№№ 74—75.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ,

Издаваемый Э. К. Шпачинскимъ.

РЕКОМЕНДОВАНЪ:

Уч. Ком. Мин. Нар. Просв. для гимназій мужскихъ и женскихъ, реальныхъ училищъ, прогимназій, городскихъ училищъ, учительскихъ институтовъ и семинарій; Гл. Упр. Военно-Учебн. Зав. — для военно-учебныхъ заведеній.

№№ 1–48 ОДОБРЕНЫ
Уч. Ком. при Св. Синодѣ для духовныхъ семинарій и училищъ.

VII Семестра №№ 2-й и 3-й.

Высочайше утверж. Товарищество печатнаго дѣла и торговли И. Н. Кушнеревъ и К°, въ Москвѣ.
Кіевское Отдѣленіе, Бибиковскій бульваръ, домъ № 8-б.
1889.

Содержаніе № 74.

Содержаніе № 75.

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 75.

VII Сем. 11 Сентября 1889 г. № 3.

Именованныя величины въ школьномъ преподаваніи и значеніе ихъ символовъ.

(*Продолженіе*) *)

IV.

57. Обратимся къ развитію алгебры въ Европѣ, т. е. къ исторіи ея превращенія изъ того состоянія, въ которомъ она была у арабовъ, въ ея современную форму. Вопросъ этотъ довольно обширный и сложный, потому что алгебра не шла отдѣльнымъ ходомъ развитія, а вырабатывалась въ непосредственной связи съ другими науками, подъ ихъ вліяніемъ и вліяя обратно на нихъ. Алгебра стала самостоятельнымъ предметомъ изслѣдованія только въ то время, когда она уже дошла до сравнительно высокой степени развитія. Первые же ея шаги, постепенная символизація ариѳметическихъ вычисленій, совершались въ тѣсной связи съ геометріею и подъ ея непосредственнымъ вліяніемъ. Стремленіе къ удобству и къ общности были ближайшими прямыми причинами, подготовлявшими символическую алгебру; но не слѣдуетъ думать, что они явились сразу въ сознательной, явной формѣ какъ руководящій принципъ, ибо стройная научная система никогда не была и не могла быть первоисточникомъ научныхъ свѣдѣній; она становится возможною только по достаточномъ накопленіи отдѣльныхъ фактовъ и истинъ и ими создается.

Хронологическій порядокъ развитія отдѣльныхъ алгебраическихъ пріемовъ довольно полно излагается въ трактатахъ по исторіи математики; въ этомъ отношеніи ограничимся необходимѣйшимъ, на сколько это непосредственно нужно для ясности **).

---

*) См. „Вѣстникъ“ № 55, 56 и 63.

**) Кромѣ вышеупомянутыхъ сочиненій по исторіи математики, мы воспользовались еще другими, главнымъ образомъ слѣдующими:

Chasles. Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.

Gerhardt. Geschichte der Mathematik in Deutschland.

Rouse Ball. A short account of the history of mathematics.

Правильность изложеннаго выше мы прослѣдили еще по

Cantor. Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik. Erster Band.

Насъ преимущественно интересуетъ ходъ развитія принциповъ, выражавшихся въ изслѣдованіяхъ, и въ этомъ отношеніи обратимъ особое вниманіе на тотъ фактъ, что Vièta, творецъ символической алгебры, не только признавалъ возможность перемноженія именованныхъ величинъ и дѣленія разнородныхъ именованныхъ, но даже даетъ этимъ дѣйствіямъ особыя названія въ отличіе отъ обыкновеннаго умноженія и дѣленія. Мало того, мы увидимъ, что Vièta въ этомъ отношеніи имѣлъ предшественниковъ и что его ученіе было вѣнцомъ предыдущаго историческаго развитія.

Принято очень высоко цѣнить заслуги Vièta, но, насколько намъ извѣстно, единственный Maximilien Marie излагаетъ сущность его ученія и вполнѣ ясно устанавливаетъ упомянутый фактъ, выражающій смыслъ ученія Vièta. Остальные же историки ограничиваются указаніемъ фактическихъ результатовъ изслѣдованій Vièta съ формальной стороны, совершенно не касаясь существа и смысла его пріемовъ. Что же касается Max. Marie, то его критическая оцѣнка Vièta неправильная, потому что онъ относится къ нему отрицательно; а между тѣмъ Vièta не только имѣлъ предшественниковъ, но и послѣдователей. Мы почерпнемъ этотъ фактъ изъ трактата Max. Marie, гдѣ онъ ясно указанъ, но гдѣ упускается изъ виду его значеніе.

Затѣмъ мы обратимся къ вопросу, когда и какъ совершился переворотъ и какимъ образомъ возникло современное ученіе о невозможности именованнаго множителя и о невозможности дѣленія разнородныхъ именованныхъ величинъ. Въ трактатахъ по исторіи мы нашли утвержденіе, что будто англичанинъ Wallis первый ввелъ единицу измѣренія въ вычисленія. Такое мнѣніе по существу невѣрно, потому что единицы получили научное гражданство, когда сдѣланы были первыя геометрическія вычисленія; однако оно заставило насъ обратиться къ подлинному сочиненію Wallis'a; мы дадимъ его разборъ и увидимъ, что Wallis виновникъ отверженія алгебры Vièta; но вмѣстѣ съ тѣмъ, постараемся показать, что его доводы, какимъ бы внѣшнимъ успѣхомъ они ни были увѣнчаны, по существу весьма неосновательные.

58. Развитіе математики въ Европѣ началось путемъ ознакомленія съ арабскими сочиненіями; состояніе же ея до тѣхъ поръ было жалкое. Умѣніе вести необходимые торговые расчеты при помощи римскихъ цифръ и счетовъ (abacus); умѣніе рѣшать необходимѣйшіе вопросы по землемѣрію, но съ ошибками древнихъ римскихъ землемѣровъ; умѣніе дѣлать нѣкоторыя вычисленія для календаря, главнымъ образомъ ради опредѣленія времени Пасхи;—вотъ въ сущности сводъ математическихъ свѣдѣній того времени. Пріемы же вычисленій были пріемы римскаго математика Боэція.

Первое ознакомленіе съ арабскими сочиненіями произошло въ XII вѣкѣ въ Испаніи (Аделардъ Батскій, Герардъ Кремонскій, Іоаннъ Испанскій).

Герардъ перевелъ на латинскій языкъ сочиненіе: Liber in quo terrarum corporumque continentur mensurationes Ababuchri qui dicebatur Heuss, translatus a magistro Girardo Cremonensi de arabico in latinum in Toledo, abbreviatus.

Это сочиненіе содержитъ только изложеніе арабской (индусской) системы счисленія и измѣреніе площадей и объемовъ (М. М. II, 18).

Такой фактъ, быть можетъ, не имѣетъ особаго историческаго значенія, потому что широкое распространеніе арабской науки началось только съ XIII вѣка въ Италіи; весьма однако любопытно, что одно изъ первыхъ арабскихъ сочиненій, проникшихъ въ Европу, было посвящено исключительно упомянутымъ двумъ вопросамъ; и Max. Marie совершенно справедливо замѣчаетъ, что открытіе десятичной системы счисленія и вычисленіе площадей и объемовъ составляютъ два исторически нераздѣльныхъ факта и что поэтому надо имѣть въ виду ихъ тѣсную связь въ исторіи развитія мысли.

Ариѳметика Магомета бен-Муза Алкаризми уже въ XII вѣкѣ была переведена Аделардомъ Батскимъ (Cantor. Gesch. der Mathem. стр. 611). Но этотъ трактатъ сдѣлался истиннымъ первоисточникомъ европейской науки только, когда въ 1202 году Леонардъ Пизанскій, иначе Fibonacci (род. 1175 г.), издалъ сочиненіе „Algebra et almuchabala“, составленное по Магомету бен-Муза. Сочиненіе Fibonacci извѣстно болѣе подъ названіемъ „Liber abaci“ и легло въ основу трудовъ весьма многихъ послѣдующихъ математиковъ.

Fibonacci издалъ также сочиненіе „Practica geometricae“, гдѣ излагается измѣреніе площадей, круга и шара. Современникъ же его Giovanno Companus перевелъ съ арабскаго элементы Эвклида (этотъ переводъ вышелъ первымъ печатнымъ изданіемъ въ 1482 году).

59. Послѣдующее время до эпохи, ознаменованной великими именами Lucas di Borgo иначе Pacioli (1440—1515) и Regiomontanus (1436—1476), не богато ни крупными фактами, ни выдающимися именами. Главная работа этихъ двухъ съ половиною вѣковъ заключается въ постепенномъ распространеніи элементарной геометріи и новой ариѳметики и въ повсемѣстномъ ознакомленіи съ этими науками. Это время очень недурно обрисовано въ XI главѣ Rouse Ball, Short account, и позволю себѣ привесть нѣкоторыя выдержки:

„.....Новая арабская ариѳметика называлась *алгоритмомъ*, т. е. искусство Алкаризми*), въ отличіе отъ древней ариѳметики Боэція.

Руководства по алгоритму начинались изложеніемъ арабской системы счисленія, затѣмъ давались правила сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія; далѣе принципы пропорцій примѣнялись къ разнымъ практическимъ задачамъ, и обыкновенно книги заканчивались алгебраическими формулами для большинства обыкновенныхъ торговыхъ вопросовъ**). Наука алгоризма по существу была торговая ариѳметика, хотя излагалось также и то, что въ то время понимали подъ алгеброю***). Такимъ образомъ зачатки алгебры кроются въ ариѳметикѣ, и поэтому названіе общая

---

*) Въ послѣдствіи было совершенно утрачено пониманіе названія algorithmus, и только Reinaud (Mémoire sur l'Inde) высказалъ въ 1845 г. мнѣніе, что это исковерканное имя арабскаго ученаго. Въ 1857 году въ Кембриджѣ была найдена рукопись, подтверждающая это мнѣніе. (См. Cantor. Gesch. d. Mathematik, стр. 612).

**) Должно замѣтить, что Rouse Ball совершенно напрасно упоминаетъ объ алгебраическихъ формулахъ. Никакихъ формулъ не было; рѣчь идетъ о словесномъ выраженіи способа рѣшенія типическихъ задачъ, поясняемаго числовымъ примѣромъ.

***) Рѣчь идетъ о рѣшеніи уравненій первой и второй степени.

ариѳметика, которымъ иногда пользовались, даетъ большинству людей неизмѣримо лучшее понятіе о ея содержаніи и объ ея методахъ, чѣмъ болѣе выработанныя опредѣленія современныхъ математиковъ. Во всякомъ же случаѣ то опредѣленіе лучше даваемаго Sir William Hamilton'омъ: „наука о чистомъ времени", или же проф. de-Morgan'омъ: „исчисленіе послѣдовательностей"....

„Основныя правила алгоризма въ началѣ не доказывались точно; это уже дѣло дальнѣйшаго развитія; и еще до временъ Cocker'а, т. е. до 1667 г. существовало нѣкоторое разногласіе въ принципахъ. Немногіе математики пытались доказывать или оправдывать пріемы; они ограничивались выраженіемъ правила и его поясненіемъ немногими примѣрами".

„Торговля въ XIII и XIV вѣкахъ была преимущественно въ рукахъ италіанцевъ, и очевидныя преимущества системы алгоризма привели къ общему ея принятію въ Италіи. Быстрое же распространеніе арабскихъ цифръ въ Европѣ произошло настолько же благодаря составителямъ календарей и купцамъ, какъ и благодаря людямъ науки....."

„Около 1400 года правила алгоризма были общеизвѣстны въ Европѣ и ими пользовались въ большинствѣ астрономическихъ и научныхъ сочиненій. Многіе купцы однако продолжали вести счеты по старой системѣ до 1550 г., а монастыри и коллегіи даже до 1650 г., хотя по всей вѣроятности при производствѣ вычисленій пользовались пріемами алгоризма..,.."

„Такимъ образомъ исторія алгоризма въ Европѣ начинается его употребленіемъ италіанскими купцами, въ особенности же Флорентійскими, изобрѣвшими двойную бухгалтерію..... Они же довели число основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій до семи: счисленіе, сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень и извлеченіе корней *). Pacioli находилъ, что это въ полномъ соотвѣтствіи съ числомъ даровъ Святаго Духа. Его объясненіе, быть можетъ, своеобразно, но во всякомъ случаѣ дѣло было поставлено правильно....."

„Пріемы алгоритмической ариѳметики въ началѣ были весьма трудные.... Главныя усовершенствованія, введенныя въ начальный италіанскій алгоризмъ, заключались:

1) въ упрощеніи производства четырехъ главныхъ дѣйствій,

2) въ изобрѣтеніи знаковъ $+$, $-$, $=$,

3) въ изобрѣтеніи логариѳмовъ и

4) во введеніи десятичныхъ дробей.....

Умноженіе въ началѣ считалось процессомъ чрезвычайной трудности, и только мало по малу пріучались пользоваться табличкою умноженія.... Дѣленіе же считалось доступнымъ только опытнымъ математикамъ...."

60. Такимъ образомъ первое время возрожденія науки было въ значительной мѣрѣ посвящено распространенію ознакомленія съ десятичною системою счисленія и съ производствомъ дѣйствій сообразно этой системѣ. Въ то время не было еще даже зачатковъ символическаго

*) Brahmagupta различалъ двадцать главныхъ и восемь вспомогательныхъ дѣйствій, знаніе которыхъ онъ считалъ существенно необходимымъ для всѣхъ, желающихъ быть вычислителями.

языка, но тѣмъ не менѣе оно имѣетъ крупное значеніе для послѣдующаго развитія принциповъ алгебры.

Историки справедливо признаютъ первостепенную важность за фактомъ, что возрожденіе науки въ Европѣ началось по арабскимъ источникамъ; такъ напр. Chasles неоднократно указываетъ на это въ Note XII къ его Aperçu historique. Европейцы сразу получили греческіе геометрическіе методы совмѣстно слитые съ индусскими пріемами вычисленій, и разцвѣтъ науки произошелъ уже на этой почвѣ. Главное значеніе этого факта обыкновенно усматриваютъ въ томъ, что этимъ сразу была подготовлена почва развитію приложеній анализа. Съ тѣхъ поръ, какъ анализъ выкристаллизовался въ могучій пріемъ изслѣдованія и достигъ высокой общности и отвлеченности, людямъ невольно казалось, что его основныя истины сразу были ясны. Невольно забывали, какъ увидимъ на примѣрѣ Wallis'а, что только мало по малу отдѣльныя задачи и частныя приложенія убѣждали, что анализъ вообще пригоденъ. Невольно кажется, что будто и въ прежнія времена, какъ теперь, только чисто техническія трудности иной разъ клали предѣлъ приложеніямъ анализа; а между тѣмъ исторія учитъ, что было время, когда греки, стоявшіе на высокой степени умственнаго развитія, затруднялись въ принципіальномъ пониманіи приложимости анализа. Когда дѣло изученія зависимостей конкретныхъ величинъ и связывающихъ ихъ законовъ подвинулось уже довольно далеко, напр. въ рукахъ Архимеда, явилась необходимость и по существу была подготовлена возможность выразить ихъ такъ или иначе символическимъ языкомъ,—и неумѣніе сдѣлать этотъ шагъ положило предѣлъ и конецъ развитію греческой науки. Когда же затѣмъ въ Европѣ наука стала воскресать, понадобились еще цѣлые вѣка работы лучшихъ умовъ, чтобы создать ту сумму свѣдѣній, которая теперь сообщается ребенку въ нѣсколько лѣтъ, и положить основу развитію анализа и его приложеній.

Въ этомъ отношеніи вопросъ о взаимномъ соотношеніи геометріи и ариѳметики, въ періодъ ихъ ранняго развитія въ Европѣ имѣетъ существенное значеніе для пониманія развитія алгебраическихъ понятій и смысла алгебраическихъ символовъ.

Суть вопроса заключается въ слѣдующемъ: спрашивается, что было раньше, и что въ началѣ преобладало, вліяніе ли геометріи на ариѳметику или наоборотъ—вліяніе ариѳметики на геометрію?

Правильный отвѣтъ на такой вопросъ важенъ по многимъ причинамъ. Вопервыхъ онъ даетъ ключъ къ пониманію какъ развивалось ученіе о смыслѣ алгебраическихъ символовъ, и какъ могло и должно было развиться ученіе Vièta о смыслѣ дѣйствій надъ именованными величинами. Во вторыхъ вопросъ представляетъ интересъ для оцѣнки историческаго значенія ариѳметки. Мы увидимъ, что уже Wallis превозноситъ ея общность и полагаетъ, что геометрія наука, à priori подчиненная ариѳметикѣ. Въ третьихъ, наконецъ, вопросъ представляетъ значеніе для насъ и потому, что его рѣшеніе въ томъ или другомъ смыслѣ подтверждаетъ или опровергаетъ цѣлесообразность нашего требованія, чтобы въ школьномъ преподаваніи возможность и справедливость дѣйствій надъ именованными величинами подтверждалась геометрическими и физическими соображеніями.

По отношенію къ арабамъ мы отвѣтили на вопросъ и видѣли, что арабскіе аналитическіе пріемы, сказывавшіеся въ рѣшеніи уравненій, были въ совершенномъ подчиненіи ихъ геометрическимъ свѣдѣніямъ.

По отношенію же къ Европейцамъ эпохи возрожденія вопросъ рѣшается нѣсколько труднѣе потому, что они стоятъ на подготовленной арабами почвѣ, пользуются ихъ предварительной работой, и поэтому геометрія и анализъ весьма скоро являются тѣсно сплетенными, такъ что уже въ срединѣ XV вѣка сочиненія Pacioli и Regiomontanus'а изобилуютъ приложеніями ариѳметики и даже алгебры къ геометріи. Но тѣмъ не менѣе можно достаточно, повидимому, опредѣленно утверждать, что въ началѣ значеніе геометріи, какъ пріема изслѣдованія количественныхъ зависимостей. значительно преобладало надъ значеніемъ анализа, какъ пріема изслѣдованія геометрическихъ зависимостей.

Въ подтвержденіе укажемъ вопервыхъ, что Fibonacci ясно высказывается въ этомъ духѣ: онъ говоритъ: Et quia Arithmetica et Geometria scientiae sunt connexae et suffragatoriae sibi ad invicem, non potest de numero plena tradi doctrina, nisi inserantur Geometrica quaedam, vel ad Geometriam spectantia. И затѣмъ Fibonacci прибавляетъ, что алгебраическія правила и дѣйствія часто черпаютъ свою наглядность въ геометрическихъ построеніяхъ и разсмотрѣніяхъ и ими доказываются (Chasles. Aperçu, стр. 520).

На ряду съ этимъ Chasles однако замѣчаетъ, что сочиненіе Fibonacci первое, въ которомъ алгебра примѣняется къ геометрическимъ вопросамъ. Но онъ не дѣлаетъ подтверждающихъ ссылокъ; мы не имѣемъ возможности документально указать въ чемъ состоятъ примѣненія алгебры къ геометріи у Fibonacci, и идутъ ли они дальше рѣшенія такого рода вопросовъ: четвертая и третья часть дерева находится подъ землею; они составляютъ 21 футъ; найти длину всего дерева. (Захарченко, стр. 206); думаемъ однако, что такъ какъ Fibonacci весьма мало ушелъ отъ Магомета бен-Муза, то о какомъ нибудь развитіи геометріи помощію науки вычисленій у него еще не можетъ быть и рѣчи. Противоположная же точка зрѣнія о значеніи геометріи для установленія истинъ вычисленія выражена со всею желательною ясностію.

Во вторыхъ укажемъ слѣдующее. Gerhardt въ своей исторіи математики въ Германіи, стр. 21, приводитъ письмо Regiomontanus'а Roeder'у, какъ доказательство того, что Regiomontanus стремился къ расширенію алгебры. Оно весьма любопытно; онъ пишетъ: „Желаю знать нѣтъ ли въ твоей библіотекѣ рѣдкой и, какъ говорятъ, прекрасной книги о равномѣрныхъ твердыхъ тѣлахъ; на основаніи ея можно бы пополнить тонкую науку de re et censu*). Нѣкоторые воображаютъ, что они имѣютъ болѣе общую алгебраическую науку, чѣмъ излагаемую въ шести обыкновенныхъ главахъ. Они однако забываютъ, что эта наука только тогда могла бы быть распространена на кубы, четвертыя степени (census censuum) и дальнѣйшія, *если бы предварительно была установлена геометрія равномѣрныхъ тѣлъ* (geometria solidorum equipollentium)..."

*) Алгебра, понимаемая въ то время какъ искусство рѣшенія уравненій первой степени, нерѣдко называлась ars rei et census (наука о вещи и квадратѣ).

Очевидно, что Regiomontanus, весьма опредѣленно ставитъ успѣхъ алгебры въ зависимость отъ успѣха геометріи. Такая точка зрѣнія одного изъ геніальнѣйшихъ умовъ исторически вполнѣ понятна, какъ продолженіе взглядовъ, высказанныхъ еще Fibonacci. Regimontanus, очевидно, смотритъ на алгебру какъ на вспомогательный пріемъ выраженія геометрически установленныхъ истинъ помощію писанныхъ знаковъ.

Въ третьихъ, наконецъ, слѣдуетъ имѣть въ виду еще и то, что геометрическій пріемъ изслѣдованія не только сразу былъ понятъ и возведенъ въ принципъ, являясь въ этомъ отношеніи наслѣдіемъ древнихъ, но что онъ сравнительно весьма долго сохраняетъ такое свое значеніе. Tartaglia (1500—1557), рѣшившій кубическое уравненіе, не знаетъ алгебраическаго вывода формулы куба двучлена и прибѣгаетъ къ геометрическому построенію, разлагая кубъ, построенный на суммѣ двухъ отрѣзковъ (M. M. II, 245). Cardan (1501—1576), позаимствовавъ у Tartaglia рѣшеніе кубическаго уравненія, тоже уясняетъ себѣ составъ куба двучлена геометрическимъ построеніемъ, разлагая кубъ на части (M. M. II, 257). А изъ „Ars magna“ Cardan'а видно, что примѣры примѣненія геометріи къ ариѳметикѣ, приведенные еще Fibonacci, сохраняются и имъ (M. M, II, 134). Насколько вообще Cardan былъ далекъ отъ алгебраическаго пониманія, видно изъ того, что онъ умѣетъ рѣшать квадратное уравненіе только геометрическимъ построеніемъ, а въ кубическомъ уравненіи онъ различаетъ тринадцать главныхъ случаевъ и сорокъ четыре второстепенныхъ, понимая подъ послѣдними уравненія высшихъ степеней, которыя непосредственно сводятся на кубическія (M. M. II, 257). Далѣе напр. Cardan строго различаетъ между выраженіями вида $a+\sqrt{b}$, которыя называетъ binomium, и выраженіями вида $a-\sqrt{b}$, которыя называетъ residuum. Онъ также сбивается въ пониманіи правила знаковъ и иногда утверждаетъ, что произведеніе двухъ минусовъ даетъ минусъ (M. M. II, 262).

Еще Benedictis (1530—1590), современникъ Vieta, въ сочиненіи, озаглавленномъ: Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber, изданномъ въ 1583 г., постоянно пользуется геометрическими разсмотрѣніями для доказательства и провѣрки правилъ ариѳметики и алгебры (Chasles. Aperçu, стр. 540); и даже въ тѣхъ случаяхъ, когда задача рѣшена вычисленіемъ, считаетъ необходимымъ дать и геометрическое рѣшеніе. Chasles приводитъ слѣдующій примѣръ. Benedictis задается слѣдующимъ вопросомъ, съ тремя неизвѣстными, который по существу можетъ быть выраженъ уравненіями $x+y=a$, $y+z=b$, $z+x=c$; и рѣшивъ его вычисленіемъ дѣлаетъ слѣдующее построеніе: возьмемъ треугольникъ, стороны котораго a, b и c, и впишемъ въ него окружность; тогда отрѣзки, образуемые точками касанія, будутъ требуемыя неизвѣстныя, откуда видно, что $x=\frac{a+b-c}{2}$ и т. д.

61. Приведенные примѣры позволяютъ заключить, что до XVI вѣка геометрическія построенія служили не для того, чтобы придавать наглядность отвлеченнымъ результатамъ анализа, но были источникомъ, изъ котораго почерпались свѣдѣнія о количественныхъ зависимостяхъ. Это и дѣлаетъ понятнымъ почему Regiomontanus считаетъ невозможнымъ развитіе уравненій выше второй степени безъ предварительнаго про-

гресса въ области геометріи; а точка зрѣнія Stifel'я, съ которою ниже ознакомимся, и по которой алгебра есть не что иное какъ вычисленіе помощію линій, площадей и объемовъ, является сознательнымъ выраженіемъ исторически сложившагося воззрѣнія.

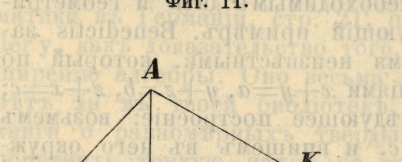
Признавая однако глубокое значеніе факта, что первоначально алгебраическія зависимости раскрывались геометрическимъ пріемомъ, надо съ другой стороны признать, что подобный методъ, по мѣрѣ развитія науки, не могъ сохранять практическаго значенія, какъ орудіе работы, по своей трудности; и разъ былъ данъ первый толчекъ обратнымъ приложеніямъ анализа, этотъ послѣдній пріемъ долженъ былъ развиться и сдѣлаться современемъ преобладающимъ методомъ изслѣдованія. И дѣйствительно три съ половиною вѣка, отдѣляющіе Віета (1540—1603) и Декарта (1596—1650) отъ Fibonacci, представляютъ послѣдовательный переходъ отъ того состоянія, когда анализъ еще вовсе не примѣнялся, до полнаго его развитія въ самостоятельный методъ изслѣдованія. И въ родѣ того, какъ древняя греческая наука была пріостановлена въ своемъ развитіи отсутствіемъ символовъ, такъ и теперь дѣло развитія приложеній анализа тѣсно связано съ развитіемъ символическаго языка; его недостатками оно тормозится, съ его улучшеніемъ оно постепенно крѣпнетъ и одерживаетъ полную побѣду съ его полнымъ развитіемъ.

До XV вѣка никакихъ символовъ не было. Для числового рѣшенія геометрическихъ задачъ, даннымъ давались опредѣленныя числовыя значенія, которыя обыкновенно выбирались съ такимъ расчетомъ, чтобы результаты были соизмѣримые. Читателю предоставлялось на основаніи одного числового примѣра рѣшать и другіе, подобные ему. Этимъ путемъ подготовлялось сознаніе возможности и необходимости общихъ пріемовъ. Regiomontanus служитъ примѣромъ, что уже при несовершенствѣ числового пріема ощущалась возможность общихъ методовъ.

Въ Rouse Ball, Short acount, стр. 181 приведена слѣдующая задача, рѣшенная Regiomontanus'омъ: требуется рѣшить треугольникъ по разности двухъ сторонъ, по высотѣ и по разности отрѣзковъ, на которые основаніе дѣлится высотою (Regiomontanus. De triangulis, lib. II, prop. 23).

Regiomontanus даетъ слѣдующее рѣшеніе. „Пусть ABG (фиг. 11) такой треугольникъ, стороны котораго AB и AG имѣютъ разность KG; и пусть по проведеніи перпендикуляра AD отрѣзки BD и DG имѣютъ разность EG; и пусть обѣ эти разности и перпендикуляръ имѣютъ требуемыя значенія. Говорю, что отсюда можно найти всѣ стороны треугольника. Рѣшу задачу по искусству rei et census. Итакъ пусть разность сторонъ равна 3, разность отрѣзковъ основанія 12 и перпендикуляръ 10.

Фиг. 11.



Пусть основаніе равно одной вещи (una res); тогда сумма боковыхъ сторонъ равна 4 вещамъ, ибо отношеніе основанія къ суммѣ сторонъ то же, что и KG къ GE, т. е. единицы къ 4*). Поэтому BD равно

*) Regiomontanus не доказываетъ этого, оно очевидно, принявъ во вниманіе что

$$AG^2-AB^2=DG^2-BD^2$$

$$AG-AB=\frac{1}{4}(DG-BD).$$

$\frac{1}{2}$ вещи безъ 6, и AB равно 2 вещамъ безъ $\frac{3}{2}$. Умножаю AB на самого себя (duco AB in se), получается 4 степени (census) и $2^1/_4$ безъ 6 вещей. Такимъ же образомъ BD, умноженное на себя, даетъ $\frac{1}{4}$ степени и 36 безъ 6 вещей. Сюда прибавляю квадратъ 10, т. е. 100; получается, что $\frac{1}{4}$ степени и 136 безъ 6 вещей очевидно равняется 4 степенямъ и $2^1/_4$ безъ 6 вещей. Возстанавливая недостатокъ и отнимая равныя, какъ наука предписываетъ, получаемъ, что нѣкоторое число степеней равно числу; это даетъ знанiе значенiя вещи; а затѣмъ опредѣляются и остальныя стороны треугольника".

Приведенный примѣръ въ извѣстномъ смыслѣ типиченъ для своего времени; нѣтъ никакихъ сокращенiй и символовъ, разсужденiе ведется надъ опредѣленными числовыми данными и уравненiе выражено словесно. Но онъ замѣчателенъ по общности постановки вопроса, выраженнаго не упоминая объ опредѣленныхъ данныхъ. Особенная же его замѣчательность, какъ указываетъ Rouse Ball, заключается въ томъ, что чертежъ не соотвѣтствуетъ взятымъ числовымъ даннымъ, соотвѣтственно которымъ точка D въ дѣйствительности лежитъ внѣ точекъ B и G. Другими словами Regiomontanus не интересуется точными подробностями взятаго частнаго случая, а повидимому сознаетъ и понимаетъ общее рѣшенiе вопроса и разсуждаетъ надъ опредѣленными ариѳметическими числами только за неимѣнiемъ лучшаго способа выраженiя мысли. Онъ однако подошелъ и къ этому способу выраженiя, потому что въ другомъ трактатѣ: „Algorithmus demonstratus" Regiomontanus первый пользуется буквенными обозначенiями какъ неизвѣстныхъ, такъ даже и извѣстныхъ величинъ. (R. Ball, стр. 184). Но къ сожалѣнiю Algorithmus demonstratus былъ напечатанъ только въ 1534, почти вѣкъ спустя послѣ жизни автора и до тѣхъ поръ вѣроятно оставался мало извѣстнымъ.

62. Современникъ Regiomontanus'а италiанецъ Lucas di Borgo, иначе Pacioli (1440—1515), авторъ знаменитаго „Summa de Arithmetica, Geometria, proportioni et proportionalitate", перваго печатнаго труда по ариѳметикѣ (1494), имѣвшаго въ свое время громадное значенiе, тоже занимается приложенiями вычисленiй къ геометрiи. Max. Marie (II, 188) приводитъ для характеристики его метода примѣръ, взятый впрочемъ изъ другого сочиненiя Pacioli: Libellus in tres partiales tractatus divisus.

Заимствуемъ этотъ примѣръ, какъ любопытное доказательство того, какой перiодъ младенчества пришлось выдержать анализу.

63. (M. M., II, 188—192): „Дается радiусъ вписаннаго круга и отрѣзки, на которые точка касанiя дѣлитъ одну сторону треугольника; требуется найти остальныя двѣ стороны."

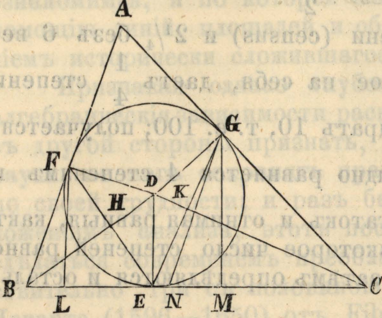
Пусть (фиг. 12)

$$r=DE=4,\ BE=6,\ EC=8.$$

Рѣшенiе. Полагая $AF=AG=x$, и составляя площадь треугольника какъ произведенiе полупериметра на радiусъ вписаннаго круга, и, по извѣстной формулѣ, чрезъ стороны, получаемъ уравненiе

$$4(14+x)=\sqrt{48x(14+x)}$$

Фиг. 12.



или

$$14+x=3x$$

откуда

$$x=7$$

и слѣдовательно

$$AB=13,\ AC=15.$$

Pacioli однако поступаетъ слѣдующимъ образомъ.

Онъ вычисляетъ DB и DC по прямоугольнымъ треугольникамъ DBE и DCE, что даетъ

$$DB=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}$$

$$DC=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}.$$

Примѣняя къ четыреугольникамъ BFDE и CGDE, вписуемымъ въ окружность, теорему о произведеніи діагоналей, онъ находитъ

$$FE=\sqrt{44^4/_{13}},\ GE=\sqrt{51^1/_5}$$

откуда

$$FH=\sqrt{11^1/_{13}},\ GK=\sqrt{12^4/_5}.$$

Затѣмъ онъ приступаетъ къ вычисленію BL и EL, зная ихъ сумму$=6$, и замѣчая, что разность ихъ квадратовъ тоже извѣстна

$$EL^2-BL^2=FE^2-FB^2=44^4/_{13}-36=8^4/_{13},$$

онъ находитъ

$$BL=2^4/_{13}$$

$$LE=3^9/_{13},$$

но только замѣтимъ, что ему въ голову не приходитъ раздѣлить разность квадратовъ на сумму, для опредѣленія разности и для отысканія неизвѣстныхъ этимъ путемъ. Онъ поступаетъ слѣдующимъ образомъ. Для опредѣленія отрѣзковъ BL и LE. Одинъ изъ нихъ онъ обозначаетъ

1 вещь (res, chose)

тогда другой

6 безъ 1 вещь.

Ихъ квадраты:

1 квадратъ (census)

и 36 безъ 12 вещей плюсъ 1 квадратъ, а разность квадратовъ будетъ

36 безъ 1 вещь.

Но она равна $8^4/_{13}$, и получается уравненіе.
12 вещей равны 36 безъ $8^4/_{13}$ равны $27^7/_{13}$ откуда

$$1 \text{ вещь} = 2^4/_{13}$$

а другой отрѣзокъ равенъ $3^9/_{13}$.

Далѣе такимъ же образомъ опредѣляются

$$CM = 4^4/_5.$$

$$ME = 3^1/_5.$$

Затѣмъ вычисляется FL и GM изъ прямоугольныхъ треугольниковъ FLE и GME; это даетъ

$$GM = 6^2/_5$$

$$FL = 5^7/_{13}.$$

Затѣмъ проводится GN параллельно AB и вычисляются отрѣзки GN и MN изъ пропорцій

$$GN:FB = GM:FL$$

и

$$MN:LB = GM:FL$$

или

$$GN:6 = 6^2/_5:5^7/_{13}$$

$$MN:2^4/_{13} = 6^2/_5:5^7/_{13}$$

что даетъ

$$GN = 6^{14}/_{15}$$

$$MN = 2^2/_3.$$

Наконецъ AB вычисляется по пропорціи

$$AB:GN = BC:CN(= CM + MN)$$

т. е.

$$AB:6^{14}/_{15} = 14:4^4/_5 + 2^2/_3$$

откуда

$$AB = 13.$$

Нашедши AB и замѣчая, что AF=7, получается AC=15.

„Уже не подобной, конечно алгеброй, восклицаетъ М. М., пользовался Архимедъ для опредѣленія равновѣсія плавающаго параболоида или для опредѣленія центра тяжести отрѣзка параболы. И, чтобы вполнѣ выяснить всю судьбу этого приключенія, замѣтимъ, что Cardan чрезъ сто шестьдесятъ лѣтъ воспроизводитъ рѣшенія Pacioli безъ всякихъ измѣненій и съ великою похвалою его изящности“.

Конечно остается только сказать, что если бы геометрическіе пріемы мышленія Pacioli хоть сколько нибудь походили на его аналитическое искусство, то онъ едва ли стяжалъ бы себѣ свою славу.

64. Изъ предыдущаго, думаемъ, явствуетъ, что до конца XV вѣка имѣются съ одной стороны стройные элементы геометріи, всегда готовые къ услугамъ, когда не хватаетъ средствъ для уясненія алгебраическаго вопроса, и съ другой стороны слабые, лишенные стройности и цѣльности пріемы вычисленій. Вопросъ о взаимномъ соотношеніи алгебры и геометріи приходится поэтому рѣшать въ слѣдующемъ смыслѣ.

Если имѣется въ виду чисто формальная сторона хода развитія аналитическихъ пріемовъ геометріи, давшихъ пищу алгебрѣ, то можно признать, что съ самаго начала возрожденія науки развиваются мало по малу приложенія алгебры къ геометріи. И сравнительно съ этимъ фактомъ, другая сторона дѣла, т. е. пользованіе геометріей для алгебраическихъ цѣлей, представляетъ сравнительно малый интересъ, какъ движеніе, замирающее по мѣрѣ развитія науки.

Но если взглянуть на вопросъ шире, стараясь вникнуть во взаимное сплетеніе идей, то становится яснымъ, что нарождающееся новое движеніе, при своей первоначальной слабости, не могло не носить на себѣ отпечатка существующаго одновременно съ нимъ довольно цѣльнаго метода, тѣмъ болѣе, что первоначально оно было только призвано служить его цѣлямъ. И приходится искать въ чемъ именно оно подверглось вліянію господствующей силы.

Исторія даетъ на это весьма опредѣленный отвѣтъ, но на него, скажемъ прямо, не обращаютъ вниманія.

Вліяніе геометріи на алгебру сказалось въ томъ, что алгебраическіе знаки и дѣйствія были непосредственными выразителями геометрическихъ понятій и сочетаніе алгебраическихъ знаковъ получило правильный смыслъ, какъ символъ сочетанія конкретныхъ величинъ.

Мы переходимъ къ этому вопросу и покажемъ, какъ сначала въ рукахъ Stifel'я, а затѣмъ Viѐta алгебраическія операціи получили тотъ смыслъ, который мы признаемъ вѣрнымъ.

65. Но для оцѣнки Stifel'я мы сперва приведемъ выдержку изъ Chasles. Aperçu historique (стр. 539).

„Такъ какъ сочиненія Lucas di Borgo были первые печатные труды, въ которыхъ излагались принципы алгебры и ея приложеніе къ геометріи, то принято было считать ихъ единственнымъ источникомъ въ началѣ XVI вѣка того новаго направленія, которое принимала наука, и громадныхъ ея успѣховъ, начиная съ того времени. Конечно нѣтъ сомнѣнія, что два знаменитые италіанскіе геометра Cardan (1501—1576) и Tartaglia (1500—1557) обязаны своими свѣдѣніями и методомъ сочиненію „Summa de Arithmetica“, на которое они часто ссылаются. Но слѣдуетъ думать, что въ Германіи были другіе источники, изъ которыхъ проливался свѣтъ, и которые распространяли принципы алгебры и ея приложеній къ геометріи. Объ этомъ можно судить по ученому труду Stifel'я, изданному въ 1544 г. подъ названіемъ: „Arithmetica integra“, и гдѣ излагаются элементы алгебры и много геометрическихъ вопросовъ, рѣшаемыхъ этимъ путемъ, какъ и въ Summa de Arithmetica. Трудъ Stifel'я, по сравненію съ работами Pacioli, представляетъ особенности, указывающія на болѣе глубокое значеніе и на болѣе раннее развитіе алгебры, и въ немъ намѣчаются также нѣкоторые шаги по направленію къ отвлеченной ея формѣ.

Такъ, напримѣръ, въ немъ встрѣчаются знаки $+$ и $-$ и знакъ корня $\sqrt{\ }$; неизвѣстная и ея степени обозначаются символами, а не словами *cosa*, *censo*, *cubo*, *censo de censo* и т. д.; если же имѣется нѣсколько неизвѣстныхъ, то они обозначаются различными буквами A, B, C и т. д.; высказывается и доказывается, что уравненіе можетъ имѣть нѣсколько корней, чего Lucas di Borgo не зналъ; а что касается принципіальнаго примѣненія алгебры и геометріи, то Stifel даетъ многочисленные примѣры; въ особенности замѣчательны всѣ предложенія XIII книги Эвклида, которыя легко рѣшаются уравненіемъ второй степени. Правда, что трудъ Stifel'я вышелъ почти полъ вѣка спустя послѣ Lucas di Borgo, и можно бы думать, что указанныя нами особенности являются плодомъ развитія за это время принциповъ Pacioli. Однако Stifel въ вопросахъ алгебры является только послѣдователемъ двухъ другихъ нѣмецкихъ алгебраистовъ Adam Rise и Christoph Rudolff, о которыхъ онъ отзывается съ большою похвалою, въ особенности о послѣднемъ. Онъ напечаталъ въ 1522 году сочиненіе по алгебрѣ, подъ заглавіемъ „Die Coss", переведенное въ Италіи на латинскій языкъ. Мы убѣдились, что здѣсь уже намѣчено значительное развитіе алгебры и ея геометрическихъ приложеній, указанное только что въ трудѣ Stifel'я. Кромѣ того въ нѣсколькихъ маленькихъ трактатахъ по ариѳметикѣ, вышедшихъ въ Германіи въ началѣ XVI вѣка, находятся примѣры приложенія правилъ вычисленія къ геометрическимъ вопросамъ; такъ, напримѣръ, въ Algorithmus de integris et mimetiis, напечатанномъ въ Лейпцигѣ въ 1507 г. правило *ложнаго положенія* примѣняетъ къ рѣшенію такого вопроса: дается одна сторона прямого угла прямоугольнаго треугольника и сумма двухъ остальныхъ сторонъ, и требуется найти эти стороны. Напомнимъ еще, что въ XV вѣкѣ Regiomontanus и астрономъ Blanchinus хорошо владѣли приложеніями правилъ алгебры и что первый изъ нихъ пользуется ими въ трактатѣ De triangulis для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ".

66. Работы Михаила Стифеля (1487—1567) представляютъ сводъ алгебраическихъ свѣдѣній германскихъ ученыхъ того времени. Они довольно подробно разобраны въ Gerhardt. Geschichte d. Mathem. стр. 60—75.

Главный его трудъ „Arithmetica integra", состоитъ изъ трехъ книгъ. Въ первой разсматриваются раціональныя числа. Нѣсколько главъ посвящено ариѳметической и геометрической прогрессіямъ, и, не имѣя возможности вдаться въ подробности, скажемъ однако, что прогрессіи играютъ весьма важную роль въ разсмотрѣніяхъ Stifel'я. Такъ, напримѣръ, сравненіемъ геометрическихъ прогрессій онъ раскрываетъ составъ квадрата и куба двучленнаго выраженія, подтверждая затѣмъ справедливость результата геометрическимъ построеніемъ. Stifel говоритъ, что вся алгебра въ сущности вычисленіе помощію геометрическихъ прогрессій*).

*) Подобное же воззрѣніе затѣмъ высказываетъ и Bürgi (Gerhardt стр. 77).

Во второй книгѣ разсматриваются ирраціональныя числа. Третья же посвящена собственно алгебрѣ, т. е. уравненіямъ, и здѣсь Stifel, разбирая способъ рѣшенія уравненій и доказывая его геометрическимъ построеніемъ, высказываетъ свой основной принципіальнынй взглядъ, что *алгебра не что иное какъ вычисленіе помощію линій площадей и объемовъ*, и что коссическія величины (—т. е. по нашему x, x^2, x^3...., а по Stifel'ю линіи, площади, объемы—) связаны между собою непрерывною геометрическою пропорціональностію: animadvertendum est, ut Algebra sit calculatio per lineas et superficies atque corpora progredientium sub proportionalitate Geometrica continua.

Въ третьей главѣ той же книги Stifel высказывается въ подобномъ же вещественномъ смыслѣ; онъ весьма близко подошелъ къ понятію о показателѣ степени, сравнивая ариѳметическую прогрессію натуральныхъ чиселъ съ геометрическою послѣдовательныхъ степеней,

0	1	2	3	4	5 . . . . .
1	2	4	8	16	32 . . . . .

и въ связи съ этимъ говоритъ: „Въ родѣ того, какъ натуральный рядъ чиселъ выражаетъ (exponit) отдѣльныя геометрическія прогрессіи, точно такъ же онъ выражаетъ и коссическую прогрессію

0	1	2	3	4	5	6	7
1	1se	1ζ	1ce	1ζζ	1β	1ζce	1bβ.....

И отсюда еще видно, что въ родѣ того, какъ всякій членъ коссической прогрессіи имѣетъ своего показателя соотвѣтственнаго порядка (напримѣръ 1se соотвѣтствуетъ 1, 1ζ соотвѣтствуетъ 2 и т. д.) такъ и каждая коссическая величина неявно служитъ наименованіемъ (denominatio) своего показателя, который ей служитъ и полезенъ, въ особенности при умноженіи и дѣленіи“.

Высказываемые Stifel'емъ взгляды вполнѣ понятны, если взглянуть на нихъ въ смыслѣ перевода на языкъ вычисленій и символовъ предложеній 9-ой книги Эвклида, по которымъ единица относится къ корню, какъ корень къ квадрату, какъ квадратъ къ кубу, т. е. по которымъ эти величины находятся въ непрерывной пропорціи, или составляютъ прогрессію.

Вникая въ изложенный взглядъ Stifel'я на алгебру, намъ думается, что онъ не мало удивился бы вопросу совершаются ли дѣйствія надъ величинами или только надъ ихъ числовыми значеніями, и едва ли онъ понялъ бы почему же надо изгнать какъ незаконное то, что онъ явно и удобно выражалъ своими знаками.

67. Въ дѣлѣ символическаго обозначенія Stifel обнаруживаетъ большой успѣхъ; онъ пользуется буквами и обозначаетъ различныя неизвѣстныя слѣдующимъ образомъ

1A, 1B, 1C.....

Такимъ же образомъ онъ поступаетъ и въ вышеприведенной геометрической прогрессіи коссическихъ величинъ.

Gerhardt (стр. 71) находитъ такой способъ весьма неудобнымъ; но намъ кажется, что здѣсь кроется недоразумѣніе и что у Stifel'я была особая причина писать и числовой коэффиціентъ 1 и буквенный символъ A, B, C. Его способъ обозначенія чрезвычайно напоминаетъ способъ Fourier, и намъ кажется, что Stifel понимаетъ буквы не какъ количественные символы, а какъ наименованія. Это было бы вполнѣ естественно, принимая во вниманіе, что онъ ихъ вводитъ какъ сокращенія употребительнаго до него полнаго выписыванія наименованій res, census и т. д. Считаемъ долгомъ оговориться, что высказываемъ свое мнѣніе какъ догадку, но она кажется намъ правдоподобною.

68. Насколько Stifel отличался пониманіемъ символическаго метода, тому имѣется весьма цѣнное, на нашъ взглядъ, доказательство въ Arithmetica integra, подтверждающее вмѣстѣ съ тѣмъ, что въ его время нужда въ развитомъ символическомъ языкѣ развилась до степени зрѣлой потребности, и что умы были подготовлены къ его воспріятію. А именно у Стифеля впервые встрѣчается ученіе объ отрицательныхъ величинахъ. Существуютъ попытки приписывать уже Діофанту знаніе отрицательныхъ величинъ, но можно смѣло сказать, что даже еще Cardan, болѣе или менѣе знавшій правило знаковъ, не имѣлъ понятія объ отрицательныхъ величинахъ. Его знаніе сводится къ тому, что онъ умѣлъ раскрывать произведенія суммы на сумму и зналъ какими послѣдовательными сложеніями и вычитаніями надо сочетать члены развернутаго произведенія. Когда же Cardan рѣшаетъ квадратное уравненіе и приходитъ къ невозможному вычитанію большаго изъ меньшаго, онъ говоритъ, что корень воображаемый (valor ficta). Однако отрицательныя величины какъ самостоятельное понятіе ни у него, ни у другихъ не встрѣчаются; они были дѣйствительно извѣстны только индусамъ, пользовавшимся точкою какъ символомъ вычитанія, но арабы не переняли у нихъ.

Знаки + и —, придуманные въ Германіи, вошли въ употребленіе незадолго до Стифеля. Gerhardt (стр. 49) указываетъ, что они встрѣчаются впервые въ рукописи Вѣнской библіотеки: Regule Cose vel Algebre, составленной повидимому въ срединѣ XV вѣка. Первый же печатный трудъ, гдѣ они встрѣчаются, книга Widmann von Eger'а (1489 г.). И вотъ у Stifel'я въ Arithmetica integra въ пятой главѣ третьей книги разсматриваются отрицательныя числа, т. е. такія, предъ которыми стоитъ знакъ — минусъ; онъ ихъ называетъ *нелѣпыми числами* (numeri absurdi) или *воображаемыми*. Такимъ образомъ новый символъ вычитанія—очень скоро породилъ новое понятіе объ отрицательныхъ величинахъ, которое до возникновенія этого символа не установилось и не могло установиться.

69. Разбирая время, предшествовавшее Viëta, намъ остается еще коснуться весьма важнаго шага, который алгебра сдѣлала въ рукахъ италіанцевъ Tartaglia (1500—1557) и Ferrari (1522—1562), современниковъ Stifel'я, рѣшившихъ уравненія кубическое и четвертой степени.

Надо замѣтить, что арабская литература перешла въ свое время въ Европу далеко не въ полномъ видѣ; единственный арабскій трактатъ, о которомъ упоминаютъ Lucas di Borgo, Cardan, Pelletier, Tartaglia, Stevin и другіе, сочиненіе Магомета бен-Муза Алкаризми. (Chasles Aperçu, стр. 491, примѣч. 2). И нельзя сказать, чтобы такое положеніе вещей не имѣло цѣны; вслѣдствіе ограниченнаго только знакомства съ арабами работа европейскихъ математиковъ стала самобытнѣе и сталъ намѣчаться болѣе отвлеченный взглядъ на уравненія, и помимо ихъ чисто геометрическаго значенія. Уже Fibonacci разсматриваетъ уравненія, приводимыя къ квадратнымъ. Далѣе Lucas di Borgo разсматриваетъ уравненія четвертой степени, рѣшаетъ тѣ изъ нихъ, которыя имѣютъ форму биквадратныхъ; уравненія же вида

$$x^4+ax^2=bx$$

$$x^4+ax=bx^2$$

объявляетъ невозможными (Chasles, стр. 535). Если бы онъ стоялъ строго на точкѣ зрѣнія Омара Алкгайями, то онъ не долженъ былъ бы рѣшать и разбираемыхъ имъ случаевъ; его же очевидно останавливаетъ не соображеніе о принципіальной невозможности уравненія четвертой степени, а только формальная трудность, именно неумѣніе рѣшать кубическое уравненіе. Когда же Tartaglia совершенно самостоятельно открылъ способъ рѣшенія кубическаго уравненія, и когда затѣмъ Cardan совершилъ свое извѣстное вѣроломство относительно Tartaglia, опубликовавъ его рѣшеніе и стараясь закрѣпить за собою честь этого открытія, то весьма скоро послѣ этого Ferrari, ученикъ Cardan'a, далъ способъ рѣшенія уравненія четвертой степени. Его открытіе весьма любопытно, какъ первый крупный шагъ на пути развитія анализа отвлеченной количественной зависимости, не имѣющей непосредственнаго геометрическаго значенія, а чисто числовой характеръ.

Начальникъ Кіевскаго техническаго ж. д. училища *Ѳ. Ю. Мацонъ*

(***Продолженіе слѣдуетъ***).

ЗАДАЧИ.

№ 495. Даны два ряда:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1},\ a_n$$

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_{n-1},\ b_n.$$

Между членами этихъ рядовъ существуютъ такія зависимости:

$$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}$$

и

$$b_n=a_{n-1}.$$

Предполагая, что n возрастаетъ до безконечности, и что $a_1>b_1$, $a_2>b_2,\ldots\ldots$ найти предѣлъ дроби $\frac{a_n}{b_n}$.

В. Гиммельфарбъ (Кіевъ).

№ 496. Въ пунктахъ А и В одновременно произведены два одинаковые непрерывно продолжающіеся звука. По мѣрѣ движенія отъ О середины AB къ одному изъ пунктовъ, звукъ ослабляется, исчезаетъ совершенно въ точкѣ C (напр. между O и B) и потомъ усиливается. Зная число звуковыхъ волнъ n, исходящихъ изъ точекъ A и B въ одну секунду и разстояніе $OC=a$, найти скорость звука.

А. Плетневъ (Воронежъ).

№ 497. Найти двузначное число, которое равно удвоенному произведенію изъ цифръ его составляющихъ.

(Заимств.) *Я. Тепляковъ*.

№ 498. Даны двѣ параллельныя прямыя X и Y и между ними двѣ точки A и B. Чрезъ точку A провести прямую такъ, чтобы часть ея, заключенная между параллельными, была видна изъ точки B подъ даннымъ угломъ α. (Заимств.) *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 499. Въ треугольникъ ABC вписана окружность, которая въ точкахъ D, E, F касается его сторонъ; основанія высотъ треугольника DEF служатъ вершинами треугольнику KLM. Доказатя, что площадь треугольника KLM относится къ площади треугольника ABC какъ $r^2:4R^2$, гдѣ r—радіусъ окружности DEF, а R—радіусъ окружности ABC.

А. Гольденбергъ (Спб.)

№ 500. Упростить выраженіе

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Я. Тепляковъ.

Загадки и вопросы.

№ 29. Повидимому нѣтъ никакой разницы: взять-ли въ долгъ 1000 рублей по 6% на 3 мѣсяца, или же 1000 рублей при тѣхъ-же 6% взять на 6 мѣсяцевъ, но уплатить долгъ 3-мя мѣсяцами раньше срока. Между тѣмъ въ первомъ случаѣ пришлось бы уплатить по истеченіи 3-хъ мѣсяцевъ 1015 рублей, а во второмъ, дѣлая математическій учетъ векселю въ 1030 р. по 6% за 3 мѣсяца до срока, пришлось бы уплатить 1014 р. 78 коп. (точнѣе: $1014\frac{158}{203}$р.).—Требуется разъяснить эту разницу. *В. Максимовъ* (Ив.-Вознес.)

№ 30. Объяснить какія удобства и неудобства повлекло бы за собою дѣленіе русскаго торговаго фунта не на 32 лота, а на 25 частей (*дюймоширекъ*), каждая изъ которыхъ дѣлилась бы въ свою очередь на 4 золотника. *III*.

ОТЧЕТЪ

о рѣшеніяхъ задачъ на премію.

На задачу, предложенную въ № 52 „Вѣстника".

„*Рядъ* $x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots$ *составленъ такимъ образомъ, что между каждыми двумя смежными членами существуетъ зависимость:*

$$x_n{}^2+x^2{}_{n+1}+2ax_nx_{n+1}+2b(x_n+x_{n+1})+c=0.$$

Выразить произвольный членъ ряда чрезъ первый и чрезъ коэффиціенты a, b и c."

получено 12 удовлетворительныхъ рѣшеній, а именно отъ гг.: Антаева, Виноградова, Вороного, Кагана, Киселева, Маркова, Мальцева, Никульцева, Свѣшникова, Торопова, Шатуновскаго и отъ г. Ф., пожелавшаго скрывать свою фамилію.

Удостоены преміи рѣшенія гг. **Ф.**, **Маркова** и **Шатуновскаго.**

На задачу, предложенную въ № 53 „Вѣстника":

„*Составить между четырьмя неизвѣстными x, y, z и t двѣ такія зависимости, чтобы три выраженія:*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t},$$

$$\frac{x}{x^2+ax+b}+\frac{y}{y^2+ay+b}+\frac{z}{z^2+az+b}+\frac{t}{t^2+at+b},$$

$$\frac{1}{x^2+ax+b}+\frac{1}{y^2+ay+b}+\frac{1}{z^2+az+b}+\frac{1}{t^2+at+b}$$

обращались въ постоянныя величины. Опредѣлить эти постоянныя величины.

получено только 3 удовлетворительныя рѣшенія, которыя всѣ три и удостоены преміи, отъ гг. **Ф.** (того-же самаго лица, пожелавшаго скрыть свою фамилію), **Шатуновскаго** и **Кагана.**

Рѣшенія неудовлетворительныя—не поименованы.

Рѣшенія обѣихъ задачъ будутъ въ скоромъ времени помѣщены въ журналѣ.

Гг. Ф., Марковъ, Шатуновскій и Каганъ приглашаются извѣстить редакцію въ какомъ видѣ они желаютъ получить свои преміи.

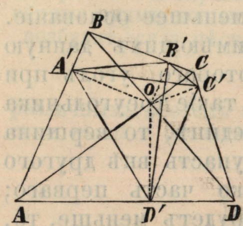
РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

И

№ 343. Точка пересѣченія діагоналей четыреугольника проектирована на всѣ его стороны; зная эти проекціи, требуется построить четыреугольникъ.

На діагонали $A'C'$ четыреугольника $A'B'C'D'$ (фиг. 13), вершинами котораго служатъ данныя проекціи, опишемъ дугу, вмѣщающую уголъ въ $\left(180-\frac{B'-D'}{2}\right)^\circ$, а на діогонали $B'D'$—дугу, вмѣщающую уголъ въ $\left(180-\frac{C'-A'}{2}\right)^\circ$,—въ обоихъ случаяхъ въ сторону меньшаго изъ противолежащихъ угловъ. Точку пересѣченія O дугъ соединимъ съ вершинами даннаго четыреугольника и возставимъ въ этихъ точкахъ перпендикуляры къ полученнымъ линіямъ: это и будутъ стороны искомаго четыреугольника $ABCD$ Остается доказать, что точка O есть пересѣченіе діагоналей AC и BD. Соединимъ вершины $ABCD$ съ точкою O. Тогда

Фиг. 13.



$$\angle BOC=\angle A'OC'-(\angle BOA'+\angle COC') \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Но изъ вписаннаго четыреугольника $OA'BB'$ имѣемъ

$$\angle BOA'=\angle BB'A,$$

а изъ четыреугольника $OB'CC'$:

$$\angle COC'=\angle CB'C'$$

слѣдовательно

$$\angle BOA'+\angle COC'=180^\circ-\angle B',$$

а такъ какъ по построенію

$$\angle A'OC'=180^\circ-\frac{B'+D'}{2},$$

то по (1)

$$\angle BOC=\frac{B'+D'}{2}.$$

Подобнымъ же образомъ докажемъ, что $\angle COD=\frac{A'+C'}{2}$, а слѣдовательно

$$\angle BOC+\angle COD=\frac{1}{2}(A'+B'+C'+D')=180^\circ,$$

т. е. линія BOD прямая. Такимъ же путемъ можно вывести, что и линія AOC—прямая, откуда слѣдуетъ, что точка O есть пересѣченіе діагоналей четыреугольника $ABCD$.

С. Шатуновскій (Кам.-Под.), *С. Блажко* (Москва), *В. Соллертинскій* (Гатчино).

№ 344. Два брата, получивъ въ наслѣдство землю въ видѣ треугольника ABC, пожелали, чтобы избѣжать лишнихъ расходовъ, отдѣлить свои участки заборомъ наименьшей длины. Какое положеніе въ треугольникѣ долженъ имѣть такой заборъ?

a) Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ данное основаніе и уголъ при вершинѣ, равнобедренный имѣетъ наибольшую площадь; потому что геометрическое мѣсто вершинъ такихъ треугольниковъ есть дуга, вмѣщающая данный уголъ, а наибольшая высота дуги въ ея рединѣ.

b) Изъ всѣхъ треугольниковъ имѣющихъ данную площадь и данный уголъ при вершинѣ, равнобедренный имѣетъ наименьшее основанie.

c) Среди же равнобедренныхъ треугольниковъ, имѣющихъ данную площадь, тотъ имѣетъ наименьшее основанie, у котораго уголъ при вершинѣ наименьшiй, потому что если наложить два такie треугольника основанiями такъ, чтобы середина приходилась на рединѣ, то вершина треугольника, имѣющаго большiй уголъ, не можетъ упасть внѣ другого треугольника: иначе послѣднiй составлялъ бы только часть перваго; если же вершина упадетъ внутри, и значитъ высота будетъ меньше, то, по равенству площадей основанie должно быть больше.

На основанiи сказаннаго, линiя кратчайшаго забора должна отдѣлять равнобедренный треугольникъ (a) въ наименьшемъ углѣ (c) даннаго треугольника. Для построенiя ея надо отложить на сторонахъ наименьшаго угла, положимъ A, среднюю пропорцiональную AM=AN между одною изъ сторонъ AB или AC и половиною другой; прямая MN и будетъ искомою, потому что

$$\text{площ.}ABC:\text{площ.}MAN=AB.AC:\frac{AB.AC}{2}=2.$$

В. Соллертинскiй (Гатчино). Ученикъ Тифл. р. уч. *Н. П.*

№ 372. Исключить x, y, z и t изъ уравненiй

$$l=\frac{(t+y)(t+z)}{y-z},$$

$$m=\frac{(t+z)(t+x)}{z-x},$$

$$n=\frac{(t+x)(t+y)}{x-y}.$$

Если возьмемъ выраженiя, соотвѣтствующiя $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ и сложимъ, то

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=0,$$

это и есть требуемый результатъ исключенiя.

Н. Карповъ (Лубны), *Н. Артемьевъ* (Спб.), *В. Соллертинскiй* (Гатчино), *С. Блажко* (Москва). Ученикъ Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*

Запоздалыя рѣшенiя прислали:

С. Блажко (Москва) № 250; *Л. А.* Кiев. р. уч. № 362; Могил. г. (8) *Я. Э.* №№ 349, 370 и 378; Кам.-Под. г. (8) *А. Р.* № 340; Спб. Екат. ц. уч. (7) *В. М.* № 362; 2-й Кiевск. г. (6) *М. А.* № 363.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскiй.

Дозволено цензурою. Кiевъ, 29 Сентября 1889 г.

Типо-литографiя Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

ПРИСЛАНЫ ВЪ РЕДАКЦІЮ:

СБОРНИКЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ

для повторительнаго курса планиметріи

ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНІЕ.

Составилъ

М. Попруженко

преподаватель Михайловскаго Воронежскаго Кадетскаго Корпуса.

Цѣна 45 коп. съ перес. 52 коп.

Воронежъ. 1889.

О РУНДШТУКАХЪ

или

о мѣркахъ для измѣренія количества жидкости въ полной и неполной бочкѣ.

Составилъ **А. МАНУЙЛОВЪ.**

Учитель 1-ой Кишиневской Гимназіи.

2-ое исправленное и дополненное изданіе.

Цѣна **10** коп. съ перес. **13** коп.

Кишиневъ. 1889.

B. GALITZINE. Ueber den Einfluss der Krümmung der Oberfläche einer Flüssigkeit auf die Spannkraft ihres gesättigten Dampfes.

По поводу брошюры г. Волкова: „Логическое исчисленіе“. Сообщеніе **П. С. Порѣцкаго.**

О ПРЕЛОМЛЕНІИ СВѢТОВЫХЪ ЛУЧЕЙ

въ срединахъ, ограниченныхъ какими нибудь поверхностями.

А. П. ГРУЗИНЦЕВА.

Харьковъ. 1889.

Каталогъ русскимъ сочиненіямъ по всѣмъ отраслямъ техники, имѣющимся въ продажѣ въ книжномъ магазинѣ **К. Риккера** въ С.-Петербургѣ. (Изданіе 6-ое, дополненное до 1-го ноября 1888 г.).

Katalog der deutschen, französischen und englischen technischen Litteratur (des Jahres 1888) von CARL RICKER. St.-Petersburg 1889.

БОРИСЪ СЕМЕНОВИЧЪ ЯКОБИ.

Историческій очеркъ изобрѣтенія Гальванопластики

составилъ

А. А. ИЛЬИНЪ.

Съ портретомъ и 8 чертежами. С.-Петербургъ. 1889.

КАТАЛОГЪ ИЗДАНІЙ РЕДАКЦІИ
„ВѢСТНИКА ОП. ФИЗИКИ и ЭЛЕМ. МАТЕМАТИКИ".

№ кат.		Цѣна съ пер.	
1)	Ортоцентрическій треугольникъ. *Н. Шимковича.* 1886 г.	—	15 к.
2)	Ученіе о логариѳмахъ въ нов. излож. *В. Морозова.* 1886 г.	—	15 „
3)	Выводъ формулы для разложенія въ рядъ логариѳмовъ. *Г. Флоринскаго* 1886 г.	—	15 „
4)	Комплектъ 12-ти №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат." (сброшюр. въ книгу) за 1-ое полугодіе $188^6/_7$ учебн. года (I й семестръ)	2 р.	50 „
8)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат." (сброшюр. въ книгу) за 2-ое полугодіе $188^6/_7$ учебн. года (II-й семестръ)	2 „	50 „
9)	О землетрясеніяхъ. *Э. Штачинскаго.* (въ пользу жителей города Вѣрнаго) 1887 г.	—	50 „
10)	Опредѣленіе теплоемкости тѣла по способу смѣшенія при постоянной температурѣ. Пр. *Н. Гезехуса* 1887 г.	—	5 „
11)	Простой способъ опредѣленія высоты плотныхъ кучевыхъ облаковъ *Г. Вульфа.* 1887 г.	—	5 „
12)	Формула простого маятника. Элем. геометрическій и точный выводъ ея. Пр. *Н. Слугинова* 1887 г.	—	5 „
14)	Изъ исторіи ариѳметики. Умноженіе и дѣленіе. *I. Клейбера* 1888 г.	—	20 „
15)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат." (сбошюр. въ книгу) за 1-ое полугодіе $188^7/_8$ учебн. года (III-й семестръ)	2 „	50 „
16)	О формулѣ P=MG, съ прилож. 26 задачъ. Пр. *О. Хвольсона* 1888 г.	—	20 „
17)	Объ обратныхъ изображеніяхъ на сѣтчатой оболочкѣ глаза. *О. Страуса.* 1888 г.	—	5 „
18)	Элементарная теорія гироскоповъ. Пр. *Н. Е. Жуковскаго* 1888 г.	—	20 „
19)	Измѣреніе угла встрѣчи свободной поверхности ртути съ поверхностью стекла. *Г. Вульфа.* 1888 г.	—	5 „
20)	Одинъ изъ видовъ метода подобія. *И. Александрова.* 1888 г.	—	5 „
21)	Рѣшеніе нѣкоторыхъ геометрическихъ вопросовъ изъ теоріи затменій. *I. Клейбера.* 1888 г.	—	20 „
22)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат. (сброшюр. въ книгу) за 2-ое полугодіе $188^7/_8$ учебн. года (IV-й семестръ)	2 „	50 „
23)	Теорія теплоты *К. Максуэлля.* Переводъ *А. Л. Королькова.* 1888 г.	2 „	40 „
24)	Абсолютная скала температуръ. *Н Шиллера.* 1888 г.	—	25 „
25)	О нѣкоторыхъ свойствахъ зажигательной кривой. *Г. Вульфа.* 1888 г.	—	20 „
27)	Теорія вѣтряныхъ двигателей. *Р. Штейнгеля.* 1889 г.	1 „	40 „
28)	Методы рѣшеній ариѳмет. задачъ съ приложеніемъ 80 типичныхъ задачъ. *И. Александрова.* Изд. 3-е. 1889 г.	—	35 „
29)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат." (сброшюр. въ книгу) за 2-ое полугодіе 1888 г. (V-й семестръ)	2 „	50 „
30)	Практ. руководство къ изготовленію электрическихъ приборовъ. *С. Р. Боттона.* Пер. со 2-го англ. изд. *П. Прокшина.* 1889 г.	1 „	40 „
31)	Ариѳметическія начала гармонизаціи. *В. Фабриціуса.* 1889 г.	—	5 „
32)	Что представляютъ собою деформаціонные токи „Брауна"? *П. Бахметьева.* 1889 г.	—	5 „
33)	Лучи электрической силы. *П. Бахметьева* 1889 г.	—	5 „
34)	О гальванопластикѣ. *Н. Успенскаго.* 1889 г.	—	10 „
35)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат." (сброшюр. въ книгу) за 1-ое полугодіе 1889 г. (VI-й семестръ)	2 „	50 „