Обложка
ищется

Обложка
ищется

Второй серіи II-го семестра № 9.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 621.

Утилизація солнечной энергіи.

Изъ сочиненія Г. Аббота: „Солнце".

(Переводъ съ англійскаго).

(*Окончаніе* *).

Солнечныя машины низкой температуры.

За послѣднія десять лѣтъ были сдѣланы, по меньшей мѣрѣ, двѣ серьезныя попытки найти технически выгодные способы примѣненія принципа горячихъ ящиковъ для полученія силы. Обѣ относящіяся сюда серіи опытовъ описаны г. Иніасомъ въ „Engineering News", 13 мая 1909 года. Соотвѣтственныя приспособленія изобрѣтены Ф. Шёманомъ (Shuman) въ Филадельфіи, Вильси (H. E. Willsie) и Бойлемъ (I. Boyle) въ Кранфордѣ, Нью-Джерси. Теплопоглощатель Шёмана представляетъ собою ровную твердо утрамбованную площадку земли, непроницаемую для воды, благодаря покрывающему ее асфальту и обнесенную дощатыми стѣнками вышиной въ нѣсколько дюймовъ отъ земли. Этотъ чанъ наполняютъ водой прибли-

*) См. „Вѣстникъ", № 620.

зительно до уровня трехъ дюймовъ; поверхъ воды помѣщаютъ тонкій слой парафина, который, конечно, плавится на солнцѣ и препятствуетъ испаренію и излученію съ поверхности воды, но въ то же время пропускаетъ солнечные лучи къ водѣ и асфальту. Весь чанъ плотно прикрытъ слоемъ стекла, обложеннымъ промасленной ватой. Стоимость такого оборудованія, какъ утверждаютъ авторы, не превышаетъ двадцати пяти центовъ на одинъ квадратный футъ и согласно разсчету должна давать одну лошадиную силу на каждые 160 квадратныхъ футовъ (не указано, есть ли это средняя величина при всякихъ условіяхъ или же результатъ для наиболѣе благопріятныхъ часовъ; но, по всей вѣроятности, имѣется въ виду это послѣднее). Вода течетъ отъ нагрѣвателя въ паровую турбину, которая работаетъ въ соединеніи съ вакуумъ-насосомъ. Если принять начальную температуру въ 202° Ф., то вакуумъ вызываетъ обращеніе приблизительно десяти процентовъ воды въ паръ и понижаетъ температуру смѣси пара съ водой примѣрно до 102° Ф.

Такъ какъ возможный максимумъ термодинамическаго полезнаго дѣйствія при такихъ условіяхъ составляетъ пятнадцать процентовъ, то невѣроятно, чтобы въ механическую работу можно было превратить только пять процентовъ солнечной теплоты. Большой запасный резервуаръ, установленный подъ землей и хорошо изолированный, соединенъ съ аппаратомъ такимъ образомъ, что въ самую жаркую часть дня избытокъ горячей воды идетъ въ резервуаръ сверху, тогда какъ со дна его вода уходитъ на мѣсто воды, вытекшей изъ нагрѣвающагося чана. Въ утренніе и вечерніе часы или въ облачную погоду моторъ можно удалить отъ резервуара. Вся эта установка еще не вышла изъ стадіи предварительныхъ экспериментовъ, но, повидимому, она хорошо задумана и обѣщаетъ большой успѣхъ.

Аппараты Виллься и Бойля лучше изслѣдованы; Виллься указываетъ точныя цифры стоимости и полезнаго дѣйствія. Они предпочитаютъ строить бассейнъ весь изъ дерева и, покрывать его асфальтомъ, такъ какъ они считаютъ, что песокъ даже въ пустынѣ содержитъ влагу, которая понижаетъ его достоинства въ качествѣ непроводника теплоты. Для того, чтобы вызвать болѣе быструю циркуляцію воды, которая благодаря этому пріобрѣтаетъ способность лучше поглощать теплоту, они даютъ бассейну наклонное положеніе. Въ ихъ аппаратахъ новѣйшей конструкціи вода течетъ отъ перваго бассейна, покрытаго однимъ стекломъ, къ второму съ двумя стеклянными покрышками, а изъ этого послѣдняго вода стекаетъ каплями черезъ рядъ трубокъ, содержащихъ газъ SO_2. Виллься и Бойль примѣняютъ машину съ сѣрнистымъ газомъ низкаго давленія того же типа, что машина, построенная въ Германіи профессоромъ Джоссе (Josse). Въ ихъ опытахъ предѣльныя температуры приблизительно 200° F и 100° F, но въ полдень ихъ нагрѣватель иногда доходитъ до 260° F. Они тоже соединяютъ свой аппаратъ съ обширнымъ резервуаромъ для работы ночью или въ облачную погоду. Виллься и Бойль построили четыре установки, первую на выставкѣ въ С.-Луи, а другія три въ Нидльсъ (Needles), Арицона; всѣ путешественники, которымъ случилось побывать въ этомъ мѣстѣ, несомнѣнно согласятся, что лучшаго мѣста для опытовъ съ солнечной теплотой нельзя выбрать. Виллльсъ исчисляетъ стоимость солнечной силовой установки въ 164 шиллинга за одну лошадиную силу, а стоимость работы паро-электрической и солнце-электрической установокъ въ 400 лошадинныхъ силъ въ пустынѣ — соотвѣтственно въ 2,08 и 0,61 центовъ за одну электрическую лошадиную силу въ часъ.

Солнечные поваренные аппараты.

Опыты съ солнечной кухней производились въ 1878 г., В. Адамсомъ (Adams) въ Бомбеѣ въ Индіи, и въ свое время вызвали среди публики большой интересъ. На рис. 3 изображенъ весьма простой при-

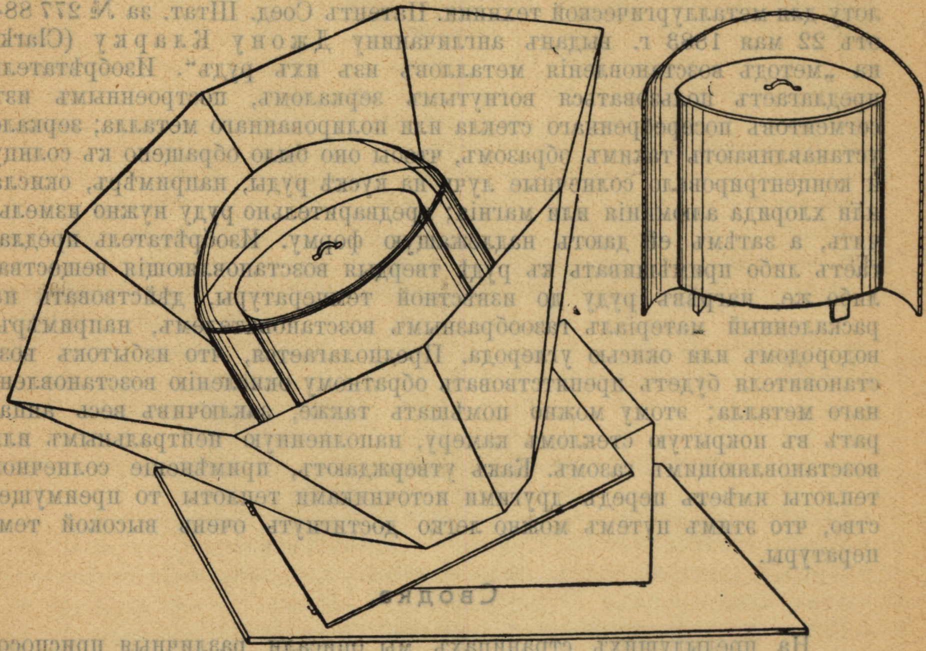


Рис. 3.

Поваренный аппаратъ Адамса.

боръ, которымъ Адамсъ пользовался для поваренныхъ цѣлей. Восьмигранный коническій концентраторъ, сдѣланный изъ дерева, покрытаго посеребреннымъ стекломъ, насаживаютъ на доску; съ помощью клина и посредствомъ вращенія доски достигаютъ того, чтобы концентраторъ былъ обращенъ къ солнцу; положеніе аппарата необходимо измѣнять примѣрно каждые полъ часа. Мѣдный горшокъ помѣщается внутри стекляннаго цилиндра и прикрѣпляется къ основанію концентратора.

Какъ пишетъ Адамсъ (Scientific American, 5 іюня 1878 г.), ему удалось при помощи этого прибора въ январѣ, — самомъ холодномъ мѣсяцѣ года въ Бомбеѣ, — хорошо сварить семь солдатскихъ пайковъ изъ мяса и овощей, при чемъ люди заявили, что пища сварена гораздо лучше, чѣмъ при обычномъ способѣ. Тотъ же аппаратъ съ успѣхомъ примѣняли также и другіе въ Бомбеѣ и въ Декканѣ (Deccan). Смотря по тому, удерживаютъ ли паръ или ему даютъ уходить, кушанье можно сварить или спечь. Рефлекторъ Адамса имѣлъ въ діаметрѣ два фута и четыре дюйма.

Солнечная металлургія.

Мы видѣли, что съ помощью солнечной теплоты можно получать силу, варить пищу и нагрѣвать воду для домашнихъ цѣлей; но, помимо всего этого, нѣкоторые предлагаютъ примѣнять солнечную теплоту для металлургической техники. Патентъ Соед. Штат. за № 277 884 отъ 22 мая 1883 г. выданъ англичанину Джону Кларку (Clark) на „методъ возстановленія металловъ изъ ихъ рудъ". Изобрѣтатель предлагаетъ пользоваться вогнутымъ зеркаломъ, построеннымъ изъ сегментовъ посеребреннаго стекла или полированнаго металла; зеркало устанавливаютъ такимъ образомъ, чтобы оно было обращено къ солнцу и концентрировало солнечные лучи на кускѣ руды, напримѣръ, окисла или хлорида алюминія или магнія; предварительно руду нужно измельчить, а затѣмъ ей даютъ надлежащую форму. Изобрѣтатель предлагаетъ либо примѣшивать къ рудѣ твердыя возстановляющія вещества, либо же, нагрѣвъ руду до извѣстной температуры, дѣйствовать на раскаленный матеріалъ газообразнымъ возстановителемъ, напримѣръ, водородомъ или окисью углерода. Предполагается, что избытокъ возстановителя будетъ препятствовать обратному окисленію возстановленнаго металла; этому можно помѣшать также, заключивъ весь аппаратъ въ покрытую стекломъ камеру, наполненную нейтральнымъ или возстановляющимъ газомъ. Какъ утверждаютъ, примѣненіе солнечной теплоты имѣетъ передъ другими источниками теплоты то преимущество, что этимъ путемъ можно легко достигнуть очень высокой температуры.

Сводка.

На предыдущихъ страницахъ мы описали различныя приспособленія, которыя примѣнялись для утилизаціи солнечной теплоты порознь или въ сочетаніи одно съ другимъ многочисленными изслѣдователями. Во всѣхъ этихъ приспособленіяхъ мы находимъ прежде всего обширную площадь, воспринимающую солнечные лучи. Она устанавливается либо горизонтально, либо въ другомъ опредѣленномъ положеніи, либо же при помощи подлежащаго механизма ее наклоняютъ постепенно такимъ образомъ, чтобы она слѣдовала за положеніемъ солнца. Въ первомъ случаѣ примѣняютъ вычерненную поверхность, чтобы ускорить поглощеніе, а поглощенная теплота переходитъ въ какую-нибудь жидкость для домашняго употребленія или приводитъ въ движеніе тепловую машину невысокой температуры. Чаще аппараты бываютъ снабжены зеркалами, а иногда чечевицами или призмами для концентрированія лучей приблизительно въ фокусѣ. Обыкновенно берется зеркало, составленное изъ большого числа граней изъ посеребреннаго плоскаго стекла или полированнаго металла; всѣ грани укрѣплены въ рамѣ, имѣющей опредѣленную общую кривизну. Весь этотъ отражательный приборъ имѣетъ форму либо параболоида, либо конуса вращенія, либо же дуги цилиндра съ параболическимъ поперечнымъ сѣченіемъ. Приблизительно въ центрѣ, гдѣ собираются лучи, помѣщаютъ нагрѣватель для руды, которую желаютъ возстановить, или для жидкости, которую нужно обратить въ пары. При такомъ устройствѣ, а также и при неподвижныхъ формахъ солнечныхъ нагрѣвателей выгодно покрывать стекломъ нагрѣваемую часть аппарата въ томъ направленіи, откуда идутъ солнечные лучи, а въ другихъ направленіяхъ защищать ее непроводниками тепла. Способы установленія аппарата на солнце, примѣняемые обыкновенно астрономами, какъ, напримѣръ, англійскій типъ экваторіальной установки open fork, повидимому, весьма пригодный для этой цѣли, въ большинствѣ случаевъ, однако, не нравятся изобрѣтателямъ тепловыхъ машинъ. Они обкновенно пользуются для своихъ цѣлей болѣе сложными механическими движеніями, въ томъ числѣ круговыми вращающимися стойками, — промежуточными типами между установкой по высотѣ и азимуту и экваторіальной установкой, и т. д. За исключеніемъ солнечныхъ нагрѣвателей, обыкновенно устанавливаемыхъ на крышахъ домовъ, до сихъ поръ еще на практикѣ не существуютъ экономически выгодные аппараты для использованія солнечной теплоты. Хотя въ этомъ направленіи уже сдѣлано очень много для будущихъ столѣтій, однако, мы сами врядъ ли когда-нибудь увидимъ такую машину.

Въ заключеніе мы разсмотримъ нѣкоторыя данныя, которыми слѣдуетъ пользоваться при проектированіи аппаратовъ для утилизаціи солнечной теплоты.

Количество полезной солнечной энергии

Прежде всего мы изслѣдуемъ, какое количество солнечнаго излученія можетъ быть использовано. Нижеслѣдующія данныя вычислены по смитсоновскимъ пиргеліометрическимъ наблюденіямъ у Вашингтона и на горѣ Монтъ-Вильсонъ. Солнечные лучи можно воспринимать на поверхности, перпендикулярной къ лучу („нормальное паденіе“); въ этомъ случаѣ поверхность можетъ быть передвигаема съ помощью извѣстнаго механизма такимъ образомъ, чтобы она слѣдовала за видимымъ движеніемъ солнца по небесному своду. Съ другой стороны, солнечные лучи можно воспринимать на неподвижной горизонтальной плоскости, при чемъ напряженность лучей уменьшается пропорціонально косинусу зенитнаго разстоянія солнца. Въ томъ и въ другомъ случаѣ уменьшеніе напряженности лучей зависитъ отъ длины пути лучей въ атмосферѣ. На рис. 4 дана средняя напряженность прямого солнечнаго излученія въ калоріяхъ на 1 *кв. см.* въ минуту для Монтъ-Вильсона и Вашингтона. Горизонтальныя разстоянія представляютъ „воздушныя массы“ или, другими словами, секансы зенитныхъ разстояній солнца*) Вертикальные отрѣзки представляютъ ка-

*) При зенитныхъ разстояніяхъ выше $78\frac{1}{2}^0$, когда $\sec Z = 5$, секансъ зе-

лоріи. Двѣ кривыя III и IV соотвѣтствуютъ случаю, когда лучи падаютъ на горизонтальную плоскость, а другія двѣ, I и II, соотвѣтствуютъ „нормальному паденію". Кривыя I и III вычерчены для Монтъ-Вильсона.

На верхней половинѣ рис. 5 показанъ ходъ прямого солнечнаго излученія на уровнѣ моря и на высотѣ 6000 футовъ какъ для нормальныхъ лучей, такъ и при паденіи на горизонтальную поверхность, отъ полудня до заката 22 декабря, 17 февраля, (и 25 октября), 21 марта (и 23 сентября), 22 апрѣля (и 22 августа), 22 іюня; въ эти дни склоненіе солнца равно соотвѣтственно $-23\,^1/_2{}^\circ$, -12°, и 0°, $+12^\circ$, $+23^1/_2{}^\circ$. Эти данныя вычислены для широты 38° къ сѣверу отъ экватора. Абсциссы показываютъ часы, а ординаты — число калорій на 1 *кв. см.* въ минуту. Подобныя же вычисленія сдѣланы для широтъ 20°, 30° и 45° къ сѣверу отъ экватора, но на рис. 5 они не показаны. На этихъ вычисленіяхъ основаны данныя, представленныя на нижней половинѣ рис. 5. На кривыхъ показана въ калоріяхъ инсоляція за день на 1 *кв. см.* въ безоблачную погоду, на горизонтальной поверхности и при нормальномъ паденіи, на уровнѣ моря и на высотѣ 6000 футовъ, соотвѣтственно для указанныхъ широтъ. Въ каждой группѣ двѣ верхнія кривыя соотвѣтствуютъ нормальному паденію, при чемъ самая верхняя для высоты 6000 футовъ надъ уровнемъ океана. Слѣдующая таблица содержитъ сводку всѣхъ этихъ данныхъ, выраженную въ калоріяхъ на 1 *кв. см.* за годъ, а также въ видѣ средняго числа квадратныхъ футовъ, которое требуется для осуществленія одной лошадиной

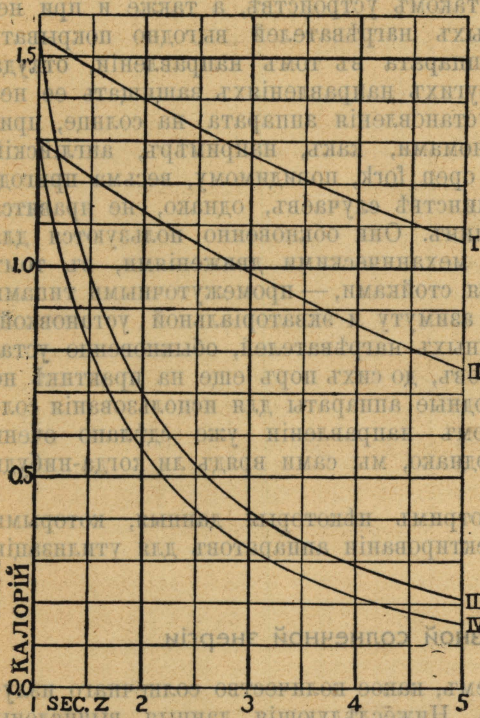


Рис. 4.

Напряженность солнечныхъ лучей (Монтъ-Вильсонъ и Вашингтонъ). I, II. Нормальное паденіе. III, IV. На горизонтальной поверхности.

нитнаго разстоянія уже не представляетъ приближенно „воздушной массы". На основаніи нѣкоторыхъ измѣреній, произведенныхъ при очень низкомъ положеніи солнца, приведенныя ниже данныя распространены на восходъ и заходъ солнца.

силы, принимая полное поглощеніе и преобразованіе и считая, что солнце свѣтитъ 261 000 минутъ въ годъ.

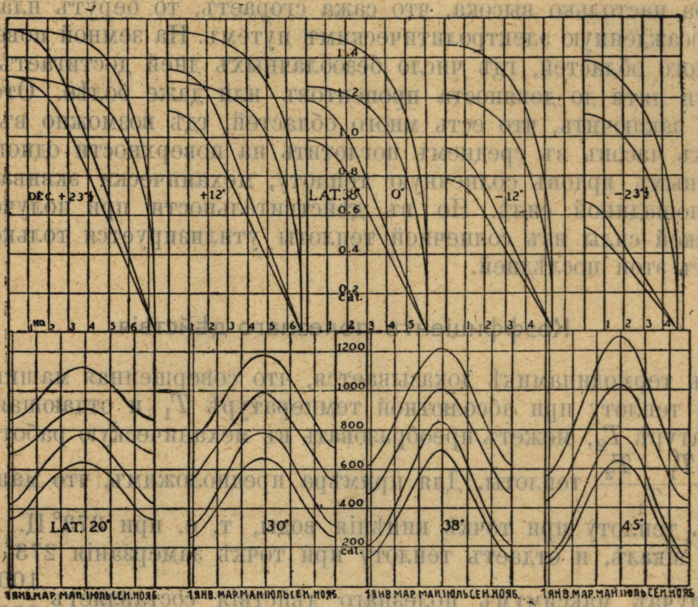


Рис. 5.

Напряженность солнечнаго излученія. Уровень моря и на высотѣ 6000 футовъ. Нормальное паденіе и паденіе на горизонтальную поверхность.

Широта	Нормальное паденіе		Горизонтальная поверхность		
	Уровень моря	6000 футовъ	Уровень моря	6000 футовъ	
20°	292 000	362 000	185 000	226 000	Число калорій на 1 *кв. см.* за годъ.
30°	287 000	355 000	170 000	203 000	
38°	271 000	342 000	152 000	185 000	
45°	270 000	340 000	137 000	169 000	
20°	10,5	8,5	16,6	13,6	Среднее число квадратныхъ футовъ на одну лошадиную силу.
30°	10,7	8,8	18,1	15,1	
38°	11,3	9,0	20,2	16,6	
45°	11,4	9,1	22,4	18,2	

Нетрудно достигнуть поглощенія девяноста пяти процентовъ солнечнаго излученія, падающаго на поверхность. При невысокой температурѣ въ качествѣ поглощающаго вещества употребляется сажа; если же температура настолько высока, что сажа сгораетъ, то берутъ платиновую чернь, осажденную электролитическимъ путемъ. На земной поверхности есть много областей, гдѣ число безоблачныхъ дней достигаетъ отъ семидесяти пяти до девяноста процентовъ или даже болѣе. Отсюда мы можемъ заключить, что есть много областей, гдѣ возможно въ теченіе свѣтлыхъ часовъ въ среднемъ поглотить на поверхности одного, двухъ квадратныхъ ярдовъ солнечную теплоту, механически эквивалентную одной лошадиной силѣ. Но въ дѣйствительности при полученіи механической силы изъ солнечной теплоты утилизируется только малый процентъ этой послѣдней.

Коэффиціентъ полезнаго дѣйствія

Въ термодинамикѣ доказывается, что совершенная машина, получающая теплоту при абсолютной температурѣ T_1 и отдающая ее при температурѣ T_2, можетъ преобразовать въ механическую работу только часть $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$ теплоты. Для примѣра предположимъ, что машина получаетъ теплоту при точкѣ кипѣнія воды, т. е. при 373° Ц. по абсолютной шкалѣ, и отдаетъ теплоту при точкѣ замерзанія 273°; въ такомъ случаѣ максимумъ полезнаго дѣйствія составляетъ $\frac{100}{373} = 26{,}8$ процентовъ. Этотъ термодинамическій законъ даетъ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія совершенной машины независимо отъ ея природы, если дѣйствующей энергіей является теплота. Термоэлектрическая машина или паровая машина — обѣ представляютъ собой тепловыя машины, и полезное дѣйствіе ихъ не можетъ превысить количества, вычисленнаго по только-что формулировинному правилу. Однако, на самомъ дѣлѣ совершенныхъ тепловыхъ машинъ не существуетъ, и наилучшія паровыя машины съ конденсаціей пара тройнаго расширенія врядъ ли превращаютъ въ работу пятнадцать процентовъ теплоты сгоранія потребляемаго ими топлива. Если тепловая машина работаетъ отъ очень высокой температуры до низкой, то дробь $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$ можетъ мало отличаться отъ единицы. Предположимъ, напримѣръ, что $T_1 = 1000°$ и $T_2 = 300°$; въ такомъ случаѣ $\frac{T_1 - T_2}{T_1} = 70$ процентовъ. Этимъ отчасти объясняется высокій коэффиціентъ полезнаго дѣйствія машинъ съ внутреннимъ взрывомъ, которыя развиваютъ въ своихъ цилиндрахъ высокія температуры и часто превращаютъ въ работу двадцать пять процентовъ теплоты сгоранія потребляемаго ими топлива. Съ другой стороны, потеря теплоты черезъ теплопроводность, конвекцію и излученіе быстро возрастаетъ съ увеличеніемъ температуры, такъ что въ тѣхъ случаяхъ, когда машины работаютъ при очень высокихъ температурахъ, ихъ термодинамическій выигрышъ можетъ практически покрываться потерей.

Отражающая сила зеркальныхъ поверхностей.

Отражающая сила различныхъ поверхностей въ процентахъ									
Длина волны	0,35 μ	0,40 μ	0,45 μ	0,50 μ	0,60 μ	0,70 μ	0,80 μ	1,00 μ	1,50 μ
Стекло*), посеребренное на обратной сторонѣ. Сортъ А	—	67	82	90	93	94	94	95	95
Стекло, посеребренное на обратной сторонѣ. Сортъ В	—	68	80	86	84	76	65	56	65
Стекло, покрытое на обратной сторонѣ ртутью	—	—	73	71	70	73	—	—	—
Посеребренное стекло (посредствомъ химическаго осажденія) . . .	74	83	90	91	93	95	96	97	98
Никкель (электролитически осажденный)	48	53	59	61	65	69	70	72	79
„Зеркальный“ металлъ .	51	55	60	63	64	67	68	70	75

Если принять во вниманіе всѣ условія, то стеклянныя пластинки, посеребренныя на обратной сторонѣ, являются, вѣроятно, наилучшимъ матеріаломъ для зеркалъ солнечныхъ нагрѣвателей.

Естественно спросить, сохранятся ли въ солнечной машинѣ будущаго зеркала и движущій механизмъ. „Горячій ящикъ“ Соссюра и сэра Джона Гершеля въ томъ примѣненіи, которое ему дали Вилльси, Бойль и Шёманъ, отличается такой дешевизной, что малый коэффиціентъ полезнаго дѣйствія, неизбѣжный при низкой рабочей температурѣ, повидимому, не исключаетъ того, что эти аппараты окажутся экономически выгодными. Нѣкоторый выигрышъ въ полезномъ дѣйствіи можетъ быть достигнутъ, если неподвижную нагрѣвающую поверхность установить параллельно земной оси, а не горизонтально; но возможно, что этотъ выигрышъ уравновѣшивается увеличеніемъ стоимости. Степень полезнаго дѣйствія аппарата зависитъ отъ того, хорошо ли онъ покрытъ стекломъ спереди. Если бы можно было, сверхъ того, экономнымъ образомъ устроить подъ стекломъ вакуумъ, то полезное дѣйствіе было бы значительно выше. Этотъ аппаратъ заслуживаетъ большого вниманія.

Весьма вѣроятно, что солнечная кухонная утварь, основанная на принципѣ „кухни безъ огня“, въ соединеніи съ водяными нагрѣвате-

*) Отражательная сила зеркалъ, покрытыхъ на обратной сторонѣ слоемъ какого-нибудь вещества, весьма варіируетъ въ зависимости отъ рода стекла. Сортъ А представляетъ собой обыкновенный оптическій флинтъ-гласъ толщиной въ 12 *мм.*, покрытый на обратной сторонѣ слоемъ химически осажденнаго серебра. Сортъ В есть обыкновенное плоское стекло съ зеленоватымъ оттѣнкомъ, посеребренное тѣмъ же способомъ. Стекло сорта В имѣетъ, повидимому, полосу поглощенія въ крайней инфра-красной части спектра.

лями и тепловыми резервуарами, получитъ широкое распространеніе. Въ самомъ дѣлѣ, нетрудно предвидѣть, что все это можно устроить съ помощью весьма недорогихъ приспособленій, и что обитатели будутъ очень рады избавиться отъ кухонной жары, столь непріятной лѣтомъ.

Необходимы хорошіе проекты, которые избѣгали бы дорогихъ и сложныхъ конструкцій, а также приспособленій, требующихъ слишкомъ большого вниманія; необходимо изучить полнѣе употребляемые матеріалы и возможно болѣе искусcно приспособлять имѣющіяся средства для достиженія болѣе существенныхъ результатовъ. При соблюденіи этихъ условій можно надѣяться, что въ скоромъ времени утилизація солнечной энергіи получитъ очень широкое распространеніе.

Задача о четырехъ краскахъ.

М. Маліева.

Чтобы яснѣе показать распредѣленіе территоріи между различными областями на географическихъ картахъ, какъ извѣстно, часто закрашиваютъ послѣднія въ разные цвѣта. Очевидно, здѣсь нѣтъ необходимости закрашивать каждую область въ свой особый цвѣтъ; достаточно, чтобы были разнаго цвѣта каждыя двѣ области, которыя имѣютъ общую пограничную линію. Изъ опыта давно найдено, что для этой цѣли всегда требуется не болѣе 4 красокъ, какова бы ни была карта.

Ниже предлагается математическое доказательство этого положенія, не претендующее, впрочемъ, на большую строгость.

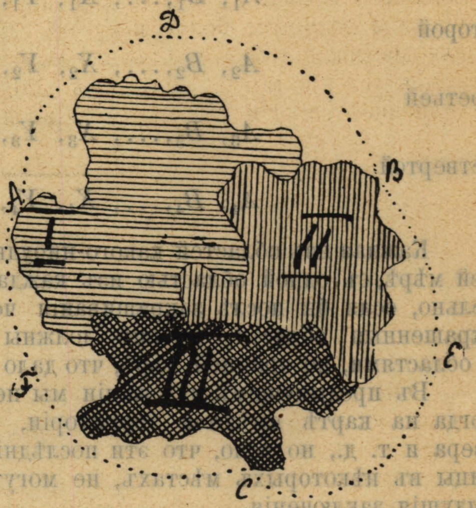
Для краткости языка условимся сперва въ точномъ смыслѣ нѣкоторыхъ выраженій. Подъ сосѣдними областями будемъ понимать такія, которыя имѣютъ общую пограничную линію. Совокупность областей, изъ которыхъ каждая будетъ сосѣдней со всякой другой (входящей въ эту совокупность) назовемъ группой, а такое расположеніе ихъ, когда онѣ со всѣхъ сторонъ окружаютъ какую нибудь территорію, кольцомъ областей.

Предположимъ, что у насъ имѣется карта, содержащая произвольное число областей, расположенныхъ, однако, такимъ образомъ, что всѣ онѣ входятъ въ составъ одной группы.

Предположимъ далѣе, что на этой картѣ имѣется какое-нибудь кольцо. Въ числѣ областей, его составляющихъ, должны быть непремѣнно всѣ области, лежащія по краю карты. Та область, которая не входила бы, не могла бы быть сосѣдней по отношенію къ областямъ, лежащимъ на внутренней территоріи.

Это, можно сказать, очевидно, про всякое кольцо.

Представимъ себѣ другую карту, содержащую тѣ же самыя области, кромѣ одной изъ крайнихъ. На ней не будетъ ни одного кольца, и всѣ области, какъ на первой картѣ, составятъ группу. Для всякихъ трехъ областей этой карты мы можемъ представить только взаимное расположенiе такого типа (см. рис.), когда всѣ три области будутъ расположены вокругъ одной точки. Въ этомъ легко убѣдиться, строя изъ двухъ сосѣднихъ областей группу изъ трехъ.



Всякая IV-ая область должна быть сосѣдней съ каждой изъ областей I, II и III. Пусть A, B, C — точки, лежащія на ея общихъ пограничныхъ линіяхъ. Каково бы ни было очертаніе IV-й области, одна изъ линій $ADBEC$, $BECFA$, $CFADB$ будетъ лежать въ ней. Во всѣхъ трехъ случаяхъ получается кольцо, въ которомъ будетъ лежать соотвѣтственно II, III или I область. Само собой разумѣется, что слова: „ADE BEC или CFA будетъ лежать въ IV-ой области“, надо понимать не буквально, а въ томъ смыслѣ, что между A и B, B и C или C и A вообще можно будетъ провести какую-нибудь линію, которая цѣликомъ будетъ лежить въ IV-ой области). Такъ какъ очертанія областей въ нашемъ выводѣ не имѣютъ значенія, то отсюда заключаемъ, что на нашей второй картѣ не больше 3-хъ областей, а на первой не больше 4-хъ.

Возьмемъ теперь карту, гдѣ области расположены самымъ произвольнымъ образомъ. Спрашивается, можетъ ли среди нихъ оказаться группа болѣе 4-хъ областей. Легко убѣдиться, что такой группы нѣтъ. Дѣйствительно, пусть эта карта содержитъ области A, B, ..., I, K, L,...., X, Y и пусть области A, B, ..., I составляютъ группу. Представимъ себѣ, что области K, L, ..., X, Y утратили самостоятельное существованіе, и каждая изъ нихъ слилась съ которой-нибудь изъ областей A, B, ..., I. Такъ какъ взаимныя границы областей A, B, ..., I при этомъ не могли уничтожиться, то и видоизмѣненныя области A, B, ..., I составятъ группу. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, поэтому, что число ихъ не болѣе 4-хъ. Это разсужденіе примѣнимо, очевидно, ко всякой группѣ областей.

Теперь уже легко доказать, что 4 красками можно раскрасить любую карту. Сперва окрашиваемъ въ одинъ цвѣтъ любыя области и въ произвольномъ порядкѣ, наблюдая лишь за тѣмъ, чтобы не закрасить двухъ сосѣднихъ, и продолжаемъ закрашиваніе до тѣхъ поръ, пока возможно. Въ концѣ концовъ такъ какъ число областей на картѣ конечно, мы дойдемъ до того, что не останется ни одной области, которая не была бы сосѣдней съ какой-нибудь изъ уже окрашенныхъ. Тогда только беремъ другую краску и поступаемъ такимъ же образомъ. Когда будетъ исчерпана возможность закрашивать второй краской, беремъ третью и т. д.

Первой краской мы окрасили области:

$$A_1,\ B_1, \ldots,\ X_1,\ Y_1, \ldots \qquad (\mathrm{I}),$$

второй

$$A_2,\ B_2, \ldots,\ X_2,\ Y_2, \ldots \qquad (\mathrm{II}),$$

третьей

$$A_3,\ B_3, \ldots,\ X_3,\ Y_3, \ldots \qquad (\mathrm{III}),$$

четвертой

$$A_4,\ B_4, \ldots,\ X_4,\ Y_4, \ldots \qquad (\mathrm{IV}).$$

Каждая изъ областей какого-нибудь ряда будетъ сосѣдней, по крайней мѣрѣ, съ одной областью изъ каждаго предыдущаго ряда. Слѣдовательно, если бы послѣ закрашиванія четвертой краской остались неокрашенныя области, то онѣ должны были бы быть сосѣдними съ 4 областями, по крайней мѣрѣ, что дало бы группу болѣе 4-хъ областей.

Въ предыдущемъ изложеніи мы не разсматривали тѣхъ случаевъ, когда на картѣ имѣются территоріи, не занятыя областями — моря, озера и т. д., но ясно, что эти послѣднія, измѣняя лишь ширину границы въ нѣкоторыхъ мѣстахъ, не могутъ имѣть вліянія на наши предыдущія заключенія.

ОТЪ РЕДАКЦІИ.

Такъ называемая задача о четырехъ краскахъ принадлежитъ къ числу очень трудныхъ проблемъ дисциплины, извѣстной подъ названіемъ „Analysis situs". Она, конечно, не исчерпывается тѣми простыми разсужденіями, которыя предлагаетъ авторъ. Указаніе автора на то, что доказательство это „не претендуетъ на большую строгость" свидѣтельствуетъ, что онъ и самъ сомнѣвался въ полной точности своихъ разсужденій. При всемъ томъ, однако, редакція не отказала автору въ помѣщеніи настоящей замѣтки изъ слѣдующихъ соображеній. Если погрѣшность, допущенная авторомъ, представляетъ собою не грубую ошибку, а болѣе или менѣе тонкую погрѣшность, хотя бы и разрушающую все доказательство, то выясненіе таковой преставляется очень полезнымъ. Въ такихъ случаяхъ редакція помѣщаетъ статью, приглашая читателей обнаружить допущенную погрѣшность. Мы предлагаемъ это читателямъ и въ настоящемъ случаѣ.

Замѣтка о двухъ тождествахъ.

В. Шлыгина.

1. Изъ равенства

$$\frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} = 1$$

слѣдуетъ:

$$a_1 a_2 - 2(a_1 + a_2) + 3 = 0.$$

Подобно этому, изъ равенствъ:

$$\frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} + \frac{1}{a_3 - 1} = 1$$

и

$$\frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} + \frac{1}{a_3 - 1} + \frac{1}{a_4 - 1} = 1.$$

Соотвѣтственно имѣемъ:

$$a_1 a_2 a_3 - 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + 3(a_1 + a_2 + a_3) - 4 = 0$$

и

$$a_1 a_2 a_3 a_4 - 2(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4) +$$

$$+ 3(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4) - 4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 5 = 0.$$

Называя сумму произведеній k множителей: $a_1, a_2, \ldots, a_k$ по n черезъ S_k^n, заключаемъ по аналогіи съ предыдущимъ, что изъ равенства

$$\frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} + \cdots + \frac{1}{a_k - 1} = 1$$

слѣдуетъ:

$$S_k^k - 2S_k^{k-1} + 3S_k^{k-2} - \cdots + (-1)^{k-1} k S_k^1 + (-1)^k (k+1) = 0. \quad (1)$$

Покажемъ, что равенство (1) при справедливости его для k количествъ: $a_1, a_2, \ldots, a_k$, остается справедливымъ и для $k+1$ количествъ, т. е. будетъ вѣрно для какого угодно числа количествъ. Имѣемъ:

$$\frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} + \cdots + \frac{1}{a^k - 1} + \frac{1}{a_{k+1} - 1} - 1 = 0 =$$

$$= \frac{-S_k^k + 2S_k^{k-1} - \cdots - (-1)^{k-1} k S_k^1 - (-1)^k (k+1)}{(a_1 - 1)(a_2 - 1)\ldots(a_k - 1)} + \frac{1}{a_{k+1} - 1} =$$

$$= \frac{\left[-S_k^k + 2S_k^{k-1} - \cdots - (-1)^{k-1} k S_k^1 - (-1)^k (k+1)\right](a_{k+1} - 1) + (a_1 - 1)(a_2 - 1)\ldots(a_k - 1)}{(a_1 - 1)(a_2 - 1)\ldots(a_k - 1)(a_{k+1} - 1)}$$

Произведя перемноженія въ числителѣ и замѣтивъ, что

$$S_k^n a_{k+1} + S_k^{n+1} = S_{k+1}^{n+1},$$

будемъ имѣть по приведеніи подобныхъ членовъ:

$$S_{k+1}^{k+1} - 2S_{k+1}^k + \cdots + (-1)^k (k+1) S_{k+1}^1 + (-1)^{k+1} (k+2).$$

Обращаясь къ равенству

$$\frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} + \cdots + \frac{1}{a_k - 1} = 1,$$

положимъ въ немъ:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a.$$

Слѣдовательно, $\dfrac{k}{a-1} = 1$, откуда $a = k+1$.

Вслѣдствіе этого равенство (1) приметъ видъ:

$$(k+1)^k - 2C_k^{k-1}(k+1)^{k-1} + 3C_k^{k-2}(k+1)^{k-2} - \cdots +$$
$$+ (-1)^{k-1} kC_k^1 (k+1) + (-1)^k (k+1) = 0$$

или, по сокращеніи на $k+1$:

$$(k+1)^{k-1} - 2C_k^{k-1}(k+1)^{k-2} + 3C_k^{k-2}(k+1)^{k-3} - \cdots + (-1)^{k-1} kC_k^1 + (-1)^k = 0. \quad (2)$$

2. Изъ равенства

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} = 1$$

слѣдуетъ:

$$a_1 a_2 = 1.$$

Точно такъ же изъ равенствъ:

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \frac{1}{a_3+1} = 1$$

и

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \frac{1}{a_3+1} + \frac{1}{a_4+1} = 1$$

соотвѣтственно находимъ:

$$a_1 a_2 a_3 = a_1 + a_2 + a_3 + 2$$

и

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4) + 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 3.$$

Подобно этому, если имѣемъ:

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_k+1}=1,$$

то

$$S_k^k=S_k^{k-2}+2S_k^{k-3}+3S_k^{k-4}+\cdots+(k-2)\,S_k^1+k-1 \qquad (3)$$

Справедливость равенства (3) для какого угодно числа количествъ: $a_1, a_2, \ldots, a_k$ легко доказывается способомъ перехода отъ k къ $k+1$.

Положивъ теперь въ равенствѣ

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_k+1}=1$$

и

$$a_1=a_2=\cdots=a_k=a,$$

будемъ имѣть:

$$\frac{k}{a+1}=1 \text{ откуда } a=k-1.$$

Поэтому равенство (3) напишется такъ:

$$(k-1)^k=C_k^{k-2}(k-1)^{k-2}+2C_k^{k-3}(k-1)^{k-3}+3C_k^{k-4}(k-1)^{k-4}+\cdots+$$
$$+(k-2)\,C_k^1(k-1)+k-1.$$

Раздѣливъ обѣ части на $k-1$, найдемъ:

$$(k-1)^{k-1}=C_k^{k-2}(k-1)^{k-3}+2C_k^{k-3}(k-1)^{k-4}+3C_k^{k-4}(k-1)^{k-5}+\cdots+$$
$$+(k-2)\,C_k^1+1.$$

Еще къ вопросу о доказательствѣ теоремы Безу.

В. Эйчеса.

Въ №№ 596, 602 и 604 „Вѣстника“ были помѣщены полемическія замѣтки г. Кагана и г. Киселева, касающіеся вопроса о премуществахъ того или другого изъ двухъ извѣстныхъ способовъ доказательства теоремы Безу.

При чтеніи помѣщенной въ № 601 и 602 „Вѣстника“ статьи г. Шатуновскаго „О радикалахъ“ у меня, — я думаю, впрочемъ, не у одного меня — возникла мысль доказать ту же теорему Безу еще по новому.

Въ самомъ дѣлѣ 1) остатокъ отъ дѣленія x^m на $x-a$ равенъ a^m, что явствуетъ изъ слѣдующаго тождества:

$$x^m = (x^m - a^m) + a^m, \tag{1}$$

гдѣ $x^m - a^m$, какъ извѣстно, дѣлится на $x-a$.

2) Остатокъ отъ дѣленія Ax^m на $x-a$ равенъ Aa^m, что слѣдуетъ изъ равенства

$$Ax^m = A(x^m - a^m) + Aa^m, \tag{2}$$

получающагося умноженіемъ предыдущаго тождества на A.

Равенству (2) можно придать слѣдующій видъ:

$$Ax^m = q_m(x-a) + Aa^m, \tag{3}$$

гдѣ q_m — нѣкоторый цѣлый многочленъ, содержащій букву x и являющійся частнымъ отъ дѣленія Ax^m на $x-a$.

3) Возьмемъ многочленъ $F(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots + Ix + K$. Тогда

$$\left.\begin{array}{lcl} Ax^m & = & q_m(x-a) + Aa^m, \\ Bx^{m-1} & = & q_{m-1}(x-a) + Ba^{m-1}, \\ \dots & & \dots\dots\dots\dots, \dots \\ Hx^2 & = & q_2(x-a) + Ha^2, \\ Ix & = & q_1(x-a) + Ia, \\ K & = & K. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Откуда путемъ сложенія находимъ равенство:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots + Ix + K = Q_x(x-a) + Aa^m + Ba^{m-1} + \cdots + Ia + K \tag{5}$$

выражающее, что остатокъ отъ дѣленія многочлена $F(x)$ на $x-a$ равенъ $F(a)$ т. е. численному значенію дѣлимаго при $x=a$, и, слѣдовательно, теорема Безу доказана.

Можно было бы еще проще по установленіи равенства (2) сослаться на предварительно доказанную теорему, что остатокъ отъ дѣленія алгебраической суммы равенъ суммѣ остатковъ отъ дѣленія слагаемыхъ.

Предложенное здѣсь доказательство совершенно аналогично доказательству ариѳметической теоремы: остатокъ отъ дѣленія числа на 9 равенъ остатку отъ дѣленія суммы цифръ на 9. Впрочемъ, эти двѣ теоремы близки другъ къ другу и по внутреннему смыслу.

То обстоятельство, что ариѳметическая теорема объ остаткѣ отъ дѣленія числа на 9 доступна ученику III-го класса гимназіи, служитъ достаточнымъ аргументомъ въ пользу приведеннаго доказательства теоремы Безу.

Преимущество приведеннаго доказательства передъ общеизвѣстными двумя заключается, между прочимъ, въ томъ, что квалификація входящихъ въ тождество (5) величинъ, какъ дѣлимаго, дѣлителя, частнаго и остатка не предшествуютъ утвержденію тождества, но вытекаютъ изъ него, какъ одно изъ возможныхъ толкованій тождества, доказаннаго независимо отъ такихъ квалификацій.

Кромѣ того, это доказательство включаетъ въ себѣ особыя преимущества обоихъ прежнихъ доказательствъ: такъ, оно, во-первыхъ, отличается простотой давнишняго обычнаго доказательства; во-вторыхъ, ясно указываетъ, „какъ и почему въ остаткѣ получается $F(a)$“ и „позволяетъ установить законъ частнаго“, при томъ дѣлаетъ это во много разъ лучше и яснѣе, чѣмъ новое доказательство, помѣщенное въ двухъ послѣднихъ изданіяхъ алгебры г. Киселева. Въ самомъ дѣлѣ

1) $x^m - a^m = (x-a)(x^{m-1} + x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 + \cdots + xa^{m-2} + a^{m-1})$ (6)

а потому на основаніи формулы (1) частное отъ дѣленія x^m на $x-a$ равно

$$x^{m-1} + x^{m-2}a + \cdots + xa^{m-1} + a^m.$$

2) Частное q_m отъ дѣленія Ax^m на $x-a$ равно

$$Ax^{m-1} + Ax^{m-2}a + \cdots + Axa^{m-1} + Aa^m,$$

что явствуетъ изъ формулъ (2) и (3).

3) Частное Q отъ дѣленія цѣлаго многочлена m-ой степени $F(x)$ на $x-a$ равно суммѣ $q_m + q_{m-1} + \cdots + q_1 + q_0$, что явствуетъ изъ формулъ (4) и (5). Итакъ,

$$Q = \left\{\begin{array}{l} Ax^{m-1} + Ax^{m-2}a + Ax^{m-3}a^2 + \cdots + Axa^{m-2} + Aa^{m-1} + \\ \qquad + Bx^{m-2} + Bx^{m-3}a + \cdots + Bxa^{m-3} + Ba^{m-2} + \\ \qquad\qquad + Cx^{m-3} + \cdots + Cxa^{m-4} + Ca^{m-3} + \\ \qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + Hx \quad + Ha \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + I \end{array}\right.$$

или

$$Q = Ax^{m-1} + (Aa + B)x^{m-2} + (Aa^2 + Ba + C)x^{m-3} + \cdots$$

$$+ (Aa^{m-2} + Ba^{m-3} + \cdots + Ga + H)x + (Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + \cdots + Ha + I),$$

что вполнѣ аналогично искусственному способу отысканія частнаго при дѣленіи числа на 9.

$$1000 = 111 \,.\, 9 + 1, \text{ а потому}$$

$$+\left\{\begin{array}{rl} 2000 = & 222 \,.\, 9 + 2 \\ 300 = & 33 \,.\, 9 + 3 \\ 40 = & 4 \,.\, 9 + 4 \\ 7 = & \qquad 7 \end{array}\right.$$

$$2347 = (222 + 33 + 4)\,9 + (2 + 3 + 4 + 7) =$$

$$= [2 \text{ сотни} + (2+3) \text{ десятка} + (2+3+4)] \,.\, 9 + (2+3+4+7)$$

откуда слѣдуетъ, что частное Q отъ дѣленія 2347 на 9 равно $Q = 2$ сотни $+$ $(2+3)$ десятка $+ (2+3+4)$ единицъ $+$ частное отъ дѣленія $(2+3+4+7)$ на 9.

Какъ на недостатокъ изложеннаго способа, можно было бы указать только на то, что этотъ способъ доказательства основанъ на тождествѣ

$$x^m - a^m = (x-a)(x^{m-1} + x^{m-2}a + \cdots a^m),$$

т. е. ученикъ долженъ уже знать, что $x^m - a^m$ дѣлится на $x - a$, между тѣмъ какъ это, въ свою очередь, является слѣдствіемъ теоремы Безу.

Однако, это предложеніе настолько простое само по себѣ, что можетъ быть усвоено учащимися помимо теоремы Безу, а по своей важности*) оно вполнѣ заслуживаетъ независимаго утвержденія его въ курсѣ алгебры, что и сдѣлано, напримѣръ, въ курсѣ алгебры г. Киселева (см. примѣры 4 и 5 изданія 25-го).

Ариѳметическая задача.

М. Шебаршина.

Въ „Вѣстникѣ" за 1888 годъ, въ № 38 IV сем. предложена такая задача (№ 260): „Доказать, что если нѣкоторое трехзначное число abc дѣлится безъ остатка на 37, то и числа bca и cab, изъ тѣхъ же цифръ составленныя, тоже должны дѣлиться на 37.

Такимъ же свойствомъ обладаютъ трехзначныя числа по отношенію еще къ другому дѣлителю. Найти этотъ другой дѣлитель".

Можно поставить общую задачу такого типа:

Найти число цифръ даннаго числа, которое кратно числа N и остается ему кратнымъ при всѣхъ круговыхъ перестановкахъ входящихъ въ него цифръ".

Рѣшеніе прилагаю:

Дано число M, удовлетворяющее условію: $M \equiv 0 \pmod{N}$. Пусть

$$M = 10^n a + 10^{n-1} b + 10^{n-2} c + \cdots + 10k + p.$$

Сдѣлаемъ первую круговую перестановку:

$$M_1 = 10^n b + 10^{n-1} c + \cdots + 10^2 k + 10p + a.$$

Надо найти значеніе n, при которомъ $M_1 \equiv 0 \pmod{N}$.

*) Формула суммы членовъ геометрической прогрессіи можетъ быть очень просто выведена изъ нея же

$$S = a + aq + aq^2 + \cdots aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \cdots q^{n-1}) = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Очевидно:

$$M_1 - M = 9 \cdot 10^{n-1}b + 9 \cdot 10^{n-2}c + \cdots + 9 \cdot 10k + 9p + a(1 - 10^n),$$

или

$$M_1 - M = 9(10^n a + 10^{n-1}b + 10^{n-2}c + \cdots + 10k + p) + a - 10^n a - 9 \cdot 10^n a,$$

или

$$M_1 = 10M - a(10^{n+1} - 1).$$

Теперь имѣемъ задачу: найти n, при которомъ:

$$10M - a(10^{n+1} - 1) \equiv 0 \pmod{N}.$$

Такъ какъ $M \equiv 0 \pmod{N}$, то должно быть:

$$a(10^{n+1} - 1) \equiv 0 \pmod{N}, \quad \text{откуда:} \quad 10^{n+1} \equiv 1 \pmod{N},$$

такъ какъ a — произвольная величина.

Если α — число цифръ въ періодѣ числа N*), то имѣемъ: $10^\alpha \equiv 1 \pmod{N}$ или, возведя въ степень x, $10^{\alpha x} \equiv 1 \pmod{N}$.

Теперь очевидно, что $10^{n+1} = 10^{\alpha x}$, откуда $n + 1 = \alpha x$. Но $(n + 1)$ есть число цифръ числа M. Значитъ получаемъ результатъ:

„Всякое число, кратное данному числу N, остается кратнымъ N при всѣхъ круговыхъ перестановкахъ его цифръ въ томъ случаѣ, если число входящихъ въ него цифръ кратно величинѣ періода числа N“.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ „Selbstanzeigen“, краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

А. И. Гольденбергъ. *Бесѣды по счисленію.* Изданіе Саратовскаго губернскаго земства. 2-ое, исправленное и дополненное подъ редакціей Д. А. Волковскаго. Саратовъ, 1914. Стр. IV + 224. Ц. 1 руб.

Блестящій пріемъ, оказанный критикой «Бесѣдамъ по счисленію» **), побудилъ насъ пересмотрѣть «Бесѣды» и выпустить второе изданіе, которое,

*) По терминологіи теоріи чиселъ α есть показатель, которому принадлежитъ число 10 по модулю N.

**) См. 2 — 4 стр. обложки книги.

сравнительно съ первымъ, является исправленнымъ, измѣненнымъ и пополненнымъ.

Исправленію, измѣненію и дополненію подверглось только то, что написано нами, все же, написанное самимъ А. И. Гольденбергомъ, а именно: первыя пять бесѣдъ и всѣ семь образцовыхъ уроковъ, само собою понятно, осталось неприкосновеннымъ, не считая составленнаго нами, для удобства, плана каждой «бесѣды».

Исправленіе заключалось въ томъ, что, во первыхъ, въ нѣкоторыхъ мѣстахъ устранены фактическія неточности и невѣрныя числовыя данныя; во вторыхъ, инымъ мѣстамъ придана болѣе точная, ясная и опредѣленная редакція; въ третьихъ, нѣкоторыя свѣдѣнія, какъ ужъ устарѣлыя, выпущены и замѣнены новѣйшими данными.

Измѣненіе коснулось распредѣленія матеріала, а именно: наша статья — «Значеніе» Бесѣдъ «А. И. Гольденберга», помѣщенная въ первомъ изданіи въ концѣ книги, поставлена на надлежащемъ мѣстѣ — передъ «Бесѣдами», тотчасъ послѣ нашей статьи — «Памяти Александра Ивановича Гольденберга».

Дополненіе же, кромѣ замѣны старыхъ свѣдѣній новыми, состоитъ въ приведеніи плана каждой бесѣды. Кромѣ того, съ цѣлью удобства пользованія «Бесѣдами», мы помѣстили «Оглавленіе» къ книгѣ.

Для удобства мы избрали три различныхъ шрифта: болѣе крупнымъ напечатаны — предисловіе, двѣ наши статьи и все то, что написано самимъ А. И. Гольденбергомъ, остальныя же бесѣды напечатаны болѣе мелкимъ шрифтомъ, а еще болѣе мелкимъ шрифтомъ — пробные уроки данные курсистами.

Д. Волковскій.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 223 (6 сер.). Найти общія рѣшенія системы уравненій

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{a^2},\quad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=\frac{1}{b^2},\quad \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}=\frac{1}{c^2},$$

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=0,\quad \frac{xx''}{a^2}+\frac{yy''}{b^2}+\frac{zz''}{c^2}=0,\quad \frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}+\frac{z'z''}{c^2}=0,$$

$$x^2+y^2+z^2=1,\quad x'^2+y'^2+z'^2=1,\quad x''^2+y''^2+z''^2=1,$$

$$xx'+yy'+zz'=0,\quad xx''+yy''+zz''=0,\quad x'x''+y'y''+z'z''=0.$$

При какихъ условіяхъ система допускаетъ безчисленное множество рѣшеній?

В. Каганъ (Одесса).

№ 224 (6 сер.). Въ треугольникъ данной площади q вписанъ квадратъ такъ, что одна изъ сторонъ его лежитъ на одной изъ сторонъ треугольника, а концы противоположной стороны лежатъ на двухъ другихъ сторонахъ треугольника. Въ какомъ случаѣ площадь вписаннаго въ треугольникъ квадрата достигаетъ maximum'а?

R.

№ 225 (6 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$5\,(\lg_y x + \lg_x y) = 26, \quad xy = 64.$$

Л. Закутинскій (Черкассы).

№ 226 (6 сер.). Пусть $\varphi(n)$ обозначаетъ вообще число чиселъ, взаимно простыхъ съ цѣлымъ положительнымъ числомъ n и не превосходящихъ n. Доказать тожество

$$\varphi(ab) = \frac{\varphi(a)\,\varphi(b)\,d}{\varphi(d)},$$

гдѣ a и b — любыя цѣлыя положительныя числа, а d — ихъ общій наибольшій дѣлитель.

Н. С. (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 180 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$2\cos x - \cos\frac{3x}{2} = 1.$$

Такъ какъ по формулѣ суммы косинусовъ

$$\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 2\cos x\cos\frac{x}{2}, \text{ то } \cos\frac{3x}{2} = 2\cos x\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}.$$

Поэтому данное уравненіе можно представить въ видѣ

$$2\cos x - \left(2\cos x\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) - 1 = 0, \text{ или } 2\cos x - 1 - \cos\frac{x}{2}(2\cos x - 1) = 0,$$

т. е.

$$(2\cos x - 1)\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right) = 0, \text{ откуда } \cos x = \frac{1}{2} \text{ или же } \cos\frac{x}{2} = 1.$$

Слѣдовательно $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ или же $\frac{x}{2} = 2k\pi$, т. е. $x = 4k\pi$, гдѣ k — произвольное цѣлое число. Итакъ, данное уравненіе имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, выражаемыхъ формулами

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_2 = 4k\pi,$$

гдѣ k — произвольное цѣлое число.

П. Безчеревныхъ (Благовѣщенскъ); *Д. Ханжіевъ* (Армавиръ); *П. Волохинъ* (Ялта); *Л. Лисовскій* (Гжатскъ, Смоленской губ.); *А. Иткинъ* (Петроградъ); *А Черновъ* (Тула); *А. Кисловъ* (Москва); *Я. Эпштейнъ* (Михайловка, Таврической губ.); *N. N.* (Тифлисъ); *Н. Андреевскій* (Сочи); *А. Ильинъ* (Кіевъ); *И. Зюзинъ* (с. Татьянино); *А. Глазуновъ* (Александровъ).

№ 183 (6 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = 7z - 4x + 6y - 4.$$

Представивъ уравненіе въ видѣ

$$(1) \quad 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y + 1 = 7z - 3,$$

лѣвую часть можно записать въ видѣ $4x^2 + 4x + 1 - 2y(6x + 3) + 9y^2$, или же въ видѣ $(2x+1)^2 - 2 \cdot 3y \cdot (2x+1) + (3y)^2$; такимъ образомъ первая часть уравненія (1) есть квадратъ многочлена $2x - 3y + 1$. Итакъ, уравненіе (1) можно записать въ видѣ

$$(2) \quad (2x - 3y + 1)^2 = 7z - 3.$$

Правую часть уравненія (2) можно записать въ видѣ $7(z-1)+4$, гдѣ z, по условію, должно быть числомъ цѣлымъ. Поэтому [см. (2)] квадратъ цѣлаго числа $2x - 3y + 1$ долженъ при дѣленіи на 7 давать въ остаткѣ 4. Всякое цѣлое число можно представить въ видѣ $7t + r$, гдѣ t — цѣлое число, а r — имѣетъ одно изъ семи значеній $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Раздѣливъ квадратъ $(7t+r)^2$ на 7 при каждомъ изъ этихъ семи значеній на 7, можно убѣдиться, что разсматриваемый остатокъ равенъ 4 лишь при $r = 2$ или $r = -2$. Итакъ, x и y должны быть цѣлыми числами, удовлетворяющими одному изъ двухъ уравненій

$$(3) \quad 2x - 3y + 1 = 7t \pm 2,$$

гдѣ t можетъ равняться любому цѣлому числу [такъ какъ при этихъ условіяхъ и для z получается изъ уравненія (2) цѣлое значеніе]. Записавъ уравненія (3) въ видѣ

$$(4) \quad 2x - 3y = 7t + 1, \quad (5) \quad 2x - 3y = 7t - 3,$$

рѣшимъ ихъ въ цѣлыхъ числахъ. Уравненіе (6) $2w - 3v = 1$ имѣетъ относительно w и v частное цѣлое, рѣшеніе $w = -1$, $v = -1$; поэтому, умноживъ равенство (6) при $w = v = -1$ на $7t + 1$, а затѣмъ на $7t - 3$, получимъ для уравненій (4) и (5) соотвѣтственно слѣдующія частныя рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ:

$$x_1 = -1 - 7t, \quad y_1 = -1 - 7t; \quad x_1 = 3 - 7t, \quad y_1 = 3 - 7t.$$

Поэтому общія формулы цѣлыхъ рѣшеній уравненія (4) суть

$$(7) \quad x = -1 - 7t + 3u \quad y = -1 - 7t + 2u,$$

гдѣ u — произвольное цѣлое число. Общія же формулы цѣлыхъ рѣшеній уравненія (5) имѣютъ видъ

$$(8) \quad x = 3 - 7t + 3u, \quad y = 3 - 7t + 2u,$$

гдѣ u — также произвольное цѣлое число. Подставляя значенія x и y изъ формулъ (7), а затѣмъ изъ формулъ (8) въ уравненіе (2) и опредѣляя z, находимъ соотвѣтственно послѣ обычныхъ преобразованій, что

$$(9)\quad z=7t^2+4t+1,\quad (10)\quad z=7t^2-4t+1.$$

Слѣдовательно первоначальное уравненіе имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ рѣшеній; всѣ они опредѣляются двумя группами формулъ [см. (7), (9); (8), (10)]

$$x=-1-7l+3u,\quad y=-1-7t+2u,\quad z=7t^2+4t+1$$

и

$$x=3-7t+3u,\qquad y=3-7t+2u,\qquad z=7t^2-4t+1,$$

гдѣ t и u — произвольныя и независящія одно отъ другого числа.

А. Иткинъ (Петроградъ); *П. Безчеревныхъ* (Благовѣщенскъ); *Я. Эпштейнъ* (ст. Михайловка, Таврической губ).

№ 184 (6 сер.). *Доказать, что при* n *цѣломъ и неотрицательномъ число*

$$4^{n+1}n-(n+1)4^n+1$$

дѣлится на 9.

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Преобразуемъ данное выраженіе слѣдующимъ образомъ:

$$4^{n+1}n-(n+1)4^n+1=4^n\,.\,4n-n\,.\,4^n-4^n+1=3n\,.\,4^n-3n+3n-4^n+1$$

Итакъ,

$$(1)\quad 4^{n+1}\,.\,n-(n+1)4^n+1=3n(4^n-1)-(4^n-3n-1).$$

Но

$$4^n=(1+3)^n=1+3n+3^2\frac{n(n-1)}{2}+\cdots+3^n=1+3n+9t,$$

гдѣ t — нѣкоторое цѣлое число, откуда

$$(2)\quad 4^n-3n-1=9t.$$

При n цѣломъ и положительномъ разность 4^n-1, или 4^n-1^n, кратна разности $4-1$, т. е. кратна 3, а потому число $3n(4^n-1)$ кратно 9; изъ формулы (2) слѣдуетъ, что выраженіе 4^n-3n-1 также кратно 9 при n цѣломъ и положительномъ. Поэтому [см. (1)] выраженіе $4^{n+1}n-(n+1)4^n+1$ также кратно 9 при n цѣломъ и положительномъ; при $n=0$ данное выраженіе, обращаясь въ нуль, также кратно 9.

А. Иткинъ (Петроградъ); *М Бабинъ* (ст. Дашковка); *А. Кисловъ* (Москва); *И. Зюзинъ* (с. Татьянино); *П. Безчеревныхъ* (Благовѣщенскъ); *Г. Михневичъ* (Одесса).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію *).

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Новыя идеи въ экономикѣ. Сборникъ № 3. „Раціонализація хозяйства“. Стр. 148. Сборникъ № 4. „Вздорожаніе жизни“. Стр. 164. Непеtріодическое изданіе, выходящее подъ редакціей проф. М. И. Туганъ-Барановскаго. Кн-ство „Образованіе“. СПб., 1914. Ц. каждаго сборника 80 к.

Новыя идеи въ химіи. Сборникъ № 5. «Кристаллохимическій анализъ». Стр. 160. Сборникъ № 6. «Строеніе матеріи». Стр. 160. Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей проф, СПб. Университета Л. А. Чугаева. Кн-ство «Образованіе». Ц. каждаго сборника 80 к.

Географія въ школѣ. Сборникъ № 2. «Вопросы преподаванія и методики географіи въ средней и народной школѣ». Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей Я. И. Руднева. Кн-ство «Образованіе». СПб., 1914. Стр. 145. Ц. 80 к.

Новыя идеи въ правовѣдѣніи. Сборникъ № 1. «Цѣли наказанія» сост. проф. П. И. Люблинскимъ. Непеpіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей проф. Л. У. Петражицкаго. Кн-ство «Образованіе». СПб., 1914. Стр. 135. Ц. 80 к.

Педагогическій музей военно-учебныхъ заведеній 1864 — 1914. СПб., 1914. Стр. XXVII + 343. Ц. 5 р.

Станціи малой мощности, ихъ постройка и эксплуатація при русскихъ условіяхъ. Инженера С. И. Александровскаго. Николаевъ, 1914. Стр. 32.

Х. Б. Аршонъ. *Неопредѣленный анализъ 1-ой ст.*: «I. Простѣйшій общій методъ». II. «Сокращенные и искусственные пріемы». Двинскъ, 1914. Стр. 26. Ц. 40 коп.

М. Пистракъ. *О нѣкоторыхъ взаимныхъ свойствахъ плоскихъ кривыхъ.* Варшава, 1914. Стр. 47.

И. М. Максимовъ. *Аналитическое рѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ теоріи чиселъ.* 1914. Стр. 16.

П. Курилко. *Къ вопросу объ обоснованіи тригонометріи и преподаваніи ея въ средней школѣ.* Съ предисловіемъ и примѣчаніями. Вильна, 1914. Стр. 30. Ц. 50 к.

Н. А. Бухаловъ. *Введеніе въ элементарную геометрію.* Казань, 1914. Стр. 48. Ц. 40 коп.

Его же. *Ученіе о прямыхъ параллельныхъ линіяхъ, какъ о равно отстоящихъ.* Изд. 4-ое усоверш. Казань, 1914. Стр. 25. Ц. 30 к.

*) Настоящій списокъ появляется несвоевременно. Это обусловливается тѣмъ, что секретарь редакціи вступилъ въ ряды арміи въ отсутствіи редактора; списки оказались не въ должномъ порядкѣ.

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“ — Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
ищется

Обложка
ищется