№№ 78—79.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ,

Издаваемый Э. К. Шпачинскимъ.

РЕКОМЕНДОВАНЪ:

Уч. Ком. Мин. Нар. Просв. для гимназій мужскихъ и женскихъ, реальныхъ училищъ, прогимназій, городскихъ училищъ, учительскихъ институтовъ и семинарій; Гл. Упр. Военно-Учебн. Зав.—для военно-учебныхъ заведеній.

№№ 1–48 ОДОБРЕНЫ

Уч. Ком. при Св. Синодѣ для духовныхъ семинарій и училищъ.

VII Семестра №№ 6-й и 7-й.

Высочайше утверж. Товарищество печатнаго дѣла и торговли И. Н. Кушнеревъ и К°, въ Москвѣ.
Кіевское Отдѣленіе, Бибиковскій бульваръ, домъ № 8-б.
1889.

Содержанie № 78.

Содержанie № 79.

УСЛОВІЯ ПОДПИСКИ НА
„ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ“
СЪ ПЕРЕСЫЛКОЮ:

на годъ—всего 24 №№ . . . . **6** рублей ‖ на полугодіе—всего 12 №№ . . . **3** рубля.

NB. Книжнымъ магазинамъ 5% уступки.

Учителя нач. училищъ и всѣ учащіеся, при непосредственныхъ сношеніяхъ съ редакціей, могутъ подписываться на льготныхъ условіяхъ:

на годъ . . . . . . **4** рубля ‖ на полугодіе . . . . **2** рубля.

Годовая подписка принимается только съ 1-го января, а полугодовая—только на учебные семестры, съ 1-го января и съ 20-го августа.

Допускается разсрочка подписной платы.

Отдѣльные комплекты №№ за истекшіе учебные семестры (I, II, III, IV, V и VI) продаются по 2 р. 50 к., а льготнымъ подписчикамъ и книгопродавцамъ по 2 р. за каждый.

Полный комплектъ всѣхъ 72 №№ журнала, вышедшихъ до 20-го авг. 1889 года, продается подписчикамъ и книгопродавцамъ за 12 рублей.

За перемѣну адреса подписчики уплачиваютъ 10 коп.

При покупкѣ собственныхъ изданій редакціи „Вѣстника“ подписчики пользуются 20% уступки съ цѣны съ пересылкой, объявленной въ каталогѣ изданій.

Условія помѣщенія объявленій
на обертках №№ „Вѣстника Оп. Физ. и Эл. Математики“:

Вся страница—**6** рублей; $^1/_2$ стр.—**3** рубля; $^1/_3$ стр.—**2** рубля; $^1/_4$ стр.—**1** рубъ **50** коп.

При повтореніи объявленій взимается всякій разъ половина этой платы.

Подписчики „Вѣстника“ при помѣщеніи своихъ объявленій пользуются 20% уступки.

Условія сотрудничества:

Всѣ читатели журнала приглашаются быть сотрудниками и корреспондентами.

Сотрудничество не даетъ права на даровой экземпляръ журнала.

Денежнаго гонорара за статьи редакія никому не платитъ.

Редакція не беретъ на себя обязательства обратной пересылки присылаемыхъ авторами рукописей, и на вопросы касательно времени печатанія статей, причинъ ихъ непомѣщенія и пр. всегда отвѣчать не обѣщаетъ.

Чертежи къ статьямъ должны быть возможно простые, тщательно исполненные на отдѣльной бумагѣ (а не въ текстѣ рукописи) и возможно малыхъ размѣровъ.

Авторамъ статей, помѣщенныхъ въ журналѣ, высылается, въ случаѣ если они того пожелаютъ, 5 экз. тѣхъ №№ „Вѣстника“, въ которыхъ статьи напечатаны, или—взамѣнъ этого—25 отдѣльныхъ оттисковъ безплатно. Отдѣльные оттиски въ большемъ количествѣ экземпляровъ могутъ быть заготовлены за счетъ авторовъ, при условіи своевременнаго о томъ извѣщенія редакціи.

Адресъ: Кіевъ, Редакція „Вѣстника Оп. Физ. и Эл. Математики“, Паньковская № 23.

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 79.

VII Сем. 21 Октября 1889 г. № 7.

Среднія величины: ариѳметическая, геометрическая и гармоническая.

(*Окончаніе*) *).

II. Геометрически-гармоническая средняя.

17. Возьмемъ два какія нибудь положительныя числа g и h и пусть $g>h$. Составимъ ихъ геометрическую среднюю g_1 и гармоническую среднюю h_1, при чемъ, какъ было доказано выше, будетъ $g>g_1>h_1>h$. Составимъ снова геометрическую среднюю g_2 и гармоническую среднюю h_2 чиселъ g_1 и h_1 при чемъ будетъ $g>g_1>g_2>h_2>h_1>h$. Будемъ продолжать этотъ процессъ дальше, такимъ образомъ мы получимъ два ряда чиселъ

$$\left.\begin{array}{l} g,\ g_1,\ g_2 \cdots\cdots \\ h,\ h_1,\ h_2 \cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{9}$$

изъ которыхъ первый убывающій, а второй возрастающій и числа перваго ряда всѣ больше чиселъ второго ряда. Очевидно, что эти ряды стремятся каждый къ нѣкоторому предѣлу. Докажемъ, что они стремятся къ одному и тому же предѣлу, и для этого докажемъ, что разности $g-h$, g_1-h_1, g_2-h_2,....., стремятся къ нулю.

18. Въ самомъ дѣлѣ изъ опредѣленій имѣемъ:

$$g_1=\sqrt{gh} \qquad h_1=\frac{2gh}{g+h}$$

слѣдовательно

$$g_1-h_1=\sqrt{gh}.\frac{(\sqrt{g}-\sqrt{h})^2}{g+h}$$

*) См. „Вѣстникъ“ № 78.

или, умножая числителя и знаменателя правой стороны на $(\sqrt{g}+\sqrt{h})^2$

$$g_1-h_1=\frac{\sqrt{gh}(g-h)^2}{(g+h))(\sqrt{g}+\sqrt{h})^2}=\frac{\sqrt{gh}(g-h)^2}{(g+h)(g+h+2\sqrt{gh})}.$$

Откуда

$$\frac{g_1-h_1}{g-h}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{gh}}{2\sqrt{gh}+g+h}\cdot\frac{g-h}{g+h}.$$

Обѣ дроби написанныя въ правой части этого равенства очевидно меньше единицы, ибо

$$2\sqrt{gh}+g+h>2\sqrt{gh}$$

и

$$g+h>g-h;$$

итакъ имѣемъ

$$g_1-h_1<\frac{1}{2}(g-h),$$

точно также

$$g_2-h_2<\frac{1}{2}(g_1-h_1)<\frac{1}{4}(g-h)$$

$$g_3-h_3<\frac{1}{2}(g_2-h_2)<\frac{1}{8}(g-h)$$

. . . .

$$g_n-h_n<\frac{1}{2}(g_{n-1}-h_{n-1})<\frac{1}{2^n}(g-h).$$

Съ увеличенiемъ n разность g_n-h_n уменьшается и стремится къ нулю, ибо 2^n стремится къ ∞.

Итакъ ряды (9) стремятся къ одному и тому-же предѣлу. Предѣлъ этотъ мы назовемъ *геометрически-гармоническою* среднею и означимъ его GH.

19. Примѣръ. Пусть $g=2$, $h=1$. Найти ихъ GH. Вычисленiе по формуламъ

$$g_n=\sqrt{g_{n-1}h_{n-1}} \qquad h_n=\frac{2g_{n-1}\ h_{n-1}}{g_{n-1}+h_{n-1}}$$

даетъ слѣдующiй рядъ значенiй

$g=2.0000000$ $\qquad$ $h=1.0000000$

$g_1=1.4142136$ $\qquad$ $h_1=1.3333333$

$g_2=1.3731778$ $\qquad$ $h_2=1.3725513$

$g_3=1.3728646$ $\qquad$ $h_3=1.3728646.$

. . . . $\qquad$ . . . .

Итакъ

$$GH(2,1)=1,3728646.$$

Какъ видно изъ этого примѣра величины g_n, h_n, быстро сходятся, но мы не будемъ опредѣлять быстроты сходимости этого ряда, чтобы не удлинить слишкомъ этой статьи. Это опредѣленіе можетъ быть сдѣлано изъ разсужденій, аналогичныхъ тѣмъ, которыя были даны въ § 11 въ примѣненіи къ AG.

20. Обратная задача. *Даны два числа g и h; найти такія два другія числа g_{-1} и h_{-1}, чтобы g было геометрическою среднею и h гармоническою среднею этихъ чиселъ.*

Изъ заданія имѣемъ

$$g=\sqrt{g_{-1}\,h_{-1}} \qquad h=\frac{2g_{-1}\,h_{-1}}{g_{-1}+h_{-1}}.$$

Отсюда получаемъ

$$g_{-1}+h_{-1}=\frac{2g^2}{h}$$

$$\sqrt{g_{-1}h_{-1}}=g$$

или

$$g^2_{-1}+2g_{-1}h_{-1}+h^2_{-1}=\frac{4g^4}{h^2}$$

$$4g_{-1}h_{-1}\qquad=4g^2$$

$$g^2_{-1}-2g_{-1}h_{-1}+h^2_{-1}=\frac{4g^2}{h^2}(g^2-h^2)$$

т. е.

$$g_{-1}-h_{-1}=\frac{2g}{h}\sqrt{g^2-h^2}$$

но

$$g_{-1}+h_{-1}=\frac{2g^2}{h}$$

Слѣдовательно

$$g_{-1}=\frac{g}{h}(g+\sqrt{g^2-h^2})$$

$$h_{-1}=\frac{g}{h}(g-\sqrt{g^2-h^2})$$

что и требовалось найти.

21. Примѣръ. Пусть $g=2$, $h=1$

$$g_{-1}=\frac{g}{h}(g+\sqrt{g^2-h^2})=\frac{2}{1}(2+\sqrt{4-1})=2(2+\sqrt{3})=2.3,7320506=7,4641012$$

$$h_{-1}=\frac{g}{h}(g-\sqrt{g^2-h^2})= \qquad = \qquad =2.0,2679494=0,5358988.$$

22. Точно также какъ изъ данныхъ двухъ чиселъ g и h мы получили числа g_{-1} и h_{-1}, мы можемъ получить изъ g_{-1}, h_{-1} два новыя числа g_{-2}, h_{-2} такія, что g_{-1}, h_{-1} будутъ соотвѣтственно геометрическою среднею и гармоническою среднею этихъ новыхъ чиселъ. Продолжая составлять такимъ-же образомъ новыя пары, мы получимъ два ряда чиселъ

$$\begin{cases} g\ g_{-1}\ g_{-2}\ \ldots\ldots\ldots \\ h\ h_{-1}\ h_{-2}\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{10}$$

расходящихся отъ g и h; каждое число перваго ряда больше предъидущаго числа того-же ряда; каждое число второго ряда меньше предъидущаго числа того-же ряда, и числа перваго ряда больше чиселъ второго ряда. Вообще

$$\ldots>g_{-2}>g_{-1}>g>h>h_{-1}>h_{-2}>\ldots$$

23. Примѣръ. Продолжимъ $g=2$, $h=1$ назадъ. Имѣемъ

$$\begin{array}{ll}
g\ \ = 2.0000000 & h\ \ =1.0000000 \\
g_{-1}= 7.4641012 & h_{-1}=0.5358988 \\
g_{-2}=14.9089309 & h_{-2}=0.0192715 \\
g_{-3}=29.8178380 & h_{-3}=0.0000238 \\
g_{-4}=59.6356760 & h_{-4}=0.0000000 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Съ возрастаніемъ n рядъ g приближается къ геометрической прогрессіи со знаменателемъ 2.

Можно было бы доказать, что g_{-n} стремится къ ∞, а h_{-n} къ 0 съ увеличеніемъ n, но мы не будемъ останавливаться на этомъ доказательствѣ, которое слѣдовало бы вести аналогично данному въ § 16 для величинъ a_{-n} и g_{-n}.

III. Ариѳметически-гармоническая средняя.

24. Возьмемъ два какія нибудь положительныя числа a и h и пусть $a>h$. Составимъ ихъ ариѳметическую среднюю a_1 и гармоническую среднюю h_1, при чемъ, какъ было доказано выше $a>a_1>h_1>h$. Составимъ снова ариѳметическую среднюю a_2 и гармоническую среднюю h_2 чиселъ a_1 и h_1, при чемъ будетъ $a>a_1>a_2>h_2>h_1>h$. Будемъ продолжать этомъ процессъ дальше, такимъ образомъ мы получимъ два ряда чиселъ

$$\begin{cases} a\ a_1\ a_2\ \ldots\ldots \\ h\ h_1\ h_2\ldots\ldots \end{cases} \tag{11}$$

изъ которыхъ первый убываетъ, а второй возрастаетъ, и числа перваго ряда всѣ больше чиселъ втораго ряда. Очевидно, что эти ряды стремятся каждый къ нѣкоторому предѣлу. Докажемъ, что они стремятся къ одному и тому-же предѣлу, и для этого докажемъ, что разности $a-h$, a_1-h_1, a_2-h_2...... стремятся къ нулю.

25. Въ самомъ дѣлѣ изъ опредѣленій имѣемъ

$$a_1=\frac{1}{2}(a+h) \qquad h_1=\frac{2ah}{a+h}$$

слѣдовательно

$$a_1-h_1=\frac{a+h}{2}-\frac{2ah}{a+h}=\frac{(a-h)^2}{2(a+h)}$$

или

$$\frac{a_1-h_1}{a-h}<\frac{1}{2}\,\frac{a-h}{a+h}.$$

Но такъ какъ $a+h$ всегда $>a-h$ ибо и a и h величины положительныя, то правая часть написаннаго неравенства $<\frac{1}{2}$ и слѣдовательно

$$a_1-h_1<\frac{1}{2}(a-h);$$

точно также

$$a_2-h_2<\frac{1}{2}(a_1-h_1)<\frac{1}{4}(a-h)$$

$$a_3-h_3<\frac{1}{2}(a_2-h_2)<\frac{1}{8}(a-h)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n-h_n<\frac{1}{2}(a_{n-1}-h_{n-1})<\frac{1}{2^n}(a-h).$$

Съ увеличеніемъ n разность a_n-h_n уменьшается и стремится къ нулю, ибо 2^n стремится къ ∞.

Итакъ ряды (11) стремятся оба къ одному и тому-же предѣлу. Предѣлъ этотъ мы назовемъ *ариѳметически-гармоническою* среднею и означимъ его АН.

26. Примѣръ. Пусть $a=2$, $h=1$. Найти ихъ АН. Вычисленіе по формуламъ:

$$a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+h_{n-1})\qquad h_n=\frac{2a_{n-1}\,h_{n-1}}{a_{n-1}+h_{n-1}}$$

даетъ слѣдующій рядъ значеній

$$\begin{array}{ll}
a=2 & h=1 \\
a_1=\dfrac{3}{2} & h_1=\dfrac{4}{3} \\
a_2=\dfrac{17}{12} & h_2=\dfrac{24}{17} \\
a_3=\dfrac{577}{408} & h_3=\dfrac{816}{577} \\
a_4=\dfrac{665857}{470832} & h_4=\dfrac{941664}{665857}
\end{array}$$

или, въ десятичныхъ дробяхъ

$$\begin{array}{ll}
a=2.0000000 & h=1.0000000 \\
a_1=1.5000000 & h_1=1.3333333 \\
a_2=1.4166666 & h_2=1.4117647 \\
a_3=1.4142157 & h_3=1.4142114 \\
a_4=1.4142136 & h_4=1.4142136 \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots
\end{array}$$

Итакъ

$$\mathrm{AH}(2,1)=1.4142136.$$

Какъ видно изъ приведеннаго примѣра величины a_n и h_n быстро сходятся; но мы и здѣсь не будемъ опредѣлять быстроты сходимости; это опредѣленіе можетъ быть сдѣлано изъ разсужденій аналогичныхъ тѣмъ, которыя были даны въ § 11 въ примѣненіи къ AG.

27. Обратная задача. *Даны два числа a и h. Найти такія два другія числа a_{-1} и h_{-1}, чтобы a было ариѳметическою среднею, а h гармоническою среднею этихъ чиселъ.*

Изъ заданія имѣемъ

$$a=\frac{1}{2}(a_{-1}+h_{-1})\qquad h=\frac{2a_{-1}\,h_{-1}}{a_{-1}+h_{-1}}.$$

Отсюда получаемъ

$$\begin{array}{rl}
a_{-1}+h_{-1} & =2a \\
a_{-1}h_{-1} & =ah \\
a^2_{-1}+2a_{-1}\,h_{-1}+h^2_{-1} & =4a^2 \\
4a_{-1}h_{-1} & =4ah \\
\hline
a^2_{-1}-2a_{-1}\,h_{-1}+h^2_{-1} & =4a(a-h)
\end{array}$$

Итакъ

$$\begin{array}{l} a_{-1}+h_{-1}=2a \\ a_{-1}-h_{-1}=2\sqrt{a(a-h)} \\ \hline a_{-1}=a+\sqrt{a(a-h)} \\ h_{-1}=a-\sqrt{a(a-h)} \end{array}$$

что и требовалось найти.

28. Примѣръ. Пусть $a=2$, $h=1$

$$a_{-1}=a+\sqrt{a(a-h)}=2+\sqrt{2.1}=2+1.4142136=3.4142136$$

$$h_{-1}=a-\sqrt{a(a-h)}=2-\sqrt{2.1}=2-1.4142136=0.5857864.$$

29. Точно также какъ изъ данныхъ двухъ чиселъ a и h мы получили числа a_{-1} и h_{-1}, мы можемъ получить изъ a_{-1} и h_{-1} два новыя числа a_{-2}, h_{-2} такія, что a_{-1}, h_{-1} будутъ соотвѣтственно ариѳметическою среднею и гармоническою среднею этихъ новыхъ чиселъ. Продолжая составлять такимъ-же образомъ новыя пары, мы получимъ два ряда чиселъ

$$\begin{cases} a \; a_{-1} \; a_{-2} \; \ldots\ldots \\ h \; h_{-1} \; h_{-2} \; \ldots\ldots \end{cases}$$

расходящихся отъ a и h; каждое число перваго ряда больше предъидущаго числа того-же ряда, каждое число второго ряда меньше предъидущаго числа того-же ряда, и числа перваго ряда больше чиселъ второго ряда. Вообще

$$\ldots\ldots > a_{-2} > a_{-1} > a > h > h_{-1} > h_{-2} > \ldots\ldots$$

30. Примѣръ. Продолжая рядъ $a=2$, $h=1$ назадъ, имѣемъ:

$$\begin{array}{ll} a\;\;\; = 2.0000000 & h \;\;\;=1.0000000 \\ a_{-1}= 3.4142136 & h_{-1}=0.5857864 \\ a_{-2}= 6.5217611 & h_{-2}=0.3066661 \\ n_{-3}=12.8883214 & h_{-3}=0.1552008 \\ a_{-4}=25.6988066 & h_{-4}=0.0778362 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Съ возрастаніемъ n рядъ a_{-n} приближается къ геометрической прогрессіи со знаменателемъ 2.

Можно было бы и здѣсь доказать, что a_{-n} стремится къ ∞, а h_{-n} къ 0 съ увеличеніемъ n, но мы не будемъ останавливаться на этомъ доказательствѣ, которое слѣдовало бы опять вести аналогично данному въ § 16 для величинъ a_{-n} и g_{-n}.

31. Докажемъ теперь слѣдующую весьма важную теорему.

Теорема. *Ариѳметически-гармоническая средняя двухъ чиселъ есть геометрическая средняя этихъ чиселъ.*

Въ самомъ дѣлѣ мы имѣемъ

$$a_1=\frac{1}{2}(a+h) \qquad h_1=\frac{2ah}{a+h}=\frac{ah}{\frac{1}{2}(a+h)}=\frac{ah}{a_1}$$

$$a_2=\frac{1}{2}(a_1+h_1) \qquad h_2= \qquad\qquad =\frac{a_1h_1}{a_2}$$

. . . .

Отсюда получаемъ

$$ah=a_1h_1=a_2h_2=\ldots\ldots=a_nh_n\ldots.$$

Но мы доказали, что въ предѣлѣ при $n=\infty$, $a_n=h_n$. Пусть эта предѣльная величина есть b, т. е. пусть

$$a\infty=h\infty=b;$$

тогда будетъ

$$ah=a_1h_1=a_2h_2=\ldots\ldots=b^2$$

т. е.

$$b=\sqrt{ah}=\mathrm{G}(a,h)$$

что и требовалось доказать.

32. Отсюда вытекаетъ слѣдующее:

Слѣдствіе. *Ариѳметически-гармоническая средняя изъ какого угодно числа и единицы есть квадратный корень изъ даннаго числа.* Т. е.

$$\mathrm{AH}(a,\ 1)=\sqrt{a}.$$

Такимъ образомъ мы нашли слѣдующій новый способъ вычисленія квадратнаго корня изъ какого угодно числа n.

Чтобы найти $\sqrt{a}$ составимъ ариѳметическую среднюю a_1 изъ a и 1 и гармоническую среднею h_1 изъ a и 1; затѣмъ ариѳметическую и гармоническую среднія a_2, h_2 изъ a_1 и h_1, и т. д. Числа a, a_1, a_2 будутъ представлять рядъ убывающій, числа h, h_1, h_2... рядъ возрастающій и предѣлъ обоихъ рядовъ и есть искомый $\sqrt{a}$.

Какъ было выше показано на примѣрѣ, ряды эти чрезвычайно быстро сходятся, такъ что вычисленіе даетъ быстро большое число знаковъ искомаго корня, и притомъ чѣмъ дальше мы идемъ, тѣмъ быстрѣе идетъ приближеніе.

33. Такъ напр. мы нашли въ § 26, что при $a=1$, $h=1$

$$a_4=\frac{665857}{470832} \qquad h_4=\frac{941664}{665857}.$$

Произведя дѣленіе на самомъ дѣлѣ находимъ

$$a_4=1.414213562374\ldots\ldots$$
$$h_4=1.414213562371\ldots\ldots$$

Итакъ h_4 отличается отъ a_4 только на единицы 12-го десятичнаго знака. Число вѣрныхъ знаковъ въ a_5, h_5 было бы уже вдвое больше, у a_6, h_6 вчетверо больше и т. д. Вообще мы можемъ найти такимъ образомъ посредствомъ сравнительно простыхъ дѣйствій квадратный корень какого угодно числа съ весьма большимъ числомъ десятичныхъ знаковъ.

34. Формулы для вычисленія квадратнаго корня какъ ариѳметически-гармонической средней могутъ быть представлены въ нѣсколько иномъ видѣ, въ которомъ онѣ напоминаютъ способъ непрерывныхъ дробей. Такъ какъ $h_n=\frac{a}{a_n}$, то имѣемъ

$$a_1=\frac{1}{2}(a+1)$$

$$a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{a}{a_1}\right)$$

$$a_3=\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{a}{a_2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{a}{a_{n-1}}\right)$$

35. Разсмотримъ ошибку какого нибудь приближенія для случая a небольше 2.

Ошибка какого нибудь приближенія a_n получится слѣдующимъ образомъ. Изъ опредѣленія имѣемъ

$$a_1-h_1=\frac{1}{2}(a+1)-\frac{2a}{a+1}=\frac{1}{2}\,\frac{(a-1)^2}{(a+1)}$$

откуда

$$a_2-h_2=\frac{1}{2}(a_1+h_1)-\frac{2a_1h_1}{a_1+h_1}=\frac{1}{2}\,\frac{(a_1-h_1)^2}{a_1+h_1}$$

и такъ какъ

$$a_1+h_1>a_2+h_2$$

то

$$a_2-h_2<\frac{1}{2}\,\frac{(a_1-h_1)^2}{a_2+h_2}$$

или

$$a_2{}^2-h_2{}^2<\frac{1}{2}(a_1-h_1)^2<\frac{1}{8}\,\frac{(a-1)^4}{(a+1)^2}$$

далѣе

$$a_3{}^2-h_3{}^2<\frac{1}{2}(a_2-h_2)^2<\frac{1}{16}\,\frac{(a-1)^8}{(a+1)^4}$$

. . . .

$$a_n{}^2-h_n{}^2<\left[\frac{(a-1)^2}{2(a+1)}\right]^{2^{n-1}}$$

$$a_n-h_n<\frac{1}{a_n+h_n}\left[\frac{(a-1)^2}{2(a+1)}\right]^{2^{n-1}}$$

и такъ какъ $a_n>h_n$, то окончательно

$$a_n-h_n<\frac{1}{2h_n}\left(\frac{(a-1)^2}{2(a+1)}\right)^{2^{n-1}}$$

при чемъ вмѣсто h_n можно также взять какое угодно предъидущее приближеніе напр. h_{n-1}, $h_{n-2}, \ldots . h_1$, h.

36. Такъ напр. при $a=2$ имѣемъ

$$a_n-h_n<\frac{1}{2h_n}.\left(\frac{1}{6}\right)^{2^{n-1}}$$

и если взять во второй части неравенства вмѣсто h_n начальное h т. е. 1, то будетъ

$$\text{ошибка } n\text{-го приближенія} <\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2^{n-1}}$$

$$\text{напр. ошибка 5-го приближенія} <\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{16} \text{ т. е. } <\left(\frac{1}{10}\right)^{12}.$$

Итакъ пятое приближеніе точно до 12-го знака.

І. А. Клейберъ (Спб).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Періодъ вращенія солнца. Hornstein и нѣкоторые другіе изъ наблюденій суточныхъ измѣненій барометра вычислили сидерическій періодъ вращенія солнца въ 24,12 сутокъ. Braun и Hornstein изъ наблюденій надъ измѣненіями магнитныхъ элементовъ вывели соотвѣтственно величины 24,18 и 24,51 с.; Carrington изъ наблюденій надъ солнечными пятнами—24,97 с.; Wilsing изъ наблюденій надъ факелами—25,23 с.; наконецъ въ послѣднее время Henry Crew при помощи спектроскопическаго метода получилъ самый большой періодъ въ 26,23 с. Причину такихъ разногласій Crew приписываетъ различію въ угловой скорости вращенія различныхъ слоевъ солнца.—(Nature). *Н. С.*

♦ **Къ предстоящему полному солнечному затменію.** (9-го дек. 1889 г.) Берлинскіе метеорологи Bezold и Zenker предложили воспользоваться предстоящимъ полнымъ затменіемъ для наблюденія явленій зари и зодіакальнаго свѣта. Программа этихъ наблюденій вполнѣ элементарнаго характера. Отъ ея выполненія ожидаютъ важныхъ результатовъ въ особенности для изученія природы зодіакальнаго свѣта. (Nature). *Н. С.*

♦ **Чистота воздуха**. Въ метеорологической обсерваторіи на горѣ Бенъ-Невисъ введены систематическія наблюденія надъ числомъ пылинокъ въ воздухѣ по методѣ проф. Aitken'а *), который недавно самъ посѣтилъ эту обсерваторію и вмѣстѣ съ г. Omond'омъ произвелъ рядъ наблюденій надъ числомъ пылинокъ въ воздухѣ. Результатъ этихъ наблюденій обнаружилъ замѣчательную чистоту воздуха въ этой мѣстности и ежедневное возрастаніе числа пылинокъ въ промежутокъ времени отъ 12 до 3 часовъ дня, когда воздушныя теченія, идущія отъ подошвы горы, достигаютъ обсерваторіи. (Nature). *Н. С.*

♦ **Морскія теченія**. На плавучемъ маякѣ между островами Борнгольмъ и Рюгенъ въ теченіе послѣднихъ 4-хъ лѣтъ производятся наблюденія надъ теченіями Балтійскаго моря. Наблюденія эти приводятъ къ слѣдующимъ любопытнымъ заключеніямъ. Хотя вообще теченія, какъ по направленію такъ и по силѣ и длительности, измѣняются неправильно, но въ большинствѣ случаевъ измѣненія эти обусловливаются господствующими вѣтрами. Число теченій, отклоняющихся отъ направленія вѣтра менѣе чѣмъ на 90°, составляетъ 86% всего числа. Внезапныя перемѣны вѣтра сопровождаются такими-же измѣненіями направленія теченій, причемъ это замѣтно въ первый уже день, не менѣе какъ на глубинѣ 5 метровъ. Полное совпаденіе направленій теченія и вѣтра весьма рѣдко,

*) Пріемъ Эдинбургскаго профессора Джона Эйткена основанъ на томъ фактѣ, что при быстромъ образованіи водяного тумана въ воздухѣ, пересыщенномъ парами, центрами сжиженія служатъ суспенсированныя въ воздухѣ пылинки, и чѣмъ, слѣдовательно, ихъ больше, тѣмъ мельче будутъ водяныя капельки тумана и тѣмъ больше ихъ будетъ образовываться въ данномъ объемѣ. Подробнѣе объ этомъ см. № 44 „Вѣстника", стр. 187 сем. IV. *Прим. ред.*

по большей части теченія отклоняются вправо, что слѣдуетъ приписать дѣйствію вращенія земли. (Nature). *Н. С.*

Вліяніе сильныхъ давленій на гніеніе. Для рѣшенія вопроса о томъ, подвергаются-ли органическіе остатки гніенію, находясь на днѣ моря на большой глубинѣ, гдѣ претерпѣваемое ими давленіе достигаетъ сотенъ атмосферъ, Regnard подвергалъ гніющія вещества давленіямъ отъ 600 до 700 атмосферъ въ теченіе нѣсколькихъ недѣль. Эти опыты показали, что высокія давленія не только предупреждаютъ гніеніе, но и останавливаютъ уже начавшееся разложеніе. Такъ напр. смѣсь яичнаго желтка съ бѣлкомъ подъ давленіемъ въ 700 атм. осталась неизмѣнною, при чемъ бѣлокъ отдѣлился отъ желтка. Подъ такимъ-же давленіемъ мясо, зараженное гніющею кровью, сохранилось по истеченіи 40 дней. Отсюда, впрочемъ, Regnard не заключаетъ еще о невозможности гніенія на значительныхъ глубинахъ моря, ибо весьма возможно существованіе такихъ организмовъ, которые способны переносить значительныя давленія и разлагать органическія тѣла тамъ, гдѣ обыкновенныя микробы существовать не могутъ. *Н. С.*

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

62-ой съѣздъ нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей состоялся въ сентябрѣ текущаго года въ Гейдельбергѣ; помимо научныхъ сообщеній и рѣчей, о которыхъ мы дадимъ впослѣдствіи краткій отчетъ, съѣздъ этотъ замѣчателенъ въ томъ отношеніи, что нѣмецкіе натуралисты и врачи пришли наконецъ къ заключенію о необходимости коренной реформы подобныхъ съѣздовъ, имѣвшихъ до того времени, такъ-же какъ и у насъ, характеръ какихъ то случайныхъ, скорѣе увеселительныхъ чѣмъ научныхъ собраній, то въ одномъ то въ другомъ городѣ, лишенныхъ всякаго административнаго центра и организаціи. Съ настоящаго года Германія, по примѣру Англіи и Франціи, имѣетъ „Общество нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей", ежегодными собраніями котораго замѣнятся прежніе съѣзды. Членами общества могутъ быть только люди, дѣйствительно занимающіеся научными изслѣдованіями; членскій взносъ - 5 марокъ въ годъ.—Для административнаго центра избранъ разъ на всегда городъ Лейпцигъ, хотя ежегодныя собранія общества будутъ происходить въ различныхъ городахъ (напр. въ будущемъ 1890 г. оно назначено, кажется, въ Бременѣ). Члены правленія избираются на одинъ годъ, за исключеніемъ секретаря и казначея, избираемыхъ на трехлѣтіе. Теперь избраны: предсѣдателемъ Гофманъ, вице-предсѣдателемъ Бергманнъ, членами правленія: Герцъ, Викторъ Мейеръ, Квинке, Лейкгартъ, Сименсъ и Вирховъ, секретаремъ Ляссаръ, казначеемъ Лампе-Фишеръ.

Нашимъ съѣздамъ, вѣроятно, придется еще очень долго ждать подобнаго упорядоченія. *Ш.*

„Съѣздъ русскихъ дѣятелей по техническому и профессіональному образованію съ Высочайшаго соизволенія созывается въ С.-Петербургѣ, съ 26-го Декабря сего 1889 г. по 6-ое Января 1890 г. при Императорскомъ Русскомъ Техническомъ Обществѣ.—Цѣль этого съѣзда—выяснить современное положеніе и потребности техническаго и промышленнаго образованія въ Россіи.

„Организаціонный Комитетъ съѣзда обращается къ дѣятелямъ и ревнителямъ техническаго и профессіональнаго образованія съ приглашеніемъ принять участіе въ предстоящемъ съѣздѣ, и тѣмъ оказать содѣйствіе выполненію его цѣли.

„Членами съѣзда могутъ быть всѣ лица, принимающія и принимавшія участіе въ дѣятельности какого либо промышленно-учебнаго заведенія въ качествѣ учредителей, попечителей, начальниковъ, инспекторовъ или преподавателей ихъ,—уполномоченные отъ правительственныхъ и общественныхъ учрежденій, въ програму коихъ входитъ забота о распространеніи техническаго и промышленнаго образованія, заводчики, фабриканты и завѣдывающіе работами въ мастерскихъ, а также постороннія лица, имѣющія отношеніе къ техническому и промышленному дѣлу (см. § 5 Полож.).

„Лица, желающія принять участіе въ съѣздѣ благоволятъ присылать въ Императорское Русское Техническое Общество (Спб. Пантелеймоновская № 2) заявленія съ сообщеніемъ своей фамиліи, имени, отчества, званія, мѣста жительства и рода занятій и вносятъ въ кассу Общества не менѣе 5 рублей. Лица, внесшія не менѣе 100 рублей, получаютъ особое удостовѣреніе и считаются членами-учредителями съѣзда.

„При съѣздѣ устраивается выставка техническихъ и профессіональныхъ школъ, входъ на которую для членовъ съѣзда безплатный.

„Вмѣстѣ съ тѣмъ доводится до свѣдѣнія лицъ, желающихъ принять участіе въ съѣздѣ и живущихъ не въ С.-Петербургѣ, что, по ходатайству Совѣта Техническаго Общества, Правленія Россійскихъ желѣзныхъ дорогъ предоставили г.г. членамъ упомянутаго съѣзда льготы по проѣзду въ С.-Петербургъ и обратно (см. красную обложку настоящаго №). Лица, желающія принять участіе въ съѣздѣ и воспользоваться указанными льготами, благоволятъ обращаться въ Организаціонный Комитетъ съѣзда съ заявленіями, не позже 1-го Декабря. Въ заявленіи должны быть поименованы желѣзныя дороги, по пути слѣдованія въ С.-Петербургъ и приложены: 1) членскій взносъ (см. выше), 2) три 7 коп. почт. марки для отвѣта и для высылки свидѣтельствъ, предъявляемыхъ на станціяхъ, для полученія льготнаго проѣзда.—Положенія и правила съѣзда высылаются желающимъ по присылкѣ 4 коп. марками“.

ЗАДАЧИ.

№ 523. Какъ велика длина секунднаго маятника въ томъ мѣстѣ, гдѣ маятникъ длиною въ 1 метръ дѣлаетъ 239 колебаній въ 4 минуты?

(Заимств.) *Ш.*

№ 524. Прямоугольный треугольникъ ABC перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ вершины прямого угла на гипотенузу, раздѣленъ на два прям. треугольника, въ которые вписаны окружности радіусовъ r и r_1. По даннымъ r и r_1 требуется: 1) вычислить стороны треугольника ABC и 2) построить треугольникъ ABC. *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 525. Исключить ω изъ уравненій:

$$\frac{\operatorname{Cos}(a-3\omega)}{\operatorname{Cos}^3\omega}=\frac{\operatorname{Sin}(a-3\omega)}{\operatorname{Cos}^3\omega}=m.$$

(Заимств.) *Я. Тепляковъ.*

№ 526. Произвольная точка M окружности соединена съ вершинами вписаннаго квадрата. Найти связь между полученными прямыми.

А. Воиновъ (Харьковъ).

№ 527. Рѣшить уравненія

$$x+y+z+t=-a$$

$$x^2+y^2+z^2+t^2=a^2-2b^2$$

$$x^3+y^3+z^3+t^3=2a^3+3ab^2$$

$$x^4+y^4+z^4+t^4=a^4+2b^4.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 528. На сторонѣ AC треугольника ABC намѣчена произвольная точка P, на AB взята точка Q такъ, что AQ=AP, на сторонѣ BC взята точка R такъ, что BR=BQ и на сторонѣ CA взята точка S такъ, что CS=CR; затѣмъ изъ S проведена параллельно PQ прямая, которая встрѣчаетъ въ T сторону AB, изъ T проведена параллельно QR прямая, которая встрѣчаетъ въ U сторону BC. Показать что:

1) точки P, Q, R, S, T и U лежатъ на окружности, центръ которой совпадаетъ съ центромъ вписанной въ треугольникъ окружности;

2) отрѣзки QT, UR, SP равны между собою;

3) средины этихъ отрѣзковъ суть точки касанія вписанной въ треугольникъ окружности съ его сторонами.

(Принять во вниманіе случай, когда точки Q или R будутъ падать на продолженіе сторонъ). *А. Гольденбергъ* (Спб.)

№ 529. Доказать, что дуги, проведенныя изъ вершинъ сферическаго треугольника перпендикулярно къ противоположнымъ сторонамъ, пересѣкаются въ одной точкѣ. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

РѢШЕНІЕ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ НА ПРЕМІЮ,

предложенной въ № 52 „Вѣстника".

Рядъ x, x_1, x_2,...... составленъ такимъ образомъ, что между каждыми двумя смежными членами существуетъ зависимость

$$x_n^2+x^2_{n+1}+2ax_nx_{n+1}+2b(x_n+x_{n+1})+c=0.$$

Выразить произвольный членъ чрезъ первый и чрезъ коэффиціенты a, b и c.

Рѣшеніе. Если положимъ

$$x_n=y_n-\frac{b}{a+1}, \qquad (1)$$

то данная зависимость превратится въ слѣдующую:

$$y_n^2+y^2_{n+1}+2ay_ny_{n+1}+c-\frac{2b^2}{a+1}=0.$$

Уменьшивъ n на единицу, получимъ

$$y_n^2+y^2_{n-1}+2ay_ny_{n-1}+c-\frac{2b^2}{a+1}=0.$$

Предположимъ, что y_{n+1} и y_{n-1} не равны; въ такомъ случаѣ находимъ

$$y_{n+1}=-ay_n+\sqrt{(a^2-1)\,y_n^2-c+\frac{2\,b^2}{a+1}},\tag{2}$$

$$y_{n-1}=-ay_n-\sqrt{(a^2-1)\,y_n^2-c+\frac{2b^2}{a+1}}.$$

Положивъ

$$\sqrt{(a^2-1)\,y_n^2-c+\frac{2b^2}{a+1}}=z_n\sqrt{a^2-1},$$

получимъ

$$y_{n+1}=-ay_n+z_n\sqrt{a^2-1},$$
$$y_{n-1}=-ay_n-z_n\sqrt{a^2-1}.$$

Оставивъ первое уравненіе безъ перемѣны, а во второмъ увеличивъ n на единицу, изъ полученныхъ уравненій находимъ

$$y_{n+1}=-ay_n+z_n\sqrt{a^2-1},$$
$$z_{n+1}=-az_n+y_n\sqrt{a^2-1}.$$

Складывая и вычитая, получаемъ

$$y_{n+1}\pm z_{n+1}=(-a\pm\sqrt{a^2-1})(y_n\pm z_n).$$

Полагая въ этомъ уравненіи $n=0,\ 1,\ 2,\ldots\ldots$, имѣемъ:

$$y_1\pm z_1=(-a\pm\sqrt{a^2-1})(y\pm z),$$
$$y_2\pm z_2=(-a\pm\sqrt{a^2-1})(y_1\pm z_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n\pm z_n=(-a\pm\sqrt{a^2-1})(y_{n-1}\pm z_{n-1}).$$

Перемноживъ эти уравненія, найдемъ по сокращеніи:

$$y_n\pm z_n=(-a\pm\sqrt{a^2-1})^n(y\pm z).$$

Взявъ сначала верхніе знаки, потомъ нижніе, и взявъ полусумму уравненій, получимъ

$$y_n=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2-1})^n(y+z)+\frac{1}{2}(-a-\sqrt{a^2-1})^n(y-z).$$

Далѣе по уравненію (1) найдемъ общее выраженіе для x_n. Въ полученномъ выраженіи остается вмѣсто y и z подставить ихъ значенія изъ уравненій (1) и (3):

$$y=x+\frac{b}{a+1},\quad z=\sqrt{x^2+\frac{2bx}{a+1}+\frac{b^2-c}{a^2-1}}.$$

Рѣшеніе наше не годится, когда $a=\pm1$. Разсмотримъ эти случаи отдѣльно.

Если $a=1$, то уравненія (2) будутъ:

$$y_{n+1}=-y_n+\sqrt{b^2-c},$$

$$y_{n-1}=-y_n-\sqrt{b^2-c}.$$

Изъ этихъ уравненій находимъ:

$$y_1=-y-\sqrt{b^2-c},$$

$$y_2=-y_1+\sqrt{b^2-c},$$

$$y_3=-y_2-\sqrt{b^2-c},$$

$$y_4=-y_3+\sqrt{b^2-c},$$

. . . .

Далѣе

$$y_1=-y-\sqrt{b^2-c},$$

$$y_2=\ \ y+2\sqrt{b^2-c},$$

$$y_3=-y-3\sqrt{b^2-c},$$

. . . .

Вообще

$$y_n=(-1)^n(y+n\sqrt{b^2-c}).$$

Выразивъ по уравненію (1) y чрезъ x, найдемъ

$$x_n=-\frac{b}{a+1}+(-1)^n\left(x+\frac{b}{a+1}+n\sqrt{b^2-c}\right).$$

При $a=-1$ данная зависимость будетъ

$$(x_{n+1}-x_n)^2+2b(x_{n+1}+x_n)+c=0.$$

Измѣнивъ n въ $n-1$, получимъ

$$(x_{n-1}-x_n)^2+2b(x_{n-1}+x_n)+c=0.$$

Рѣшивъ эти уравненія и положивъ, что x_{n+1} и x_{n-1} не равны, найдемъ

$$x_{n+1}=x_n-b+\sqrt{b^2-c-4bx_n},$$

$$x_{n-1}=x_n-b-\sqrt{b^2-c-4bx_n}.$$

Измѣнивъ въ первомъ уравненіи n въ $n-1$ и положивъ для краткости

$$\sqrt{b^2-c-4bx_n}=z_n,$$

получимъ

$$x_n=x_{n-1}-b+z_{n-1},$$

$$x_{n-1}=x_n-b-z_n.$$

Изъ этихъ уравненій находимъ

$$z_n=z_{n-1}-2b.$$

Полагая здѣсь $n=1, 2, 3, \ldots\ldots$, имѣемъ

$$z_1=z-2b,$$

$$z_2=z_1-2b,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$z_n=z_{n-1}-2b.$$

Складывая, находимъ

$$z_n=z-2bn.$$

Подставимъ вмѣсто z его выраженіе чрезъ x, получимъ

$$\sqrt{b^2-c-4bx_n}=\sqrt{b^2-c-4bx}-2bn.$$

Отсюда

$$x_n=x+n\sqrt{b^2-c-4bx}-bn^2.$$

Примѣчаніе. Остается разсмотрѣть случай, когда $x_{n+1}=x_{n-1}$. Но этотъ случай получается изъ разсмотрѣннаго нами случая, когда въ ряду

$$\ldots\ldots x_{n-1},\ x_n,\ x_{n+1},\ldots\ldots$$

между x_n и x_{n+1} вставимъ x_{n-1}, x_n,

$$\ldots\ldots x_{n-1},\ x_n,\ x_{n-1},\ x_n,\ x_{n+1},\ \ldots\ldots$$

или же между x_{n-1} и x_n вставимъ x_n, x_{n+1},

$$\ldots x_{n-1},\ x_n,\ x_{n+1},\ x_n,\ x_{n+1},\ldots$$

Вообще свойства нашего ряда $x, x_1, x_2, x_3,\ldots$ не измѣнятся, если мы между каждыми двумя членами вставимъ два члена, стоящіе справа или слѣва.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 373. Показать, что отношеніе меньшаго отрѣзка къ большему отрѣзку прямой, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, выражается суммою дробей.

$$\frac{1}{2}+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\ldots\ldots}}}}$$

Если a меньшій отрѣзокъ, а b большій, то

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a+b}=\frac{1}{1+\frac{a}{b}},$$

Отсюда, полагая $\frac{a}{b}=x$, имѣемъ

$$x^2+x-1=0.$$

Отбросивъ отрицательный корень, получимъ

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Но

$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots\ldots\ldots}}}$$

слѣдовательно

$$\frac{\sqrt{5}}{2}=1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\ldots\ldots}}}}$$

и значитъ

$$x=\frac{1}{2}+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\ldots\ldots}}}}$$

М. Сухановъ (Ст. Усть-Медв.), *В. Соллертинскій* (Гатчино), *С. Кричевскій* (Харьковъ). Ученики: Кам.-Под. г. (7) *А. Р.*, Ворон. к. к. (6) *Н. В.*, 1-й Кіевск. г. (8) *В. Б.*

№ 385. При какомъ условіи выраженіе

$$x^2+y^2+z^2+t^2$$

имѣетъ minimum, если перемѣнныя всегда удовлетворяютъ равенству

$$mx+ny+pz+qt=A,$$

гдѣ m, n, p, q и A нѣкоторыя постоянныя количества, отличныя отъ нуля.

Minimum для $x^2+y^2+z^2+t^2$ не измѣнится, если мы умножимъ или раздѣлимъ это выраженіе на какое нибудь постоянное количество. Умножимъ его на

$$m^2+n^2+p^2+q^2.$$

Полученное произведеніе, какъ извѣстно, разлагается на сумму семи полныхъ квадратовъ (тожество Лагранжа), а именно:

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)(m^2+n^2+p^2+q^2)=(mx+ny+pz+qt)^2+(my-nx)^2+$$
$$+(nz-py)^2+(pt-qz)^2+(qx-mt)^2+(mz-px)^2+(nt-qy)^2,$$

но, по условію,

$$mx+ny+pz+qt=A=\text{постоян.};$$

а потому, очевидно, что minimum этого выраженія будетъ въ томъ случаѣ, когда каждый изъ остальныхъ шести квадратовъ равенъ нулю, т. е.

$$my-nx=0,$$
$$nz-py=0,$$
$$pt-qz=0,$$
$$qx-mt=0,$$
$$mz-px=0,$$
$$nt-qy=0.$$

Отсюда видимъ, что minimum будетъ въ томъ случаѣ, когда

$$x:y:z:t=m:n:p:q,$$

или:

$$x:m=y:n=z:p=t:q.$$

С. Блажко (Москва).

№ 388. Рѣшить уравненія

$$xy+a(x+y)=m,$$
$$yz+a(y+z)=n,$$
$$xz+a(x+z)=p.$$

Исключая изъ двухъ послѣднихъ уравненій z, опредѣлимъ y въ функціи x. Именно

$$y=\frac{(a^2+n)x+a(n-p)}{a^2+p},$$

а подставивъ теперь это значеніе вмѣсто y въ уравненіе первое, найдемъ, что

$$x=-a\pm\sqrt{\frac{(a^2+m)(a^2+p)}{a^2+n}}.$$

Дальнѣйшій ходъ рѣшенія очевиденъ.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *В. Соллертинскій* (Гатчино). Ученики: Кіевск. р. уч. (7) *А. М.*, Курск. г. (6) *В. Х.*, Кам.-Под. г. (6) *Я. М.*

№ 409. Медіана AD треугольника ABC раздѣлена въ точкѣ O въ отношеніи $m:n$. Прямыя BO и CO продолжены до пересѣченія со сторонами треугольника въ точкахъ P и Q. Опредѣлить длину прямой PQ.

Отложивъ на продолженіи AD часть DE=OD, найдемъ, по параллельности CE и PB, BE и QC:

$$AP:AC=AO:AE \text{ и } AO:AE=AQ:AB,$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$BC \parallel QP.$$

Тогда

$$QP:BC=AP:AC=\frac{m}{m+2n},$$

слѣдовательно

$$PQ=BC.\frac{m}{m+2n}.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 8 Ноября 1889 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА 1890 Г.

НА ЕЖЕНЕДѢЛЬНУЮ ГАЗЕТУ

„ЗЕМСКІЙ ВРАЧЪ"

ИЗДАНІЕ ПОСВЯЩЕННОЕ ВОПРОСАМЪ ЗЕМСКОЙ МЕДИЦИНЫ.

Выходитъ въ г. Черниговѣ съ 1 іюля 1888 г. въ объемѣ отъ 1 до 2 печатныхъ листовъ въ недѣлю по слѣдующей программѣ:

1) Руководящія статьи по общимъ вопросамъ земской медицины; статьи по медицинской статистикѣ и медико-топографическіе очерки. Фабричная медицина.
2) Оригинальныя и переводныя статьи по гигіенѣ и профилактикѣ. Казуистика.
3) Популярныя статьи (въ видѣ приложеній) по вопросамъ гигіены и профилактики.
4) Рефераты, хроника, смѣсь.
5) Корреспонденціи. Отчеты о врачебныхъ съѣздахъ.
6) Объявленія.

Подписная цѣна съ доставкой и пересылкой въ годъ: **9** р. (для фельдшеровъ, фельдшерицъ и акушерокъ—**6** р.). На полгода—**4** р. **50** к. (для фельдшеровъ, фельдшерицъ и акушерокъ—**3** р.).

Подписка принимается: г. Черниговъ, Евгенію Владиміровичу Святловскому.

1—3. Редакторъ-Издатель Д-ръ *Е. Святловскій.*

ПОДПИСКА НА 1890 ГОДЪ.

„ЗАПИСКИ"

Кіевскаго Отдѣленія Императорск. Русскаго Техническ. Общества.

ПО СВЕКЛОСАХАРНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ.

Програма **„Записокъ"**, протоколы общихъ собраній Отдѣленія, засѣданій Совѣта Отдѣленія и назначаемыхъ Отдѣл. коммиссій, правительственныя распоряженія, оригинальныя изслѣдованія, разныя статьи, замѣтки, извѣстія и корреспонденціи, касающіяся разныхъ сторонъ свеклосахарной промышленности; обзоръ литературы по тому же предмету. Кромѣ того, въ „Запискахъ" будутъ печататься **статистическія свѣдѣнія** о свеклосахарной промышленности въ Россіи, составляемыя по отчетамъ, обязательно доставляемымъ въ Департаментъ Неокладныхъ Сборовъ.

„Записки" выходятъ **два раза въ мѣсяцъ, 24 выпуска въ годъ.**

Подписная цѣна „Записокъ" для подписчиковъ внутри и внѣ Россіи **10 рублей въ годъ,** а для гг. членовъ Отдѣленія—5 рублей.

Подписка принимается въ **Бюро Кіевскаго Отдѣленія Императорскаго Русскаго Техническаго Общества,** Кіевъ, Крещатикъ, д. № 40, Барскаго.

Объявленія принимаются на **слѣдующихъ** условіяхъ:

	За каждую строку или ея мѣсто до 16 строкъ	более 16 строкъ
За одинъ разъ	15 коп. . .	10 коп.
За каждый разъ свыше одного	$7^1/_2$ „ . .	5 „

За разсылку при **„Запискахъ"** печатныхъ объявленій, рекламъ и т. п., которыя будутъ доставлены въ Бюро, взимается за одинъ разъ, съ каждаго лота по 6 руб.

Гг. подписчики и члены Отдѣленія, извѣщая Бюро о своихъ адресахъ, благоволятъ обозначать точно: имя, отчество и фамилію, также то почтовое мѣсто (съ указаніемъ губерніи и уѣзда), чрезъ которое желаютъ получать „Записки". 1—3.

КАТАЛОГЪ ИЗДАНІЙ РЕДАКЦІИ
„ВѢСТНИКА ОП. ФИЗИКИ и ЭЛЕМ. МАТЕМАТИКИ“.

№ кат.		Цѣна съ пер.
1)	Ортоцентрическій треугольникъ. *Н. Шимковича.* 1886 г.	— 15 к.
2)	Ученіе о логариѳмахъ въ нов. излож. *В. Морозова.* 1886 г. . . .	— 15 „
3)	Выводъ формулы для разложенія въ рядъ логариѳмовъ. *Г. Флоринскаго* 1886 г.	— 15 „
4)	Комплектъ 12-ти №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ (сброшюр. въ книгу) за 1-ое полугодіе 188⁶/₇ учебн. года (I-й семестръ)	2 р. 50 „
8)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ (сброшюр. въ книгу) за 2-ое полугодіе 188⁶/₇ учебн. года (II-й семестръ)	2 „ 50 „
9)	О землетрясеніяхъ. *Э. Шпачинскаго.* (въ пользу жителей города Вѣрнаго) 1887 г.	— 50 „
10)	Опредѣленіе теплоемкости тѣла по способу смѣшенія при постоянной температурѣ. Пр. *Н. Гезехуса* 1887 г.	— 5 „
11)	Простой способъ опредѣленія высоты плотныхъ кучевыхъ облаковъ *Г. Вульфа.* 1887 г.	— 5 „
12)	Формула простого маятника. Элем. геометрическій и точный выводъ ея. Пр. *Н. Слугинова.* 1887 г.	— 5 „
14)	Изъ исторіи ариѳметики. Умноженіе и дѣленіе. *I. Клейбера* 1888 г.	— 20 „
15)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ (сбошюр. въ книгу) за 1-ое полугодіе 188⁷/₈ учебн. года (III-й семестръ)	2 „ 50 „
16)	О формулѣ $P=MG$, съ прилож. 26 задачъ. Пр. *О. Хвольсона.* 1888 г.	— 20 „
17)	Объ обратныхъ изображеніяхъ на сѣтчатой оболочкѣ глаза. *О. Страуса.* 1888 г.	— 5 „
18)	Элементарная теорія гироскоповъ. Пр. *Н. Е. Жуковскаго* 1888 г.	— 20 „
19)	Измѣреніе угла встрѣчи свободной поверхности ртути съ поверхностью стекла. *Г. Вульфа.* 1888 г.	— 5 „
20)	Одинъ изъ видовъ метода подобія. *И. Александрова.* 1888 г. . .	— 5 „
21)	Рѣшеніе нѣкоторыхъ геометрическихъ вопросовъ изъ теоріи затменій. *I. Клейбера.* 1888 г.	— 20 „
22)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат. (сброшюр. въ книгу) за 2-ое полугодіе 188⁷/₈ учебн. года (IV-й семестръ)	2 „ 50 „
23)	Теорія теплоты *К. Максуэлля.* Переводъ *А. Л. Королькова.* 1888 г.	2 „ 40 „
24)	Абсолютная скала температуръ. *Н Шиллера.* 1888 г.	— 25 „
25)	О нѣкоторыхъ свойствахъ зажигательной кривой. *Г. Вульфа.* 1888 г.	— 20 „
27)	Теорія вѣтряныхъ двигателей. *Р. Штейнгеля.* 1889 г.	1 „ 40 „
28)	Методы рѣшеній ариѳмет. задачъ съ приложеніемъ 80 типичныхъ задачъ. *И. Александрова.* Изд. 3-е. 1889 г.	— 35 „
29)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ (сброшюр. въ книгу) за 2-ое полугодіе 1888 г. (V-й семестръ)	2 „ 50 „
30)	Практ. руководство къ изготовленію электрическихъ приборовъ. *С. Р. Боттона.* Пер. со 2-го англ. изд. *П. Прокшина.* 1889 г. . .	1 „ 40 „
31)	Ариѳметическія начала гармонизаціи. *В. Фабриціуса.* 1889 г. . .	— 5 „
32)	Что представляютъ собою деформаціонные токи „Брауна“? *П. Бахметьева.* 1889 г.	— 5 „
33)	Лучи электрической силы. *П. Бахметьева* 1889 г.	— 5 „
34)	О гальванопластикѣ. *Н. Успенскаго.* 1889 г.	— 10 „
35)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ (сброшюр. въ книгу) за 1-ое полугодіе 1889 г. (VI-й семестръ)	2 „ 50 „