Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 90.

VIII Сем. 5 Марта 1890 г. № 6.

ОДНОЗНАЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНІЕ ФИГУРЪ

при помощи мнимыхъ чиселъ.

Отвѣтъ на тему, предложенную въ „Вѣстникѣ“ № 62.

Дѣйствительнымъ числомъ называется всякое число, цѣлое или дробное, соизмѣримое или несоизмѣримое, положительное или отрицательное. Мнимымъ числомъ называется выраженіе вида $m+n\sqrt{-1}$, гдѣ подъ m и n разумѣются дѣйствительныя числа. Число m называется дѣйствительною частью мнимаго числа, а $n\sqrt{-1}$—мнимою частью.

Надъ мнимыми числами производятъ тѣ-же дѣйствія, какія и надъ дѣйствительными числами.

При сложеніи и вычитаніи мнимыхъ чиселъ дѣйствія производятъ отдѣльно надъ дѣйствительными частями ихъ и надъ коэффиціентами при $\sqrt{-1}$.

Если два мнимыя числа $m+n\sqrt{-1}$ и $m'+n'\sqrt{-1}$ равны, то непремѣнно и дѣйствительныя ихъ части m и m' равны, а также и коэффиціенты при $\sqrt{-1}$.

Умноженіе мнимыхъ чиселъ производится такъ-же, какъ и умноженіе двучленовъ, только при соблюденіи условія: $(\sqrt{-1})^2=-1$.

Частное отъ раздѣленія мнимаго числа $m+n\sqrt{-1}$ на мнимое число $m'+n'\sqrt{-1}$ можетъ быть представлено въ видѣ

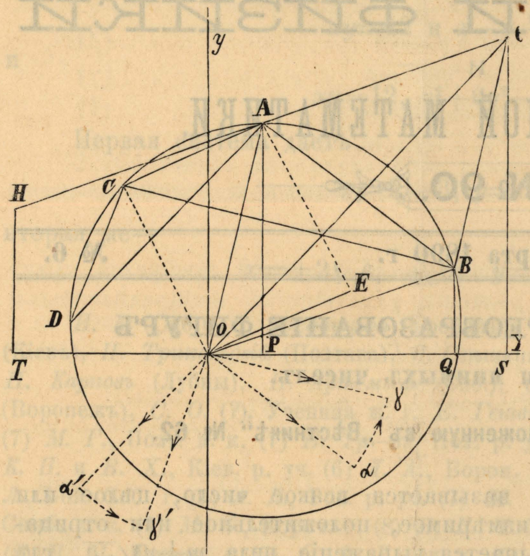
$$\frac{mm'+nn'}{m'^2+n'^2}+\frac{nm'-mn'}{m'^2+n'^2}\sqrt{-1}.$$

Два мнимыя числа называются сопряженными, если дѣйствительныя ихъ части равны, а мнимыя части отличаются только знаками, напримѣръ $m+n\sqrt{-1}$ и $m-n\sqrt{-1}$. Сумма и произведеніе сопряженныхъ мнимыхъ чиселъ представляютъ дѣйствительныя числа.

Разсмотримъ нѣкоторыя свойства мнимыхъ чиселъ.

1. Мнимое число на плоскости можетъ быть выражено точкою. (Фиг. 18). Для этого проводимъ двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя OX и OY, пересѣкающіяся въ точкѣ O. На прямой OX откладываемъ длину OP равную m единицамъ длины вправо отъ O, если m число положительное, и влѣво отъ O, если m число отрицательное. Изъ точки P возстановляемъ перпендикуляръ къ прямой OX и отклады-

Фиг. 18.



ваемъ на немъ длину PA равную n единицамъ длины кверху отъ OX, если n число положительное, и книзу отъ OX, если n число отрицательное. Говорятъ, что точка A выражаетъ мнимое число $m+n\sqrt{-1}$. Каждому мнимому числу соотвѣтствуетъ одна точка на плоскости и обратно. Обыкновенно, для краткости, подъ буквой A разумѣютъ не только точку A, но и самое мнимое число $m+n\sqrt{-1}$. Чтобы отличить произведенiе AB двухъ мнимыхъ чиселъ A и B отъ разстоянiя AB между двумя точками A и B, разстоянiе AB пишется съ чертой наверху: $\overline{AB}$.

Точка O называется началомъ, прямая OX дѣйствительною осью и прямая OY мнимою осью. Прямая OA называется векторомъ точки A.

Два сопряженныя мнимыя числа изображаются на плоскости двумя точками, лежащими на прямой перпендикулярной къ дѣйствительной оси OX и находящимися на одинаковыхъ разстоянiяхъ отъ нея.

Дѣйствительное число выражается точкою на дѣйствительной оси.

2. Всякое мнимое число $A=m+n\sqrt{-1}$ можетъ быть представлено въ видѣ $r(\text{Cos}\varphi+\text{Sin}\varphi\sqrt{-1})$. Для этого полагаемъ $m=r\text{Cos}\varphi$, $n=r\text{Sin}\varphi$.

Возводя оба равенства въ квадратъ и складывая ихъ, находимъ

$$m^2+n^2=r^2 \text{ и } r=\sqrt{m^2+n^2}.$$

Здѣсь квадратный корень берется со знакомъ $+$. Послѣ этого находимъ

$$\text{Cos}\varphi=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}},\ \text{Sin}\varphi=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Знаки при m и n укажутъ, въ какой четверти оканчивается дуга, измѣряющая уголъ φ.

Число r называется модулемъ мнимаго числа $m+n\sqrt{-1}$, а φ называется его аргументомъ.

Обращаемся къ фиг. 18. Такъ какъ

$$\overline{OA}=\sqrt{\overline{OP}^2+\overline{PA}^2}=\sqrt{m^2+n^2} \text{ и } r=\sqrt{m^2+n^2},$$

то $\overline{OA}=r$, т. е. прямая $\overline{OA}$, или векторъ точки A, выражаетъ модуль мнимаго числа A. Такъ какъ

$$\text{Cos}\angle AOX=\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=\frac{m}{r},\ \text{Sin}\angle AOX=\frac{\overline{PA}}{\overline{OA}}=\frac{n}{r}$$

и $\quad \text{Cos}\varphi=\frac{m}{r},\ \text{Sin}\varphi=\frac{n}{r}$, то $\angle AOX=\varphi$,

т. е. уголъ между векторомъ точки A и дѣйствительною осью выражаетъ аргументъ мнимаго числа A *).

3. Покажемъ, какъ опредѣляются модуль и аргументъ суммы, разности, произведенія и отношенія двухъ мнимыхъ чиселъ. Полагаемъ

$$A=m+n\sqrt{-1}=r(\text{Cos}\varphi+\text{Sin}\varphi\sqrt{-1}),$$
$$B=m'+n'\sqrt{-1}=r'(\text{Cos}\varphi'+\text{Sin}\varphi'\sqrt{-1})$$

и выражаемъ оба эти мнимыя числа точками A и B.

Составимъ сумму мнимыхъ чиселъ A и B.

$$A+B=(m+m')+(n+n')\sqrt{-1}.$$

Строимъ параллелограммъ OAGB на векторахъ OA и OB точекъ A и B и проводимъ діагональ OG. Точка G будетъ выражать мнимое число A+B. Для доказательства опускаемъ изъ точекъ A, B, G перпендикуляры AP, BQ, GS на дѣйствительную ось OX. Такъ какъ прямыя OB и AG равны, параллельны и направлены въ одну сторону, то отрѣзки OQ и PS также равны и одинаково направлены. Поэтому отрѣзокъ OS равенъ алгебраической суммѣ отрѣзковъ OP и OQ, т. е.

$$\overline{OS}=\overline{OP}+\overline{OQ}=m+m'.$$

Точно также, опуская изъ точекъ A, B, G перпендикуляры на мнимую ось, докажемъ, что $\overline{SG}=n+n'$.

Такимъ образомъ сумма двухъ мнимыхъ чиселъ выражается на плоскости вершиною параллелограмма, построеннаго на векторахъ точекъ, выражающихъ эти мнимыя числа.

Чтобы выразить на плоскости разность мнимыхъ чиселъ A и B, мы должны построить такой параллелограммъ, чтобы векторъ OA былъ его діагональю и векторъ OB стороной. Для этого изъ начала O проводимъ прямую параллельную BA и изъ точки A прямую параллельную OB. Эти прямыя пересѣкаются въ точкѣ H. Такъ какъ точка A выражаетъ сумму мнимыхъ чиселъ B и H, выраженныхъ точками B и H, то точка H должна выражать разность мнимыхъ чиселъ A и B.

Если разность мнимыхъ чиселъ A и B есть дѣйствительное число, то точки A и B должны находиться на прямой параллельной дѣйствительной оси, а точка H на дѣйствительной оси.

Векторъ OH точки H по величинѣ и по направленію равенъ прямой BA.

Такъ какъ

$$H=A-B=(m-m')+(n-n')\sqrt{-1},$$

то

$$\overline{OH}=\overline{BA}=\sqrt{(m-m')^2+(n-n')^2},$$

*) Аргументъ отсчитывается отъ дѣйствительной оси въ сторону противоположную движенію часовой стрѣлки отъ 0^0 до 360^0.

По этой формулѣ можно опредѣлить разстояніе между точками A и B, выражающими мнимыя числа A и B.

Составимъ произведеніе мнимыхъ чиселъ A и B.

$$AB=rr'[(\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Cos}\varphi'-\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Sin}\varphi')+(\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Sin}\varphi'+\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Cos}\varphi')\sqrt{-1}]$$

$$AB=rr'[\mathrm{Cos}(\varphi+\varphi')+\mathrm{Sin}(\varphi+\varphi')\sqrt{-1}].$$

Такимъ образомъ модуль произведенія мнимыхъ чиселъ равенъ произведенію ихъ модулей, а аргументъ произведенія равенъ суммѣ аргументовъ производителей.

Не трудно распространить эту теорему на произведеніе нѣсколькихъ мнимыхъ чиселъ.

Такъ какъ дѣленіе есть дѣйствіе обратное умноженію, то модуль отношенія мнимыхъ чиселъ равенъ отношенію ихъ модулей и аргументъ отношенія равенъ разности аргументовъ дѣлимаго и дѣлителя. Слѣд., отношеніе A:B можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{A}{B}=\rho(\mathrm{Cos}\psi+\mathrm{Sin}\psi\sqrt{-1}),$$

гдѣ ρ есть $\frac{r}{r'}$ или $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ и ψ есть $\varphi-\varphi'$ или $\angle BOA$, т. е. уголъ, на которой надо повернуть OB до совпаденія съ OA. При этомъ положительное вращеніе считается противоположно движенію часовой стрѣлки.

4. Составимъ отношеніе $\frac{A-C}{A-B}$, гдѣ A, B, C обозначаютъ мнимыя числа, выраженныя точками A, B, C.

A—C, по предыдущему, изображается точкою E, векторъ которой OE равенъ по величинѣ и по направленію прямой CA, направленной отъ C къ A. Точно также разность A—B выражается точкою H, векторъ которой OH равенъ по величинѣ и по направленію прямой BA, направленной отъ B къ A. Стало быть, по нашимъ обозначеніямъ, $\frac{A-C}{A-B}=\frac{E}{H}$. Модуль этого отношенія равенъ $\frac{\overline{OE}}{\overline{OH}}$ или $\frac{\overline{CA}}{\overline{BA}}$, а аргументъ его равенъ углу HOE, на который надо повернуть направленіе BA до совпаденія съ направленіемъ CA. Полагая $\frac{\overline{CA}}{\overline{BA}}=\rho$ и $\angle HOE=\psi$, находимъ

$$\frac{A-C}{A-B}=\rho(\mathrm{Cos}\psi+\mathrm{Sin}\psi\sqrt{-1}).$$

Если три точки A, B, C расположены на одной прямой, то уголъ ψ обращается въ 0 или въ π и

$$\frac{A-C}{A-B}=\pm\frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} \text{ или } \frac{A-C}{\overline{CA}}=\pm\frac{A-B}{\overline{BA}},$$

смотря по положенію точки A. Знакъ — относится къ тому случаю, когда точка A расположена между B и C.

5. Для дальнѣйшаго изслѣдованія свойствъ мнимыхъ чиселъ докажемъ слѣдующую теорему. Если на хордѣ CA построимъ какой-нибудь

сегментъ и на его окружности возьмемъ точку B, то отношеніе $\overline{BC}:\overline{BA}$ возрастаетъ, если B удаляется отъ C, т. е. если дуга BC возрастаетъ.

Для доказательствъ дополняемъ дугу сегмента до полной окружности и соединяемъ точку B съ серединою второй дуги CA. Эта прямая раздѣлитъ уголъ CBA пополамъ, а хорду CA на части, относящіяся какъ $\overline{BC}:\overline{BA}$. При удаленіи точки B отъ C точка пересѣченія равнодѣлящей угла CBA и хорды CA будетъ удаляться отъ C, такъ какъ равнодѣлящая угла CBA будетъ постоянно проходить черезъ средину второй дуги CA. Слѣдов., отношеніе $\overline{BC}:\overline{BA}$ должно увеличиваться.

6. Составимъ сложное отношеніе

$$\frac{B-C}{B-A}:\frac{D-C}{D-A},$$

гдѣ A, B, C, D обозначаютъ мнимыя числа, выраженыя точками A, B, C, D.

$$\frac{B-C}{B-A}=r(\operatorname{Cos}\varphi+\operatorname{Sin}\varphi\sqrt{-1}),$$

гдѣ $r=\frac{\overline{CB}}{\overline{BA}}$ и φ есть уголъ ABC между направленіями AB и CB, на который надъ повернутъ AB до совпаденія съ CB. Точно также

$$\frac{D-C}{D-A}=r'(\operatorname{Cos}\varphi'+\operatorname{Sin}\varphi'\sqrt{-1}),$$

гдѣ

$$r'=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \text{ и } \varphi'=\angle ADC.$$

Стало быть,

$$\frac{B-C}{B-A}:\frac{D-C}{D-A}=\frac{r}{r'}[\operatorname{Cos}(\varphi-\varphi')+\operatorname{Sin}(\varphi-\varphi')\sqrt{-1}].$$

Полагая

$$\rho=\frac{r}{r'}=\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}:\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}},\ \psi=\varphi-\varphi'=\angle ABC-\angle ADC,$$

находимъ

$$\frac{B-C}{B-A}:\frac{D-C}{D-A}=\rho(\operatorname{Cos}\psi+\operatorname{Sin}\psi\sqrt{-1}).$$

Изъ этой формулы мы выведемъ нѣсколько важныхъ слѣдствій.

Положимъ, что точки A, B, C, D находятся на одной окружности.

Если точки B и D расположены съ одной стороны хорды CA, углы ABC и ADC равны. Значитъ уголъ ψ равенъ 0 и

$$\frac{B-C}{B-A}:\frac{D-C}{D-A}=\rho.$$

Если точки B и D расположены съ разныхъ сторонъ хорды CA, разность между углами ABC и ADC составляетъ два прямыхъ угла. Поэтому

$$\frac{B-C}{B-A}:\frac{D-C}{D-A}=-\rho.$$

Для уясненія слѣдуетъ изъ начала O провести прямыя $O\alpha$, $O\gamma$, $O\alpha'$, $O\gamma'$, направленныя также какъ прямыя AB, CB, AD, CD.

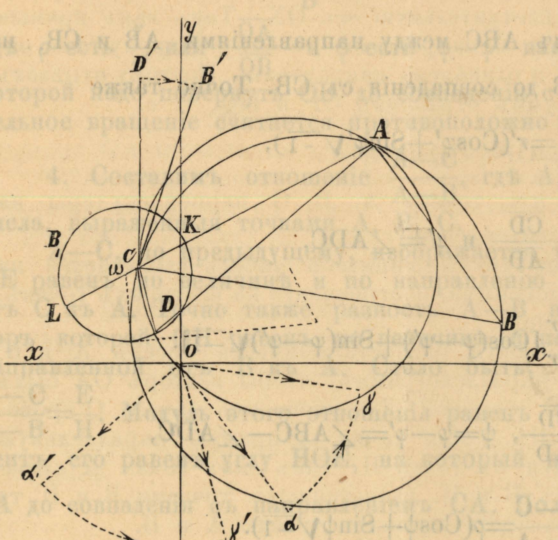
Такимъ образомъ для точекъ A, B, C, D на одной окружности отношеніе

$$\frac{B-C}{B-A}:\frac{D-C}{D-C}=m,$$

гдѣ m есть нѣкоторое дѣйствительное число. Если m отрицательное число, то точки B и D находятся съ разныхъ сторонъ хорды CA. Если m положительное число, то точки B и D находятся съ одной стороны хорды CA; если при этомъ $m>1$, то дуга BC болѣе дуги DC, такъ какъ $m=\frac{CB}{AB}:\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$ и, по предыдущему, отношеніе $\overline{BC}:\overline{BA}$ болѣе отношенія $\overline{DC}:\overline{DA}$, когда дуга BC болѣе дуги DC.

7. Положимъ, что точки A, B, C, D расположены какъ-нибудь на плоскости (фиг. 19). Чтобы показать значеніе угла φ, описываемъ окружности около треугольниковъ CAB и CAD и къ этимъ окружностямъ проводимъ касательныя CB′ и CD′ въ точкѣ C Уголъ B′CA между касательною CB′ и хордою CA равенъ вписанному углу CBA. Точно также уголъ D′CA равенъ углу CDA. Значитъ разность между углами CBA и CDA равна углу B′CD′ между касательными CB′ и CD′. Такимъ образомъ уголъ φ есть тотъ уголъ, подъ которымъ пересѣкаются окружности, имѣющія общую хорду CA и проходящія одна черезъ точку B, другая черезъ точку D. Замѣтимъ, что φ есть уголъ, на который надо повернуть касательную CD′ до совпаденія съ касательною CB′.

Фиг. 19.



8. Раздѣлимъ какую-нибудь прямую CA въ точкахъ K и L такимъ образомъ, чтобы $\overline{CK}:\overline{AK}=\overline{CL}:\overline{AL}$, и на прямой KL, какъ на діаметрѣ, опишемъ окружность. Извѣстно, что эта окружность будетъ представлять геометрическое мѣсто точки, отношеніе разстояній которой отъ точекъ C и A сохраняетъ постоянную величину. Четыре точки C и A, K и L составляютъ гармоническій рядъ. Положимъ, что ω есть средина прямой KL. Извѣстно, что $\omega C.\omega A=\overline{\omega K}^2$. Проведемъ черезъ точки C и A какую-нибудь окружность и изъ точки ω касательную къ ней. Квадратъ этой касательной долженъ равняться $\overline{\omega C}.\overline{\omega A}$ или $\overline{\omega K}^2$. Значитъ, точка

касанія лежитъ на окружности, описанной на діаметрѣ KL. Такимъ образомъ приходимъ къ теоремѣ: геометрическое мѣсто точки, отношеніе разстояній которой отъ двухъ данныхъ точекъ сохраняетъ постоянную величину, есть окружность, пересѣкающая подъ прямымъ угломъ всѣ окружности, проходящія черезъ двѣ данныя точки.

9. Положимъ, что точка D перемѣщается по окружности, проходящей черезъ точку B_1 и пересѣкающей подъ прямымъ угломъ всѣ окружности, проходящія черезъ точки C и A. Тогда

$$\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}:\frac{\overline{DC}}{\overline{DA}}=1 \text{ и } \frac{B_1-C}{B_1-A}:\frac{D-C}{D-A}=\operatorname{Cos}\phi+\operatorname{Sin}\phi\sqrt{-1},$$

или

$$\frac{D-A}{D-C}=\frac{B_1-A}{B_1-C}(\operatorname{Cos}\phi+\operatorname{Sin}\phi\sqrt{-1}).$$

Обратно, если перемѣнная точка D связана съ постоянными точками A, B_1, C послѣднимъ соотношеніемъ, то при измѣненіи угла ϕ точка D перемѣщается по окружности, проходящей черезъ точку B_1 и пересѣкающей подъ прямымъ угломъ всѣ окружности, проходящія черезъ точки C и A.

Этимъ мы заканчиваемъ изложеніе свойствъ мнимыхъ чиселъ и переходимъ къ ихъ приложеніямъ.

10. Положимъ, что два перемѣнныя мнимыя числа Z и Z' связаны соотношеніемъ

$$Z'=\frac{aZ+b}{cZ+d}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ a, b, c, d обозначаютъ постоянныя числа, дѣйствительныя или мнимыя. Подставляя Z_1, Z_2, Z_3,....... вмѣсто Z, мы получимъ для Z' соотвѣтствующія величины Z'_1, Z'_2, Z'_3,...... Такимъ образомъ рядъ точекъ Z_1, Z_2, Z_3.... мы преобразуемъ въ новый рядъ точекъ Z'_1, Z'_2, Z'_3,......, т. е. всякую фигуру мы можемъ преобразовать въ другую, такъ что каждой точкѣ одной фигуры будетъ соотвѣтствовать только одна точка въ другой и обратно. Выведемъ разныя свойства этого преобразованія.

Изъ равенствъ

$$Z'=\frac{aZ+b}{cZ+d},\quad Z'_1=\frac{aZ_1+b}{cZ_1+d},\quad Z'_2=\frac{aZ_2+b}{cZ_2+d},\quad Z'_3=\frac{aZ_3+b}{cZ_3+d}$$

находимъ

$$Z'_3-Z'_1=\frac{(ad-bc)(Z_3-Z_1)}{(cZ_3+d)(cZ_1+d)},\quad Z'_3-Z'=\frac{(ad-bc)(Z_3-Z)}{(cZ_3+d)(cZ+d)},$$

$$Z'_2-Z'_1=\frac{(ad-bc)(Z_2-Z_1)}{(cZ_2+d)(cZ_1+d)},\quad Z'_2-Z'=\frac{(ad-bc)(Z_2-Z)}{(cZ_2+d)(cZ+d)}.$$

Отсюда

$$\frac{Z'_3-Z'_1}{Z'_3-Z'}=\frac{Z_3-Z_1}{Z_3-Z}\cdot\frac{cZ+d}{cZ_1+d},\quad \frac{Z'_2-Z'_1}{Z'_2-Z'}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2-Z}\cdot\frac{cZ+d}{cZ_1+d}.$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ тождеству:

$$\frac{Z'_3-Z'_1}{Z'_3-Z'}:\frac{Z'_2-Z'_1}{Z'_2-Z'}=\frac{Z_3-Z_1}{Z_3-Z}:\frac{Z_2-Z_1}{Z_2-Z}.$$

Положимъ, что точки Z, Z_1, Z_2, Z_3 находятся на одной окружности. Тогда, по теоремѣ (6), вторая часть выведеннаго тождества должна представлять дѣйствительное число. Но въ такомъ случаѣ и первая часть этого тождества будетъ дѣйствительнымъ числомъ. Отсюда, на основанiи той-же теоремы (6), заключаемъ, что точки Z', Z'_1, Z'_2, Z'_3 лежатъ на одной окружности. Такимъ образомъ преобразованiе (1) обращаетъ круги въ круги *).

11. Послѣ этого изъ того-же тождества на основанiи теоремы (7) можемъ сдѣлать еще другой выводъ. Уголъ между кругами, описанными около треугольниковъ ZZ_1Z_2 и ZZ_1Z_3 равенъ углу между кругами, описанными около треугольниковъ $Z'Z'_1Z'_2$ и $Z'Z'_1Z'_3$, такъ какъ эти углы представляютъ аргументы мнимыхъ чиселъ тождественно равныхъ между собою. Но преобразованiе (1) обращаетъ первую пару круговъ во вторую пару. Значитъ, уголъ между кругами отъ преобразованiя (1) не измѣняется.

Преобразованiе (1) обращаетъ прямую или въ окружность или также въ прямую.

12. Далѣе мы будемъ полагать, что коэффицiенты a, b, c, d представляютъ дѣйствительныя числа. Тогда преобразованiе (1) обладаетъ многими замѣчательными свойствами. Полагая

$$Z=x+y\sqrt{-1},\ Z'=x'+y'\sqrt{-1},$$

находимъ

$$x'+y'\sqrt{-1}=\frac{ax+ay\sqrt{-1}+b}{cx+cy\sqrt{-1}+d},$$

откуда

$$(cx+d)x'-cyy'+[(cx+d)y'+cyx']\sqrt{-1}=ax+b+ay\sqrt{-1}$$

и

$$(cx+d)x'-cyy'=ax+b,$$
$$(cx+d)y'+cyx'=ay.$$

Изъ этихъ равенствъ находимъ

$$x'=\frac{ac(x^2+y^2)+(ad+bc)x+bd}{(cx+d)^2+c^2y^2},\ y'=\frac{(ad-bc)y}{(cx+d)^2+c^2y^2}.$$

Изъ второй формулы мы видимъ, что y' и y имѣютъ одинаковые знаки, если $ad-bc>0$, и разные знаки, если $ad-bc<0$. Иначе говоря,

---

*) Такъ какъ окружность вполнѣ опредѣляется тремя точками, то можно сказать, что окружность, проходящая черезъ точки Z, Z_1, Z_2 преобразуется въ окружность, проходящую черезъ точки Z', Z'_1, Z'_2.

если $ad-bc$ есть число положительное, точки Z' и Z находятся съ одной стороны дѣйствительной оси; въ противномъ случаѣ онѣ расположены по разныя стороны отъ нея.

Покажемъ построеніе, которымъ можно опредѣлить положеніе точки Z' по данному положенію точки Z. Для этого равенство (1) представляемъ въ видѣ

$$Z'=\frac{aZ\pm k^2}{Z+d}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1 \text{ bis})$$

Тогда

$$x'=\frac{a(x^2+y^2)+(ad\pm k^2)x\pm k^2d}{(x+d)^2+y^2}, \quad y'=\frac{(ad\mp k^2)y}{(x+d)^2+y^2}.$$

Такъ какъ

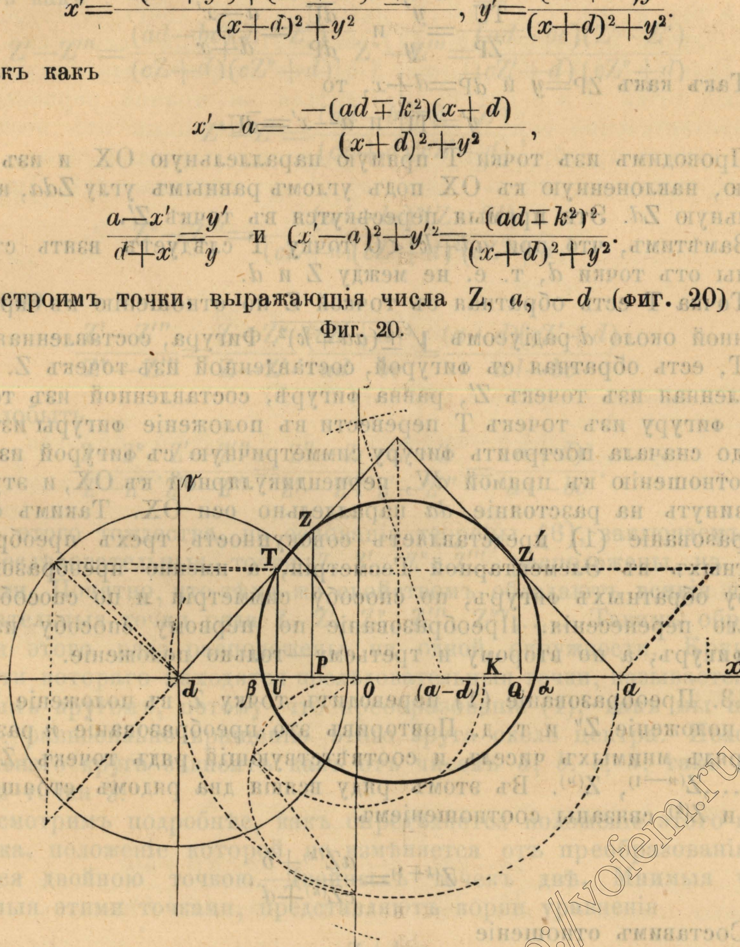
$$x'-a=\frac{-(ad\mp k^2)(x+d)}{(x+d)^2+y^2},$$

то

$$\frac{a-x'}{d+x}=\frac{y'}{y} \quad \text{и} \quad (x'-a)^2+y'^2=\frac{(ad\mp k^2)^2}{(x+d)^2+y^2}.$$

Построимъ точки, выражающія числа Z, a, $-d$ (фиг. 20) и обо-

Фиг. 20.



значимъ ихъ тѣми-же буквами. Тогда разстоянія $\overline{Zd}$ и $\overline{Z'a}$ опредѣляться изъ формулъ

$$\overline{Zd}=\sqrt{(x+d)^2+y^2}, \quad \overline{Z'a}=\sqrt{(x'-a)^2+y^2}.$$

Слѣдовательно,

$$\overline{Z'a}\cdot\overline{Zd}=\pm(ad\mp k^2).$$

Проводимъ прямую dZ и описываемъ около точки d окружность радіусомъ равнымъ $\sqrt{\mp(ad\mp k^2)}$. На прямой dZ беремъ такую точку T, чтобы $\overline{dT}\cdot\overline{dZ}=\pm(ad\mp k^2)$. Изъ точекъ T и Z опускаемъ перпендикуляры TU и ZP на прямую OX.

Тогда

$$\frac{\overline{TU}}{\overline{ZP}}=\frac{\overline{dU}}{\overline{dP}}=\frac{\overline{dT}}{\overline{dZ}}=\frac{\overline{dT}\cdot\overline{dZ}}{\overline{dZ}^2}=\frac{(ad\mp k^2)}{(x+d)^2+y^2}.$$

Значитъ,

$$\frac{\overline{TU}}{\overline{ZP}}=\frac{y'}{y} \text{ и } \frac{\overline{dU}}{\overline{dP}}=\frac{a-x'}{d+x}.$$

Такъ какъ $\overline{ZP}=y$ и $\overline{dP}=d+x$, то

$$y'=\overline{TU} \text{ и } a-x'=\overline{dU}.$$

Проводимъ изъ точки T прямую параллельную OX и изъ точки a прямую, наклоненную къ OX подъ угломъ равнымъ углу Zda, но не параллельную Zd. Эти прямыя пересѣкутся въ точкѣ Z'.

Замѣтимъ, что при $ad\mp k^2<0$ точку T слѣдуетъ взять съ другой стороны отъ точки d, т. е. не между Z и d.

Точка T есть обратная съ точкой Z по отношенію къ окружности, описанной около d радіусомъ $\sqrt{\pm(ad\mp k)^2}$. Фигура, составленная изъ точекъ T, есть обратная съ фигурой, составленной изъ точекъ Z. Фигура, составленная изъ точекъ Z', равна фигурѣ, составленной изъ точекъ T. Чтобы фигуру изъ точекъ T перевести въ положеніе фигуры изъ точекъ Z', надо сначала построить фигуру симметричную съ фигурой изъ точекъ T по отношенію къ прямой dV, перпендикулярной къ OX, и эту фигуру передвинуть на разстояніе da параллельно оси OX. Такимъ образомъ преобразованіе (1) представляетъ совокупность трехъ преобразованій извѣстныхъ въ Элементарной Геометріи, а именно преобразованія по способу обратныхъ фигуръ, по способу симметріи и по способу параллельнаго перенесенія. Преобразованіе по первому способу измѣняетъ видъ фигуръ, а по второму и третьему—только положеніе.

13. Преобразованіе (1) переводитъ точку Z въ положеніе Z', точку Z' въ положеніе Z'' и т. д. Повторивъ это преобразованіе n разъ, получимъ рядъ мнимыхъ чиселъ и соотвѣтствующій рядъ точекъ Z, Z', Z'', Z''',......, $Z^{(n-1)}$, $Z^{(n)}$. Въ этомъ ряду всякія два рядомъ стоящія числа $Z^{(k+1)}$ и $Z^{(k)}$ связаны соотношеніемъ

$$Z^{(k+1)}=\frac{aZ^{(k)}+b}{cZ^{(k)}+d}.$$

Составимъ отношеніе

$$\frac{Z''-Z}{Z''-Z'''}:\frac{Z'-Z}{Z'-Z'''}.$$

$$Z''-Z=\frac{aZ'+b}{cZ'+d}-Z=\frac{aZ'+b-cZZ'-dZ}{cZ'+d}.$$

Но изъ равенства (1) находимъ

$$cZZ'=aZ+b-dZ'.$$

Слѣдовательно,

$$Z''-Z=\frac{(a+d)(Z'-Z)}{cZ'+d}$$

или

$$\frac{Z''-Z}{Z'-Z}=\frac{a+d}{cZ'+d}.$$

Такъ какъ

$$Z'-Z'''=\frac{(ad-bc)(Z-Z'')}{(cZ+d)(cZ''+d)},\quad Z''-Z'''=\frac{(ad-bc)(Z'-Z'')}{(cZ'+d)(cZ''+d)}$$

$$Z'-Z''=\frac{(ad-bc)(Z-Z')}{(cZ+d)(cZ'+d)},$$

то

$$Z''-Z'''=\frac{(ad-bc)^2(Z-Z')}{(cZ+d)(cZ'+d)^2(cZ''+d)}.$$

Отсюда

$$\frac{Z'-Z'''}{Z''-Z'''}=\frac{Z-Z''}{Z-Z'}\cdot\frac{(cZ'+d)^2}{ad-bc}=\frac{(a+d)(cZ'+d)}{ad-bc}.$$

Сталобыть,

$$\frac{Z-Z''}{Z-Z'}\cdot\frac{Z'-Z'''}{Z''-Z'''}=\frac{Z''-Z}{Z''-Z'''}\cdot\frac{Z'-Z}{Z'-Z'''}=\frac{(a+d)^2}{ad-bc}.$$

Изъ этого тождества, на основанiи теоремы (6), заключаемъ, что четыре послѣдовательныя точки Z, Z', Z'', Z''' расположены на одной окружности. Понятно, что тѣмъ-же свойствомъ обладаютъ всякiя четыре послѣдовательныя точки ряда Z, Z', Z'', Z''', Z'''',..... Такимъ образомъ всѣ точки этого ряда расположены на одной окружности. Кругъ, на окружности котораго находятся послѣдовательныя точки, называется вращательнымъ кругомъ, потому что преобразованiе (1), какъ мы потомъ докажемъ, равносильно вращенiю этого круга около центра. Положенiе вращательнаго круга зависитъ какъ отъ чиселъ a, b, c, d, такъ и отъ начальной точки Z.

Разсмотримъ подробнѣе, какъ опредѣляется положенiе этого круга.

Точка, положенiе которой не измѣняется отъ преобразованiя (1), называется двойною точкою. Двойныхъ точекъ двѣ. Мнимыя числа, выражаемыя этими точками, представляютъ корни уравненiя

$$Z=\frac{aZ+b}{cZ+d},$$

такъ какъ по опредѣленiю двойной точки

$$Z'=Z.$$

Обозначая корни этого уравненія черезъ α и β и рѣшая его, находимъ

$$cZ^2-(a-d)Z=b,$$

$$\alpha=\frac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c},\quad \beta=\frac{a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}.$$

Если $(a-d)^2+4bc>0$, α и β будутъ дѣйствительныя числа и двойныя точки α и β будутъ находиться на дѣйствительной оси. Въ этомъ случаѣ преобразованіе (1) называется гиперболическимъ.

Если $(a-d)^2+4bc=0$, то $\alpha=\beta=\frac{a-d}{2c}$, т. е. двойная точка будетъ одна и при этомъ она будетъ находиться на дѣйствительной оси. Въ этомъ случаѣ преобразованіе (1) называется параболическимъ.

Если $(a-d)^2+4bc<0$, α и β будутъ сопряженныя мнимыя числа и двойныя точки α и β будутъ находиться на прямой перпендикулярной къ дѣйствительной оси и на равныхъ разстояніяхъ отъ этой оси. Въ этомъ случаѣ преобразованіе (1) называется эллиптическимъ.

Представимъ теперь равенство (1) въ другомъ видѣ. Такъ какъ

$$c\alpha^2-(a-d)\alpha-b=0,\quad c\beta^2-(a-d)\beta-b=0,$$

то

$$\alpha=\frac{b-\alpha d}{\alpha c-a},\quad \beta=\frac{b-\beta d}{\beta c-a}.$$

Составимъ отношеніе $(Z'-\alpha):(Z'-\beta)$.

$$Z'-\alpha=\frac{aZ+b-\alpha cZ-\alpha d}{cZ+d},\quad Z'-\beta=\frac{aZ+b-\beta cZ-\beta d}{cZ+d};$$

$$\frac{Z'-\alpha}{Z'-\beta}=\frac{(a-\alpha c)Z+b-\alpha d}{(a-\beta c)Z+b-\beta d}.$$

Полагая

$$k=\frac{a-\alpha c}{a-\beta c},$$

находимъ

$$\frac{Z'-\alpha}{Z'-\beta}=k\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\quad\ldots\ldots\ldots\ (1\ \text{ter})$$

Число k можно представить въ видѣ

$$k=\frac{2a-2\alpha c}{2a-2\beta c}=\frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}.$$

Умножая числителя и знаменателя на $[a+d-\sqrt{(a-d)^2+bc}]$, находимъ послѣ упрощеній

$$k=\frac{(a^2+d^2+2bc)-(a+d)\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2(ad-bc)}.$$

14. Гиперболическое преобразованіе приводится къ формѣ

$$\frac{Z'-\alpha}{Z'-\beta}=k.\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

гдѣ α и β двойныя точки, лежащія на дѣйствительной оси, и k дѣйствительное число. На основаніи теоремы (6) заключаемъ, что въ гиперболическомъ преобразованіи всякій вращательный кругъ проходитъ черезъ двойныя точки α и β. Такимъ образомъ положеніе вращательнаго круга вполнѣ опредѣляется двойными точками α и β и начальною точкою Z. Если k положительное число большее единицы, то преобразованіе (2) удаляетъ точку Z отъ α, т. е. дуга $Z'\alpha$ болѣе дуги $Z\alpha$.

Замѣтимъ, что знакъ числа k одинаковъ со знакомъ числа $(ad-bc)$.

15. Въ параболическомъ преобразованіи

$$(a-d)^2+4bc=0,\quad \alpha=\beta=\frac{a-d}{2c}.$$

Значитъ,

$$d=a-2c\alpha \text{ и } b=-c\alpha^2.$$

Поэтому

$$Z'-\alpha=\frac{aZ-c\alpha^2}{cZ+a-2c\alpha}-\alpha=\frac{(a-\alpha c)(Z-\alpha)}{c(Z-\alpha)+a-\alpha c}.$$

откуда

$$\frac{1}{Z'-\alpha}=\frac{1}{Z-\alpha}+\frac{c}{a-\alpha c} \text{ или } \frac{1}{Z'-\alpha}=\frac{1}{Z-\alpha}+h,\quad . \; . \; (3)$$

гдѣ h представляетъ дѣйствительное число.

Это же равенство можно представить въ видѣ

$$\frac{Z-Z'}{(Z-\alpha)(Z'-\alpha)}=h.$$

Преобразуя точку Z' въ положеніе Z'', получимъ

$$\frac{Z'-Z''}{(Z'-\alpha)(Z''-\alpha)}=h.$$

Отсюда находимъ

$$\frac{Z''-Z'}{Z''-\alpha}:\frac{Z-Z'}{Z-\alpha}=-1$$

Отсюда выводимъ, на основаніи теоремы (6), что въ параболическомъ преобразованіи всякій вращательный кругъ проходитъ черезъ двойную точку.

Всякій вращательный кругъ долженъ касаться дѣйствительной оси въ двойной точкѣ, такъ какъ параболическое преобразованіе можно разсматривать какъ предѣльный случай гиперболическаго преобразованія, когда двѣ двойныя точки, лежащія на дѣйствительной оси, сливаются въ одну. Такимъ образомъ положеніе вращательнаго круга вполнѣ опредѣляется двойною точкою α, касательною OX въ этой точкѣ и начальною точкою Z.

Положимъ, что h есть положительное число. Тогда точка, выражающая мнимое число $\frac{1}{Z'-\alpha}$, должна лежать вправо отъ точки, выражающей мнимое число $\frac{1}{Z-\alpha}$; при этомъ обѣ точки должны находиться на прямой параллельной дѣйствительной оси. Для большей опредѣленности предположимъ, что вращательный кругъ расположенъ сверху дѣйствительной оси. Тогда точки, выражающія числа $Z'-\alpha$ и $Z-\alpha$, также будутъ расположены сверху дѣйствительной оси, а точки, выражающія числа $\frac{1}{Z'-\alpha}$ и $\frac{1}{Z-\alpha}$, будутъ расположены снизу дѣйствительной оси. Поэтому аргументъ мнимаго числа $\frac{1}{Z'-\alpha}$ будетъ болѣе аргумента мнимаго числа $\frac{1}{Z-\alpha}$, такъ какъ аргументы считаются отъ 0° до 360° противоположно движенію часовой стрѣлки. Слѣдовательно аргументъ числа $Z'-\alpha$ будетъ менѣе аргумента числа $Z-\alpha$. Такимъ образомъ при h положительномъ преобразованіе (3) передвигаетъ точку Z по окружности вращательнаго круга по направленію движенія часовой стрѣлки. Тоже самое будетъ справедливо и въ томъ случаѣ, когда вращательный кругъ будетъ находиться снизу дѣйствительной оси.

Замѣтимъ, что число $(ad-bc)$ положительно, такъ какъ оно равно $(a-c\alpha)^2$.

16. Эллиптическое преобразованіе приводится къ формѣ

$$\frac{Z'-\alpha}{Z'-\beta}=k\frac{Z-\alpha}{Z-\beta},$$

гдѣ k обозначаетъ мнимое число.

Такъ какъ

$$k=\frac{(a^2+d^2+2bc)-(a+d)\sqrt{-(a-d)^2-4bc}\sqrt{-1}}{2(ad-bc)},$$

то модуль его равенъ

$$\frac{(a^2+d^2+2bc)^2+(a+d)^2[-(a-d)^2-4bc]}{4(ad-bc)^2}=\frac{4a^2d^2+4b^2c^2-8adbc}{4(ad-bc)}=1.$$

Обозначивъ аргументъ мнимаго числа k черезъ φ, мы приведемъ эллиптическое преобразованіе къ формѣ

$$\frac{Z'\ \alpha}{Z'-\beta}=\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}(\mathrm{Cos}\varphi+\sqrt{-1}\ \mathrm{Sin}\varphi), \quad . \ . \ . \ . \ (4)$$

гдѣ α и β суть двойныя точки, выражающія сопряженныя мнимыя числа. На основаніи теоремы (9) заключаемъ, что всякій вращательный кругъ пересѣкаетъ подъ прямымъ угломъ всѣ круги, проходящіе черезъ двойныя точки α и β. Такимъ образомъ положеніе вращательнаго круга вполнѣ опредѣляется начальною точкою Z и двумя точками A и B, дѣлящими прямую $\alpha\beta$ такъ, что $\overline{\alpha A}:\overline{\beta A}=\overline{\alpha B}:\overline{\beta B}=\overline{\alpha Z}:\overline{\beta Z}$. Прямыя ZA и ZB дѣлятъ пополамъ внутренній и внѣшній углы треугольника $Z\alpha\beta$ при вершинѣ Z.

Послѣ этого можно считать доказаннымъ, что всякая точка на вращательномъ кругѣ всегда преобразуется въ точку, лежащую на томъ-же вращательномъ кругѣ, т. е. преобразованіе (1) равносильно вращенію этого круга около центра.

Разсмотримъ особенныя свойства эллиптическаго преобразованія.

17. Описываемъ круги около треугольниковъ $Z\alpha\beta$ и $Z'\alpha\beta$. Изъ равенства (4), на основаніи теоремы (7), заключаемъ, что эти круги наклонены другъ къ другу подъ угломъ φ. Но кругъ $Z'\alpha\beta$ получается отъ преобразованія круга $Z\alpha\beta$. Слѣдов., эллиптическое преобразованіе превращаетъ кругъ, проходящій черезъ двойныя точки, въ другой кругъ, проходящій черезъ тѣ-же двойныя точки и наклоненный къ первому подъ угломъ φ.

18. Положимъ, что $\varphi=\frac{p\pi}{q}$, гдѣ p и q представляютъ нѣкоторыя цѣлыя числа. Составимъ послѣдовательный рядъ

$$Z,\ Z',\ Z'',\ldots Z^{(q)},\ Z^{(q+1)},\ldots Z^{(2q-1)},\ Z^{(2q)}.$$

$$\frac{Z'-\alpha}{Z'-\beta}=\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\left(\operatorname{Cos}\frac{p\pi}{q}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\frac{p\pi}{q}\right),\quad \frac{Z''-\alpha}{Z''-\beta}=\frac{Z'-\alpha}{Z'-\beta}\left(\operatorname{Cos}\frac{p\pi}{q}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\frac{p\pi}{q}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \frac{Z^{(q)}-\alpha}{Z^{(q)}-\beta}=\frac{Z^{(q-1)}-\alpha}{Z^{(q-1)}-\beta}\left(\operatorname{Cos}\frac{p\pi}{q}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\frac{p\pi}{q}\right).$$

Перемножая эти равенства почленно и замѣчая, что аргументъ произведенія мнимыхъ чиселъ равенъ суммѣ аргументовъ производителей, находимъ послѣ сокращеній

$$\frac{Z^{(q)}-\alpha}{Z^{(q)}-\beta}=\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\left(\operatorname{Cos}p\pi+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}p\pi\right).$$

Такъ какъ $\operatorname{Cos}p\pi=(-1)^p$ и $\operatorname{Sin}p\pi=0$.

то
$$\frac{Z^{(q)}-\alpha}{Z^{(q)}-\beta}=(-1)^p\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}.$$

Точно также покажемъ, что

$$\frac{Z^{(2q)}-\alpha}{Z^{(2q)}-\beta}=(-1)^p\frac{Z^{(q)}-\alpha}{Z^{(q)}-\beta}.$$

Отсюда
$$\frac{Z^{(2q)}-\alpha}{Z^{(2q)}-\beta}=\frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\ \text{и}\ Z^{(2q)}=Z.$$

Слѣдов., если въ эллиптической подстановкѣ (4) уголъ φ есть число соизмѣримое съ π, то рядъ $Z,\ Z',\ Z'',\ldots\ldots$ состоитъ изъ періодически повторяющихся чиселъ.

19. Положимъ, что число φ несоизмѣримо съ π. Тогда можно положить, что φ заключается между $\frac{(2p+1)\pi}{q}$ и $\frac{2p\pi}{q}$, при чемъ величина $\frac{\pi}{q}$ можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой.

Такъ какъ $\varphi > \dfrac{2p\pi}{q}$,

то $q\varphi > 2p\pi$

и тѣмъ болѣе $q\varphi > p\pi + \sqrt{p^2\pi^2 - p\varphi}$

или $(q\varphi - p\pi)^2 > p^2\pi^2 - p\varphi$,

откуда $2p\pi - q\varphi < \dfrac{\pi}{q}$.

По предыдущему

$$\frac{Z^{(q)}-\alpha}{Z^{(q)}-\beta} = \frac{Z-\alpha}{Z-\beta}\left(\operatorname{Cos} q\varphi + \sqrt{-1}\ \operatorname{Sin} q\varphi\right).$$

Такъ какъ разность между $2p\pi$ и $q\varphi$ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, то послѣдовательными преобразованіями можно точку Z перевести въ положеніе $Z^{(q)}$ сколь угодно близкое къ начальному положенію.

Слѣдов., если въ эллиптической подстановкѣ (4) уголъ φ есть число несоизмѣримое съ π, то въ ряду точекъ Z, Z', Z'',..... можно найти точку, какъ угодно близкую къ начальной точкѣ Z.

20. Такъ какъ въ эллиптическомъ преобразованіи вращательный кругъ долженъ пересѣкать подъ прямымъ угломъ всѣ круги, проходящіе черезъ двойныя точки α и β, то центръ его долженъ находиться на прямой $\alpha\beta$, которая перпендикулярна къ дѣйствительной оси. Слѣдов., при измѣненіи положенія начальной точки центръ вращательнаго круга перемѣщается по прямой перпендикулярной къ дѣйствительной оси.

Тѣмъ-же свойствомъ обладаетъ вращательный кругъ въ параболическомъ и гиперболическомъ преобразованіяхъ, такъ какъ въ параболическомъ преобразованіи онъ долженъ касаться дѣйствительной оси въ двойной точкѣ, а въ гиперболическомъ преобразованіи долженъ проходить черезъ двойныя точки, расположенныя на дѣйствительной оси.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ) *).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Гальваническія батареи на Парижской выставкѣ 1889 г.

(Продолженіе) **)

Батарея Делорье. Элементы Делорье углецинковые. Въ діафрагмѣ 2 угольныя пластинки для уменьшенія сопротивленія. Во избѣжаніе осадка хромовыхъ квасцовъ, химическіе эквиваленты вычислены такъ, чтобы окись хрома растворялась по мѣрѣ образованія. Возбуждающая жидкость состоитъ изъ воды, хромпика, сѣрнокислаго натра, желѣзнаго купороса и сѣрной кислоты. Въ наружный сосудъ наливаютъ воды, а въ діафрагму

*) Статья эта была уже набрана, когда получены были еще два вполнѣ удовлетворительные на ту-же тему отвѣта отъ *Дм. Ефремова* (Ив. Вознес.) и отъ ученика Могил. гимназіи *Я. Эйлера*.

**) См. „Вѣстникъ“ №№ 86 и 88.

возбуждающую жидкость. Жидкость изъ діафрагмы просачивается къ цинку; онъ окисляется и даетъ весьма растворимую сѣрноцинковую соль. Выдѣлившійся отъ разложенія воды водородъ идетъ къ углямъ и отнимаетъ у деполяризатора кислородъ, образуя воду. Деполяризаторъ, теряя кислородъ, принимаетъ мало по малу характерный зеленоватый оттѣнокъ сѣрнокислой полуторной окиси хрома. Г. Геро, купившій патентъ Делорье, вмѣсто жидкости продаетъ покупателямъ деполяризаторъ въ порошкѣ (желѣзистохромовую соль); его надо распустить въ водѣ, прибавивъ сколько слѣдуетъ сѣрной кислоты. На каждый элементъ требуется 2,2 килограмма раствора, имѣющаго слѣдующій составъ:

1) желѣзисто-хромовой соли . .	0,435	килогр.
2) Теплой воды	0,990	
3) Сѣрн. кислоты въ 66° . . .	0,775	

Готовятъ растворъ такъ: насыпаютъ въ бутыль соль, наливаютъ теплой воды и нѣсколько минутъ взбалтываютъ, затѣмъ вливаютъ половину отвѣшеннаго количества сѣрной кислоты и мѣшаютъ до тѣхъ поръ, пока соль не распустится совсѣмъ; черезъ 6 часовъ приливается остатокъ сѣрной кислоты. Употребляется въ дѣло жидкость лишь послѣ полнаго охлажденія.

Батарея Радиге. Хотя элеметъ Радиге и описанъ въ одномъ электротехническомъ журналѣ (см „Газету Электрика" 1889 г. № 22), однако привожу его краткое описаніе. Элементъ этотъ съ двумя жидкостями и съ діафрагмой. Отличіе его отъ другихъ заключается въ особой подставкѣ для амальгамаціи цинковъ благодаря которой можно обходиться безъ литыхъ цинковыхъ палочекъ или цилиндровъ, а сжигать въ элементѣ всякіе обрѣзки и отбросы цинка; кромѣ того г. Радиге, замѣтивъ, что деполяризаторъ можетъ служить втрое дольше сравнительно съ подкисленной водой, придумалъ сифонъ для опоражниванія элементовъ и притомъ сифонъ, заряжаемый нагнетаніемъ (вдуваніемъ) воздуха, а не выкачиваніемъ, какъ обыкновенно. Подставка для амальгамаціи помѣщается въ діафрагмѣ и состоитъ изъ мѣдной полой трубки, имѣющей внизу плетеную металлическую корзинку или круглый подносикъ съ краями: въ корзиночку или на подносикъ помѣщаютъ цинковые шарики или вообще отбросы цинка. Отъ корзиночки или подносика идутъ внизъ 2 мѣдныя проволки, опирающіяся въ дно фарфоровой чашечки съ ртутью (100 граммовъ ртути съ небольшимъ количествомъ цинка). Ртуть, поднимаясь по мѣднымъ стержнямъ (проволокамъ), доходитъ до корзинки и амальгамируетъ цинкъ Ртуть поднимается, по увѣренію изобрѣтателя, лишь во время работы батареи. Понять устройство сифона Радиге не трудно: представимъ себѣ обыкновенный сифонъ, одна вѣтвь котораго заключена въ вертикальную трубку, съ небольшимъ отверстіемъ внизу и нагнетательной резиновой грушей на верху. Опустимъ такую трубку въ сосудъ съ жидкостью; жидкость будетъ стоять на одномъ уровнѣ въ сосудѣ и въ вертикальной трубкѣ, а, слѣдовательно, и въ вѣтви сифона, заключенной въ ней. Если теперь начать нагнетать воздухъ въ трубку съ помощью резиновой груши, то воздухъ будетъ давить на уровень воды въ трубкѣ и гнать ее въ вверхъ въ сифонъ, отчего онъ и зарядится. Лишь небольшая часть жидкости вытечетъ при напорѣ воздуха черезъ отверстіе въ вертикальной трубкѣ, п. ч. это отверстіе очень мало сравнительно съ отверстіемъ вѣтви сифона, заключенной наглухо въ вертикальную трубку. При очень сильномъ вдуваніи воздуха въ сифонную вѣтвь вся жидкость будетъ выгнана изъ него, и онъ разрядится. Такимъ образомъ мы можемъ, по желанію, заряжать сифонъ или разряжать его. Уголь въ элементѣ цилиндрическій, окружающій діафрагму. Вотъ постоянныя элемента:

Начальное E	=2,12 вольта.
Нормальное E	=2 „
Нормальная J	=1—1,5 амп.
Средня разность потенціаловъ у борновъ элем.	=1, 7 в.
Среднее R	0,2Ω

Батарея Корнфельда. Эта батарея была выставлена въ русскомъ отдѣлѣ. Особенность ея заключается въ устройствѣ наружныхъ сосудовъ, служащихъ въ то же время электродами. Хотя авторъ статьи г. Дьедоннэ, и не говоритъ объ этомъ, но читатели, слѣдившіе за усовершенствованіями и изобрѣтеніями элементовъ, сейчасъ-же поймутъ, что г. Корнфельдъ при изобрѣтеніи своей батареи подражалъ гг. Эрхарту и Фоглеру, замѣнивъ только картонъ эбонитомъ, а свинецъ углемъ, да взялъ другое заряженіе. Батарея г. Корнфельда готовится въ Парижѣ Центральнымъ обществомъ химическихъ продуктовъ. Къ эбонитовой рамкѣ (15 миллим. толщины), имѣющей форму опрокинутаго П, прикрѣпляютъ съ обѣихъ сторонъ по угольной пластинкѣ (25 цент. высоты и 20 цент. ширины и 5 милл. толщины). Угольныя пластинки не пропускаютъ жидкостей. Наружныя края такихъ сосудовъ-электродовъ покрыты гальванической мѣдью. Въ каждомъ сосудѣ 2 свинц. трубки: одна для вливанія, другая для выливанія жидкостей. Цинковая пластинка каждаго элемента въ 9 милл. толщины, такъ что для постоянно переливающейся жидкости остается немного свободнаго пространства. На выставкѣ была батарея изъ 40 эл., расположенныхъ въ 2 ряда другъ надъ другомъ и занимала въ длину 0,7 метра, а въ шир.—0,5 м. При батареѣ 2 резервуара, 1 для заряжающей жидкости, другой для отработавшей. Изъ резервуара по жолобу и свинцовымъ трубкамъ жидкость втекаетъ въ элементы, а вытекаетъ изъ нихъ черезъ вторыя трубки, во второй жолобъ, попадая въ сточный резервуаръ. Для приведенія жидкости въ движеніе, достаточно открыть кранъ 1-го резервуара. Цинки поднимаются и опускаются, какъ въ батареѣ Труве. Общ. вѣсъ цинковъ=100 килогр., а поверхность=300 кв. дециметровъ. Г. Корнфельдъ увѣряетъ, что батарея его можетъ дѣйствовать 150 часовъ, развивая J=10 амп. и E=76 вольтъ. *П. П.*

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

ЗАДАЧИ.

№ 32. Построить треугольникъ по даннымъ: высотѣ, биссектору и медіанѣ, проведеннымъ изъ одной вершины

(Заимств.) *А. Шифринъ* (Кіевъ).

№ 33. Около круга описанъ четыреугольникъ, стороны котораго суть a, b, c, d и одна изъ діагоналей D. Опредѣлить радіусъ круга.

Н. Соболевскій (Москва).

№ 34. На сторонѣ AC треугольника ABC дана точка касанія D внутривписаннаго круга. Доказать, что при

$$AB.BC=2AD.DC$$

треугольникъ будетъ прямоугольный.

(Отсюда слѣдуетъ, что площади прямоугольнаго треугольника равна произведенію отрѣзковъ гипотенузы, опредѣляемыхъ точкою касанія вписаннаго круга). *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 35. Въ ариѳметической прогрессіи отношеніе суммы всякихъ n первыхъ ея членовъ къ суммѣ слѣдующихъ за ними $2n$ членовъ есть величина постоянная. Найти это постоянное отношеніе и составить такую прогрессію. *А. Войновъ* (Харьковъ).

№ 36. Дано квадратное уравненіе

$$x^2+px+q=0,$$

корни котораго суть α и β. Обозначимъ вообще черезъ S_m сумму m-ыхъ степеней этихъ корней (т. е. $S_m=\alpha^m+\beta^m$) и черезъ S_{-m} сумму $\alpha^{-m}+\beta^{-m}$. Показать какимъ образомъ опредѣлятся суммы S_1, S_2, S_3....... а также суммы S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}....... въ зависимости отъ коэффиціентовъ уравненія p и q. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 37. Рѣшить систему уравненій

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}=\frac{c}{z}$$

$$\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}=\frac{a}{x}$$

$$\frac{z^2+x^2-y^2}{2xz}=\frac{b}{y}$$

и объяснить геометрическое значеніе, на основаніи котораго можно ту-же систему рѣшить тригонометрически. *Мясковъ* (Слонимъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 447. Рѣшить уравненіе

$$\frac{(x-1)^2}{3x}=\frac{3-x}{1-x}.$$

Приведя данное уравненіе къ одному знаменателю, перенесемъ всѣ его члены въ одну сторону. Тогда

$$x^3-6x^2+12x-1=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Вычитая изъ обѣихъ частей этого уравненія 7, получимъ

$$(x-2)^3=-7,$$

т. е.

$$x=2-\sqrt[3]{7}.$$

Раздѣливъ (α) на $x-(2-\sqrt[3]{7})$ найдемъ остальные два корни.

Н. Артемьевъ (Спб.). *С. Блажко* и *Н. Соболевскій* (Москва) *И. Соляниковъ* и *П. Трипольскій* (Полтава), *С. Кричевскій* (Ромны), *Г. Горбуновъ* (Камышинъ). Ученики: Короч. г. (8) *І. С.*, Полт. Дух. Сем. (3) *А. З.*, Курск. г. (6) *Л. Л.*, Кіевск. р. уч. (6) *Л. А.*, Вор. к. к. (7) *Г. У.*

№ 511. Доказать, что каждая діагональ правильнаго пятиугольника, при встрѣчѣ съ другою, дѣлится въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

Данъ правильный пятиугольникъ ABCDE. Проведемъ діагонали AD и BE; $\angle AED=108°$, а такъ какъ $\triangle$-къ AED равнобедренный то

$$\angle ADE=\angle DAE=36°.$$

Точно также $\angle BEA=36°$. Слѣдовательно $\angle ANE=108°$, гдѣ N— точка пересѣченія AD и BE; въ силу этого $\triangle$-ки ADE и ANE равноугольны, поэтому

$$AD:DE=AE:AN,$$

но $\triangle$-къ NDE равнобедренный, и потому ND=DE. Подставляя ND въ пропорцію вмѣсто AE и DE, получимъ

$$AD:ND=ND:AN.$$

П. Трипольскій (Полт.), *В. Ивановъ* (Златополь) *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *А. Спиридоновъ* и *Г. Капраловъ* (Пенза). *И. Пастуховъ* (Пермь). Ученики: 5-й Варш. г. (8) *В. П.*, Могил.-Под. р уч. (6) *С. И-ъ*, 2-й Тифл. г. (7) *М. А.*, Пинск. р. уч. (6) *С. Т.*, 4-й Кіев. г. (6) *В. Г.*, 1-й Кіев. г. (8) *А. Шлж.*, Златоп. г. (6) *С. К.*, Полт. Дух. Сем. (4) *С. З.*, Т.-Х. Ш. р. уч. (7) *А. Б.*, Курск. г. (6) *В. К.* и *А. Ш.*, (7) *П. Ч.*, (8) *А. П.*, *С. Г.*, *С. Д.* и *Н. К.*, Короч. г. (6) *Н. М.*, (7) *П. Н.*, (8) *И. С.*, Великол. р. уч. (6) *А. В.*, 2-й Кіевск. г. (8) *В. М.*, Ворон. к. к. (7) *Н. В.* и *Г. У.*

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 13 Апрѣля 1890 г.

Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Обложка
ищется

Обложка
ищется