2 + ba + c),$$

т. е. чѣмъ ближе a къ вычисляемому корню уравненія, тѣмъ меньше будетъ дробь, стоящая въ скобкахъ въ неравенствѣ (25), потому что съ уменьшеніемъ числа $-a(aa^2 + ba + c)$ будетъ уменьшаться ея числитель и увеличиваться знаменатель. Съ другой стороны, за первое приближеніе x_1 слѣдуетъ взять число, удовлетворяющее неравенству

$$x_1 \geqq a$$

и возможно близкое къ вычисляемому корню. Можемъ, поэтому, выбравъ число a, какъ только-что сказано, положить затѣмъ

$$x_1 = a.$$

Примѣръ. Возьмемъ уравненіе

$$3x^2 + 8x + 1 = 0. \quad (26)$$

Для преобразованія его къ формѣ (24), дающей послѣдовательныя сходящіяся приближенія, ищемъ число a, удовлетворяющее неравенствомъ (23):

$$-\frac{8}{6} < a < -\frac{8}{6} + \frac{\sqrt{52}}{6}.$$

На основаніи только-что сдѣланнаго замѣчанія беремъ a, возможно близкое къ правой части этого неравенства. Взявъ для $\frac{\sqrt{52}}{6}$ приближеніе (по недостатку) $^7/_6$, полагаемъ

$$a = -\frac{8}{6} + \frac{7}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Подставляя значенія a и коэффиціентовъ уравненія (26) въ уравненіе (24), получимъ послѣ упрощеній:

$$x = -\frac{x + 2}{6x + 15}.$$

Это и есть та форма уравненія (26), которая даетъ намъ рядъ сходящихся приближеній, имѣющихъ предѣломъ большій корень B этого уравненія. Полагаемъ далѣе, какъ было сказано,

$$x_1 = a = -\frac{1}{6} < B,$$

а затѣмъ послѣдовательно находимъ:

$$x_2 = -\frac{-\frac{1}{6}+2}{-1+15} = -\frac{11}{84} > B,$$

$$x_3 = -\frac{-\frac{11}{84}+2}{-\frac{66}{84}+15} = -\frac{157}{1194} < B,$$

$$x_4 = -\frac{-\frac{157}{1194}+2}{-\frac{942}{1194}+15} = -\frac{2231}{16968} > B, \text{ и т. д.}$$

Для опредѣленія погрѣшности каждаго приближенія обращаемся къ формулѣ (25), дающей для разсматриваемаго случая

$$|x_n - B| < \left[\frac{-3\left(\frac{3}{36}-\frac{8}{6}+1\right)}{64-12+9\left(\frac{3}{36}-\frac{8}{6}+1\right)}\right]^{n-1}\left|\frac{11}{84}+\frac{1}{6}\right|,$$

или по упрощеніи

$$|x_n - B| < \left(\frac{3}{199}\right)^{n-1}\frac{1}{28}.$$

Для простоты можемъ принять, что

$$|x_n - B| < \left(\frac{1}{66}\right)^{n-1}\frac{1}{28}, \tag{27}$$

и, пользуясь этой формулой, находимъ, что

$$\left.\begin{array}{lll} \text{для } x_1 & \text{погрѣшность будетъ} & < \frac{1}{28}, \\ \quad " \ x_2 & \quad " & < \frac{1}{1848}, \\ \quad " \ x_3 & \quad " & < \frac{1}{121\,968}, \\ \quad " \ x_4 & \quad " & < \frac{1}{8\,049\,888}, \end{array}\right\} \tag{28}$$

и т. д.

Для нахожденія приближеннаго значенія меньшаго корня даннаго уравненія можно или изъ суммы корней, т. е. изъ $-{}^8/_3$, вычесть одно изъ найденныхъ приближенныхъ значеній, или, измѣняя въ уравненіи (26) x на $-x$, найти приближенное значеніе большаго корня полученнаго новаго уравненія,

$$3x^2 - 8x + 1 = 0 \tag{29}$$

и найденное приближеніе взять съ обратнымъ знакомъ. Для этого уравненія выбираемъ a въ предѣлахъ

$$\frac{8}{6} < a < \frac{8}{6} + \frac{\sqrt{52}}{6},$$

послѣ чего уравненіе (29) по формулѣ (24) замѣняется слѣдующимъ:

$$x = \frac{15x - 2}{6x - 1}.$$

Полагая затѣмъ $x_1 = a = \frac{5}{2}$, находимъ послѣдовательно:

$$x_2 = \frac{\frac{75}{2} - 2}{\frac{30}{2} - 1} = \frac{71}{28},$$

$$x_3 = \frac{\frac{15 \,.\, 71}{28} - 2}{\frac{6 \,.\, 71}{28} - 1} = \frac{1009}{398},$$

$$x_4 = \frac{\frac{15 \,.\, 1009}{398} - 2}{\frac{6 \,.\, 1009}{398} - 1} = \frac{14\,339}{5656},$$

и т. д. Предѣлъ погрѣшности, вычисленный по формулѣ (25) для этого случая, совпадаетъ съ предѣломъ, даваемымъ формулой (27), въ чемъ предлагаемъ убѣдиться читателю. Погрѣшности отдѣльныхъ приближеній выразятся поэтому тѣми же числами (28). Приближенія x_1 и x_3 будутъ меньше большаго корня уравненія (29), а x_2 и x_4 будутъ больше его. Взятыя съ обратными знаками, эти числа будутъ приближеніями меньшаго корня уравненія (26), при чемъ $-x_1$ и $-x_3$ будутъ больше этого корня, а $-x_2$ и $-x_4$ будутъ меньше его.

§ 4. Изложенный способъ можетъ быть примѣненъ, понятно, къ извлеченію квадратныхъ корней. Пусть требуется вычислить $\sqrt{N}$. Вопросъ сводится къ вычисленію корня уравненія

$$x^2 - N = 0. \tag{30}$$

Формула (23) дастъ въ этомъ случаѣ:

$$0<a<\sqrt{N}.$$

Беремъ поэтому для a какое-нибудь приближенное значенiе $\sqrt{N}$ по недостатку. Уравненiе (30) по формулѣ (24) замѣняется слѣдующимъ:

$$x=\frac{ax+N}{x+a}. \qquad (31)$$

Эта форма уравненiя (30) и дастъ намъ рядъ сходящихся приближенiй, имѣющихъ предѣломъ $\sqrt{N}$. За x_1 можемъ попрежнему принять a. Для погрѣшности по формулѣ (25) находимъ:

$$|\sqrt{N}-x_n|<\left(\frac{N-a^2}{N+3a^2}\right)^{n-1}.|x_2-x_1|.$$

Если $x_1=a$, то

$$x_2=\frac{a^2+N}{2a},$$

$$x_2-x_1=\frac{a^2+N}{2a}-a=\frac{N-a^2}{2a};$$

подставляя, получимъ:

$$|\sqrt{N}-x_n|<\left(\frac{N-a^2}{N+3a^2}\right)^{n-1}.\frac{N-a^2}{2a}.$$

Примѣръ. Требуется вычислить $\sqrt{15}$. Если бы приняли $a=3$, то погрѣшность выразилась бы формулой

$$|\sqrt{15}-x_n|<\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1},$$

и приближенiя сходились бы медленно. Въ подобномъ случаѣ поступаемъ такъ. Принимая пока $a=3$, подставляемъ это значенiе a въ равенство (31)

$$x=\frac{3x+15}{x+3} \qquad (32)$$

и отсюда, полагая $x_1=3$, находимъ:

$$x_2=\frac{24}{6}=4.$$

$$x_3=\frac{12+15}{7}=\frac{27}{7},$$

при чемъ x_3, какъ и x_1, будетъ $<\sqrt{15}$. Это значеніе x_3 принимаемъ за новое значеніе для a и, принимая $a=\frac{27}{7}$ и подставляя это значеніе a въ равенство (31), получаемъ новую форму уравненія (30):

$$x=\frac{27x+105}{7x+27},$$

при чемъ теперь уже погрѣшность выразится формулой:

$$|\sqrt{15}-x_n|<\left(\frac{1}{487}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{63},$$

или въ круглыхъ числахъ

$$|\sqrt{N}-x_n|<\left(\frac{1}{480}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{60}.$$

Вычисляемъ далѣе, принимая $x_1=a=\frac{27}{7}$,

$$x_2=\frac{\frac{27\,.\,27}{7}+105}{27+27}=\frac{1464}{54\,.\,7}=\frac{244}{63},$$

$$x_3=\frac{\frac{27\,.\,244}{63}+105}{\frac{7\,.\,244}{63}+27}=\frac{13203}{3409},$$

и т. д. Погрѣшности же будутъ

$$\text{для } x_1<\frac{1}{60},$$

$$\text{для } x_2<\frac{1}{28\,800},$$

$$\text{для } x_3<\frac{1}{13\,824\,000}.$$

§ 5. Пусть данное квадратное уравненіе приведено къ виду [см. равенство (24)]

$$x=\frac{Mx+N}{Px+Q}, \tag{33}$$

дающему рядъ сходящихся приближеній. Пользуясь этой формой уравненія, можно получить рядъ другихъ выраженій того же вида (33), но дающихъ болѣе быстро сходящіяся приближенія. Дѣйствительно, взявъ начальное значеніе x_1, будемъ имѣть:

$$x_2 = \frac{Mx_1 + N}{Px_1 + Q},$$

$$x_3 = \frac{Mx_2 + N}{Px_2 + Q}.$$

Можемъ теперь подставить выраженіе для x_2 изъ верхней формулы въ нижнюю и такимъ образомъ придемъ по упрощеніи къ формулѣ:

$$x_3 = \frac{(M^2 + NP)x_1 + MN + NQ}{(MP + PQ)x_1 + NP + Q^2}, \qquad (34)$$

дающей прямо третье приближеніе по первому. Пользуясь той же формулой (34), по x_3 найдемъ x_5, затѣмъ по x_5 найдемъ x_7 и т. д.,— иначе говоря, будемъ получать одни лишь нечетныя приближенія. Всѣ они одновременно будутъ или больше, или меньше искомаго корня.

Если къ равенству (34) присоединимъ равенство

$$x_4 = \frac{Mx_3 + N}{Px_3 + Q}$$

и замѣнимъ въ послѣднемъ x_3 его выраженіемъ изъ (34), то получимъ выраженіе для x_4 въ зависимости отъ x_1:

$$x_4 = \frac{(M^3 + 2MNP + NPQ)x_1 + M^2N + MNQ + N^2P + NQ^2}{(M^2P + NP^2 + MPQ + PQ^2)x_1 + MNP + 2NPQ + Q^3} \qquad (35)$$

и, пользуясь той же формулой, по x_4 найдемъ x_7, затѣмъ x_{10} и т. д. Эти приближенія попеременно будутъ то больше, то меньше искомаго корня. Напримѣръ, при вычисленіи $\sqrt{15}$ мы нашли [(см. 32)]:

$$x = \frac{3x + 15}{x + 3}.$$

Если воспользуемся формулой (35), то найдемъ

$$x_4 = \frac{162x_1 + 630}{42x_1 + 162} = \frac{27x_1 + 105}{7x_1 + 27},$$

— выраженіе, одинаковое съ найденнымъ въ предыдущемъ параграфѣ.

§ 6. Изложенный способъ приближеннаго вычисленія корней квадратнаго уравненія можно геометрически интерпретировать слѣдующимъ образомъ.

Нахожденіе корня уравненія

$$x^2 = ax + \beta$$

или

$$x = a + \frac{\beta}{x} \qquad (1)$$

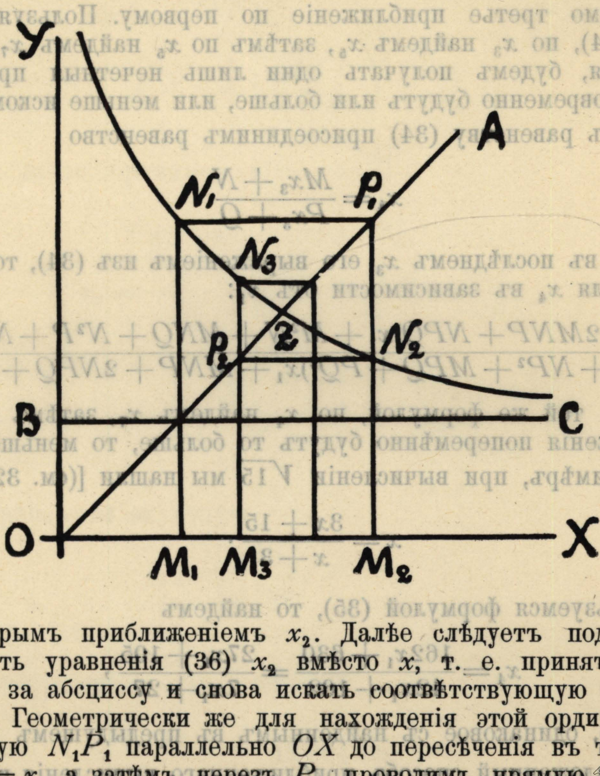
геометрически сводится къ разысканію абсциссы или, что то же, ординаты точки пересѣченія прямой OA (см. чертежъ), уравненіе которой

$$y = x,$$

съ кривой

$$y = a + \frac{\beta}{x}, \tag{36}$$

т. е. съ равнобочной гиперболой, имѣющей асимптотами ось OY и прямую BC, уравненіе которой есть $y = a$. За первое приближеніе для x мы принимаемъ $OM_1 = x_1$. Это значеніе x_1 мы подставляемъ въ правую часть уравненія (36), т. е. находимъ ординату M_1N_1 нашей гиперболы (36), соотвѣтствующую абсциссѣ x_1. Эта ордината M_1N_1 и



будетъ вторымъ приближеніемъ x_2. Далѣе слѣдуетъ подставить въ правую часть уравненія (36) x_2 вмѣсто x, т. е. принять ординату $M_1N_1 = x_2$ за абсциссу и снова искать соотвѣтствующую ей ординату гиперболы. Геометрически же для нахожденія этой ординаты проводимъ прямую N_1P_1 параллельно OX до пересѣченія въ точкѣ P_1 съ прямою $y = x$, а затѣмъ черезъ P_1 проводимъ прямую параллельно OY, которая гиперболу пересѣчетъ въ N_2, а ось въ M_2. Тогда въ точкѣ P_1 абсцисса и ордината будетъ равна $M_1N_1 = x_2$, а точка N_2 гиперболы, слѣдовательно, соотвѣтствуетъ абсциссѣ x_2, и потому ордината M_2N_2 представляетъ третье приближеніе x_3. Чтобы получить четвертое приближеніе, проводимъ прямую N_2P_2 параллельно OX до пересѣченія въ P_2 съ прямою OA и прямую P_2M_3 параллельно OY до пересѣченія съ осью OX въ точкѣ M_3 и съ гиперболой въ точкѣ N_3. Ордината M_3N_3 представитъ четвертое приближеніе x_4. Дальнѣйшія построенія ведутся такимъ же образомъ. Какъ видно изъ чертежа, $N_1, N_2, N_3, \ldots$, получаемыя изложеннымъ способомъ на гиперболѣ, все болѣе и болѣе приближаются къ точкѣ Z пересѣченія гиперболы съ прямой OA, а ординаты этихъ точекъ, слѣдовательно, имѣютъ предѣломъ ординату точки Z, каковая ордината и представляетъ геометрически искомый корень уравненія (1).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Открытіе южнаго магнитнаго полюса. Въ началѣ іюня были получены извѣстія о возвращеніи англійской южной полярной экспедиціи подъ предводительствомъ лейтенанта Чакльтона (Shackleton). Высадившись, какъ его предшественникъ Скоттъ, на западномъ берегу южно-полярнаго моря, Чакльтонъ предпринялъ путешествіе въ саняхъ на сибирскихъ пони и достигъ 88^0 $23'$ южной широты; до полюса оставалось, такимъ образомъ, меньше 175 *клм.* Но, если экспедиціи не удалось достигнуть южнаго географическаго полюса, то она дѣйствительно выполнила другую свою задачу,— именно, она нашла южный магнитный полюсъ. При постоянныхъ измѣненіяхъ, которыя испытываютъ магнитные элементы, при полномъ отсутствіи достаточныхъ свѣдѣній о причинахъ этихъ измѣненій, точное знаніе положенія магнитныхъ полюсовъ въ каждый данный моментъ является не только чрезвычайно важнымъ для дальнѣйшаго развитія ученія о земномъ магнитизмѣ, но оно имѣетъ также важное практическое значеніе для цѣлей мореплаванія: какъ извѣстно, отклоненіе стрѣлки компаса отъ географическаго меридіана (такъ называемое склоненіе магнитной стрѣлки) является даннымъ, безъ котораго невозможно точно оріентироваться въ открытомъ морѣ. Вотъ почему государства, весьма заинтересованныя въ дѣлѣ мореплаванія,— въ особенности Англія,— вынуждено каждые 5 - 10 лѣтъ издавать новыя магнитныя карты, по которымъ моряки имѣли бы возможность опредѣлять поправку компаса на склоненіе магнитной стрѣлки. Средствомъ для разработки и пополненія такихъ картъ являются, конечно, магнитныя наблюденія; однако, надежныя магнитныя наблюденія можно производить только на сушѣ, потому что на кораблѣ точность магнитныхъ измѣреній значительно нарушается, съ одной стороны, качаніемъ судна, а, съ другой стороны, всегда находящимися на немъ массами желѣза. Правда, Гауссъ еще въ 1839 году построилъ основную теорію земного магнитизма. Удивительно тонкимъ анализомъ онъ обнаружилъ, что мы имѣемъ возможность опредѣлять магнитные элементы (склоненіе, наклоненіе и напряженіе магнитной силы) въ каждой точкѣ земной поверхности, если намъ извѣстны таковые для восьми пунктовъ, по возможности равномѣрно распредѣленныхъ на земной поверхности. На основаніи теоріи Гаусса можно было вычислить магнитныя карты, которыя въ общемъ хорошо согласуются съ непосредственными наблюденіями. Но это общее согласіе нарушается, конечно, значительными отступленіями, зависящими, съ одной стороны, отъ мѣстныхъ причинъ (магнитной аномаліи) и, съ другой стороны, отъ того, что на обширной поверхности океана мы имѣемъ очень мало непосредственныхъ наблюденій. Вслѣдствіе этого вычисленныя Гауссомъ положенія южнаго магнитнаго полюса въ 72^{0} $35'$ южной широты и 152^{0} $30'$ восточной долготы отъ Гринвича можно было считать только приближенными.

Эти именно обстоятельства побудили англійское правительство, наиболѣе заинтересованное въ дѣлѣ мореплаванія въ южномъ полушаріи, заняться изслѣдованіемь антарктики, единственной области, въ которой возможны непосредственныя магнитныя наблюденія южной зоны нашей земли. Такимъ образомъ осуществилась первая англійская южно-полярная экспедиція, руководство которой было ввѣрено Джемсу Россу (James Clark Ross). Этотъ отважный мореплаватель родился въ 1800 г. и уже въ 1819—1825 г.г. сопровождалъ Эдуарда Перри (Edwar Parry) въ трехъ большихъ полярныхъ путешествіяхъ. Съ 1829 г. по 1833 г. онъ принималъ участіе въ путешествіяхъ своего дяди, капитана Джона Росса, черезъ сѣверный полярный архипелагъ: во время этихъ путешествій въ 1832 году, какъ извѣстно, былъ открытъ южный магнитный полюсъ. Россъ пріобрѣлъ обширное образованіе и былъ не только выдающимся гидрографомъ и опытнымъ полярнымъ мореплавателемъ, но и геофизикомъ перваго ранга. Въ 1839 году Джемсъ Россъ на двухъ корабляхъ „Erebus“ и „Terror“ отплылъ изъ Англіи и отпра вился въ ту область, гдѣ, по вычисленію Гаусса, долженъ былъ находиться южный магнитный полюсъ. О томъ, чтобы добраться до полюса, не могло быть и рѣчи: огромныя ледяныя горы преграждали доступъ внутрь открытой этой экспедиціей земли. Если, такимъ образомъ, Россу и не удалось выполнить главной задачи, которая ему была поручена, то произведенныя имъ при крайне неблагопріятныхъ условіяхъ магнитныя наблюденія дали такой обширный матеріалъ, что дальнѣйшее изученіе распредѣленія магнитизма на высокихъ южныхъ широтахъ покоилось почти исключительно на данныхъ Росса и по нимъ можно было уже сдѣлать заключеніе о положеніи южнаго полюса. Географическіе координаты послѣдняго, вычисленныя по этимъ даннымъ, колеблются между 73^{0} $30'$ южной широты и 147^{0} $30'$ восточной долготы и 73^{0} $40'$ южной широты и 147^{0} $7'$ восточной долготы.

Съ возвращеніемъ Росса изъ этой экспедиціи завершился большой періодъ южно-полярныхъ путешествій и интересъ, съ которымъ относились въ наукѣ къ нахожденію южнаго магнитнаго полюса, на значительное время отошелъ на задній планъ. Онъ возродился вновь лишь въ концѣ истекшаго столѣтія. Изъ измѣреній, сдѣланныхъ англійской экспедиціей Международнаго Южно-полярнаго Союза въ 1901—1904 г.г., положеніе магнитнаго полюса было опредѣлено на 72^{0} $51'$ южной широты и 156^{0} $25'$ восточной долготы.

Однако, достигнуть самого южнаго полюса и произвести тамъ непосредственныя измѣренія выпало на долю только третьей англійской экспедиціи, которая лишь теперь возвращается назадъ. Въ то время, какъ самъ Чакльтонъ, въ сопровожденіи четырехъ спутниковъ, направился къ географическому полюсу, другой отрядъ экспедиціи подъ руководствомъ проф. Давида (David) направился внутрь ледяного, плоскогорья на землѣ Викторіи и 16 января 1909 г. н. ст. достигъ пункта на которомъ свободная магнитная стрѣлка принимала совершенно вертикальное положеніе. Географическія координаты южнаго магнитнаго полюса оказались 72° 25′ южной широты и 154° восточной долготы отъ Гринвича. Весьма интересно, что координаты полученныя, непосредственнымъ измѣреніемъ, ближе подходятъ къ тѣмъ значеніямъ, которыя были указаны Гауссомъ, чѣмъ всѣ сдѣланныя до сихъ поръ опредѣленія. Нужно, однако, сказать, что это до нѣкоторой степени можетъ быть дѣломъ случая. Какъ извѣстно, въ послѣднее время удалось установить, что географическіе полюсы подвержены вѣковымъ и другимъ запутаннымъ періодическимъ колебаніямъ; вслѣдствіе этого можно предполагать, что и магнитные полюсы не остаются неподвижными, но съ теченіемъ времени перемѣщаются по земной поверхности. При современномъ положеніи нашихъ свѣдѣній по этому вопросу, которыми мы, въ частности, обязаны продолжительнымъ измѣреніямъ норвежскаго изслѣдователя Амундзена (Amundsen), произведеннымъ вблизи сѣвернаго магнитнаго полюса, послѣдній уже въ теченіе сутокъ описываетъ эллипсъ, размѣры котораго выражаются во многихъ километрахъ.

Тема для сотрудниковъ № 1.

Выяснить въ элементарномъ, но въ то же время точномъ и ясномъ изложеніи два связанныхъ другъ съ другомъ важныхъ понятія въ современномъ изложеніи ученія объ электричествѣ.

a) Понятіе объ „истинномъ“ и „свободномъ“ электричествѣ въ электростатическомъ полѣ.

b) Понятіе о поляризаціи діэлектрика.

Понятіе о свободномъ электричествѣ введено въ Максуэллевскую теорію Герцомъ. Необходимо выяснить, какія были къ тому основанія, и какую пользу это понятіе приноситъ въ изложеніи электростатики. Совершенно необходимо выяснить математическую сторону дѣла, безъ которой вопросъ не можетъ получить достаточнаго обоснованія.

О поляризаціи діэлектриковъ говорятъ теперь очень много даже въ элементарныхъ сочиненіяхъ; при этомъ ограничиваются, однако, качественной стороной дѣла, вслѣдствіе чего у читателя всегда остается впечатлѣніе неясности и, главное, произвольности допущенія. Желательно поэтому дать элементарный выводъ силового вектора, обусловливаемаго поляризованной средой, и показать, какимъ образомъ поляризаціей діэлектрика можетъ быть качественно и количественно, физически и математически объяснена роль діэлектрика въ электростатическомъ полѣ.

Работа на эту тему, написанная ясно и точно и обнаруживающая достаточное знакомство съ научной постановкой вопроса, и при томъ какъ съ физической, такъ и съ математической стороной его, будетъ не только напечатана въ „Вѣстникѣ", но, при желаніи автора, и выпущена отдѣльнымъ изданіемъ.

Срокъ представленія работы 1-е февраля 1910 года.

Къ задачѣ на премію № 2.

Въ редакцію прислано 18 работъ, содержащихъ рѣшенія задачи на премію № 2, заданной профессоромъ В. П. Ермаковымъ. Задача не принадлежитъ къ числу легкихъ, и нѣкоторыя изъ присланныхъ рѣшеній представляютъ собой цѣлыя изслѣдованія (одно, например, содержитъ 40 страницъ). Просмотръ всѣхъ этихъ работъ потребовалъ много времени и труда, чѣмъ и объясняется, что мы и въ настоящій моментъ не имѣемъ еще возможности опубликовать отчетъ объ этихъ работахъ. Въ настоящее время, однако, работа эта приводится къ концу, и отчетъ будетъ опубликованъ въ 4-мъ или 5-мъ номерѣ текущаго семестра.

ЗАДАЧИ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 192 (5 сер.). Доказать, что многочленъ

$$a^{2n} + (a^2 - 1)(2a + 1)n - 1$$

дѣлится на $a^3 + a^2 - a - 1$ при всякомъ цѣломъ и положительномъ значеніи n.

Б. Щиголевъ (Варшава).

№ 193 (5 сер.). Въ одной плоскости даны двѣ параллельныя прямыя и окружность. Построить сѣкущую, параллельную данному направленію и отсѣкающую между данными параллельными прямыми и внутри данной окружности отрѣзки данной длины.

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 194 (5 сер.). Доказать тожество

$$\frac{ar_a^2+br_b^2+cr_c^2+\frac{1}{4}(a+b+c)^3}{(a+b+c)(r_a+r_b+r_c)}=2R,$$

гдѣ a, b, c — стороны, R, r_a, r_b, r_c — радіусы круговъ описаннаго и внѣвписанныхъ нѣкотораго треугольника.

А. Радевъ (Ботево, Болгарія).

№ 195 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$(a+b+x)^3-4(a^3+b^3+x^3)-12abx=0.$$

С. Адамовичъ (Варшава).

№ 196 (5 сер.). Три прямыя, выходящія изъ точки O, пересѣкаются двумя сѣкущими соотвѣтственно въ точкахъ A и A', B и B', C и C'. Доказать, что имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$\frac{AO}{CO}:\frac{A'O}{C'O}=\frac{AB}{BC}:\frac{A'B'}{B'C'}.$$

Я. Назаревскій (Харьковъ).

№ 197 (5 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$2^{x-y+1}.x-3.2^{x-y}.y-2x-2^{x-y}+3y+1=0.$$

Н. С. (Одесса)

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 921 (4 сер.). *Дано, что во вписанномъ въ кругѣ радіуса* r *пятиугольникѣ* ABCDE *углы* C *и* D *прямые. Доказать, что*

$$AC.AD=AB.AE+2r.DE.$$

Хорды BD и CE, на которыя опираются прямые углы C и D, суть діаметры, а потому точка ихъ пересѣченія O есть центръ круга. Вводя обозначенія

$$\angle BOC=\alpha,\quad \angle BOA=\beta,$$

имѣемъ:

$$AC=2r\sin\frac{\angle AOC}{2}=2r\sin\frac{\alpha+\beta}{2},\quad AD=2r\sin\frac{\angle AOD}{2}=2r\sin\frac{\pi-\beta}{2}=$$

$$=2r\cos\frac{\beta}{2},\quad AB=2r\sin\frac{\beta}{2},\quad AE=2r\sin\frac{\angle AOE}{2}=2r\sin\frac{\pi-(\alpha+\beta)}{2}=$$

$$=2r\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

откуда

$$AC.AD-AB.AE=4r^2\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=4r^2\sin\frac{\alpha+\beta-\beta}{2}=4r^2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Такъ какъ

$$DE = 2r \sin \frac{\angle EOD}{2} = 2r \sin \frac{\angle BOC}{2} = 2r \sin \frac{\alpha}{2},$$

то

$$2r \,.\, DE = 4r^2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$AC \,.\, AD - AB \,.\, AE = 2r \,.\, DE,$$

или

$$AC \,.\, AD = AB \,.\, AE + 2r \,.\, DE.$$

П. Безчеревныхъ (Козловъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 128 (5 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$x^3 = ax + by,$$
$$y^3 = bx + ay.$$

Складывая почленно данныя уравненія, получимъ:

$$x^3 + y^3 = (a + b)(x + y),$$

или

$$x^3 + y^3 - (a + b)(x + y) = (x + y)(x^2 - xy + y^2) - (x + y)(a + b) = 0,$$
$$(x + y)[x^2 - xy + y^2 - (a + b)] = 0,$$

откуда

$$x + y = 0 \qquad (1)$$

или

$$x^2 - xy + y^2 = a + b. \qquad (2)$$

Изъ предположенія (1) вытекаетъ, что $y = -x$, и данныя уравненія приводятся тогда къ двумъ эквивалентнымъ уравненіямъ:

$$x^3 = ax - bx, \quad -x^3 = bx - ax.$$

Рѣшая одно изъ нихъ, напримѣръ, первое, имѣемъ:

$$x^3 - x(a - b) = x[x^2 - (a - b)] = 0,$$

откуда приходимъ къ слѣдующимъ рѣшеніямъ данной системы:

$$x = 0, \quad y = -x = 0, \qquad (3)$$
$$x = \pm\sqrt{a - b}, \quad y = -x = \mp\sqrt{a - b}. \qquad (4)$$

Подобнымъ же образомъ, вычитая изъ перваго изъ данныхъ уравненій второе, находимъ:

$$x^3 - y^3 = x(a - b) - y(a - b),$$

откуда выводимъ далѣе:

$$(x - y)[x^2 + xy + y^2 - (a - b)] = 0,$$

а потому имѣетъ мѣсто одно изъ равенствъ:

$$x = y \qquad (5)$$

или

$$x^2 + xy + y^2 = a - b. \qquad (6)$$

Изъ предположенія (5), замѣчая, что въ этомъ случаѣ каждое изъ данныхъ уравненій приводится къ равенству

$$x^3 - (a + b)x = 0,$$

выводимъ:

$$x=0 \quad \text{или} \quad x=\pm\sqrt{a+b},$$

откуда получаемъ или прежнее рѣшеніе (3) или новое

$$x=\pm\sqrt{a+b},\ \ y=x=\pm\sqrt{a+b}. \tag{7}$$

Итакъ, данная система либо допускаетъ рѣшенія (3), (4), (7), либо приводится къ системѣ уравненій (2), (6). Складывая послѣднія уравненія и сокращая результатъ на 2, а затѣмъ вычитая изъ уравненія (6) уравненіе (2), имѣемъ:

$$x^2+y^2=a, \tag{8}$$

$$2xy=-2b. \tag{9}$$

Сложивъ уравненія (8) и (9), а затѣмъ, вычитая изъ уравненія (8) уравненіе (9), находимъ:

$$(x+y)^2=a-2b,\quad (x-y)^2=a+2b,$$

откуда

$$x+y=\pm\sqrt{a-2b},\quad x-y=\pm\sqrt{a+2b},$$

$$x=\frac{\pm\sqrt{a-2b}\pm\sqrt{a+2b}}{2},\quad y=\frac{\pm\sqrt{a-2b}\mp\sqrt{a+2b}}{2}, \tag{10}$$

при чемъ въ первой изъ формулъ (10) можно взять любую изъ четырехъ возможныхъ комбинацій верхнихъ и нижнихъ знаковъ при радикалахъ, но тогда и во второй формулѣ надо взять ту же комбинацію изъ верхнихъ и нижнихъ знаковъ $\left(\text{т. е., напримѣръ, } x=\frac{\sqrt{a-2b}+\sqrt{a+2b}}{2},\ y=\frac{\sqrt{a-2b}-\sqrt{a+2b}}{2}\right)$. Формулы (3), (4), (7) и четыре рѣшенія, заключающіяся въ формулахъ (10), даютъ всѣ рѣшенія предложенной системы.

В. Златинскій (Митава); *N. N.*; *Г. Оппоковъ* (Вильна); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *В. Рябовъ* (Павловскъ); *А. Масловъ* (Одесса); *А. Радевъ* (Ботево, Болгарія); *І. Улановскій* (Одесса); *Г. Пистракъ* (Лодзь); *Б. Двойринъ* (Одесса); *Б. Щиголевъ* (Варшава); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *С. Коганъ* (Винница); *С. Слугиновъ* (Казань); *В. Богомоловъ* (Шацкъ).

№ 129 (5 сер.). *Доказать, что, по крайней мѣрѣ, одно изъ трехъ чиселъ* a, b, c, *связанныхъ зависимостью*

$$a^2=b^2+c^2,$$

дѣлится на 5.

Всякое цѣлое число можетъ быть представлено въ одномъ изъ пяти видовъ:

$$5t,\quad 5t\pm1,\quad 5t\pm2,$$

гдѣ t — нѣкоторое цѣлое число. Поэтому квадратъ цѣлаго числа всегда можно представить въ одномъ изъ пяти видовъ

$$25t^2,\quad 25t^2\pm10t+1=5(5t^2\pm2t)+1,$$

$$25t^2\pm20t+4=5(5t^2\pm4t)+4,$$

откуда вытекаетъ, что квадратъ цѣлаго числа можно изобразить въ одномъ изъ трехъ видовъ:

$$5k,\quad 5k+1,\quad 5k+4,$$

гдѣ k — нѣкоторое цѣлое число; другими словами, квадратъ цѣлаго числа или дѣлится на 5, или даетъ въ остаткѣ отъ дѣленія на 5 либо 1, либо 4 (но не

2 или 3). Предположимъ теперь, что ни одно изъ чиселъ b и c не кратно 5; тогда, какъ это доказано выше, каждое изъ чиселъ b^2 и c^2 при дѣленіи на 5 даетъ въ остаткѣ 1 или 4, а потому имѣетъ мѣсто одна изъ слѣдующихъ четырехъ паръ равенствъ:

$$b^2 = 5B + 1, \quad c^2 = 5C + 1, \tag{1}$$

$$b^2 = 5B + 4, \quad c^2 = 5C + 4, \tag{2}$$

$$b^2 = 5B + 1, \quad c^2 = 5C + 4, \tag{3}$$

$$b^2 = 5B + 4, \quad c^2 = 5C + 1, \tag{4}$$

гдѣ B и C суть цѣлыя числа.

Но изъ предположеній (1) и (2) вытекало бы соотвѣтственно:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 5(B + C) + 2,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 5(B + C) + 8 = 5(B + C + 1) + 3,$$

т. е. оказалось бы, что квадратъ цѣлаго числа a^2 при дѣленіи на 5 даетъ въ остаткѣ 2 или 3, что, какъ мы видѣли выше, невозможно. Итакъ если ни b ни c не кратно 5, то должно имѣть мѣсто одно изъ предположеній (3) или (4), каждое изъ которыхъ влечетъ за собою равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 = 5(B + C) + 5 = 5(B + C + 1),$$

откуда видно, что a^2, а потому и a, кратно 5, если ни b ни c не кратно 5. Слѣдовательно возможно лишь одно изъ двухъ допущеній: или одно изъ чиселъ b, c, или a кратно 5, т. е. изъ трехъ чиселъ, связанныхъ соотношеніемъ $a^2 = b^2 + c^2$, одно навѣрно кратно 5.

Б. Двойринъ (Одесса); *В. Рябовъ* (Павловскъ); *Н. Доброгаевъ* (Одесса); *Г. Пистракъ* (Лодзь); *А. Соловьевъ-Дербовъ* (Барановичи); *С. Коганъ* (Винница); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
пщется