Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXIV Сем. № 2.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 278.

Замѣчательная трансверсаль треугольника.

§ 1. Чрезъ вершину A треугольника ABC проведемъ прямую, пересѣкающую сторону BC въ D и описанную окружность треугольника въ E, такъ чтобы отрѣзки AD и AE, имѣя одинаковое направленіе, удовлетворяли равенству:

$$AD \cdot AE = \overline{BC}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Опредѣляемая этимъ условіемъ трансверсаль AD обладаетъ слѣдующимъ замѣчательнымъ свойствомъ:

Если на прямой AD возьмемъ какую-либо точку N и построимъ точку N_1, изогонально-сопряженную съ N, и точку N_2, изотомически-сопряженную съ N, — то прямая $N_1 N_2$ параллельна сторонѣ BC треугольника.

Прежде чѣмъ вывесть это свойство трансверсали AD, докажемъ предварительно нѣкоторыя теоремы, относящіяся къ изогонально и изотомически-сопряженнымъ точкамъ.

Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ различать отрѣзки прямыхъ не только по величинѣ, но и по направленію, и два отрѣзка, имѣющіе равную величину, но противоположное направленіе, будемъ считать противоположными по знаку.

§ 2. Если изогональныя прямыя относительно угла A треугольника ABC пересѣкаютъ сторону BC въ D и D_1, то

$$\frac{BD \cdot BD_1}{DC \cdot D_1C} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Треугольники ABD и ACD_1 имѣютъ общую высоту; слѣдовательно, площади ихъ относятся какъ основанія; съ другой стороны въ этихъ треугольникахъ углы BAD и CAD_1 равны или ихъ сумма равняется двумъ прямымъ, поэтому площади треугольниковъ относятся, какъ произведенія сторонъ, обнимающихъ углы BAD и CAD_1. Сравнивая эти отношенія, будемъ имѣть:

$$\frac{BD}{D_1C} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Точно также, прилагая подобныя разсужденія къ треугольникамъ ABD_1 и ACD, имѣющимъ общую высоту и равные или пополнительные углы, найдемъ:

$$\frac{BD_1}{DC} = \frac{AB \cdot AD_1}{AC \cdot AD} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Перемноживъ (3) и (4), получимъ равенство (2).

§ 3. Если N и N_1 двѣ изогонально-сопряженныя точки, лежащія на прямыхъ AD и AD_1, то

$$\frac{NA}{ND} \cdot \frac{N_1A}{N_1D_1} = \frac{\overline{AB}^2}{BD \cdot BD_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Положимъ, что изогональныя прямыя BN и BN_1 пересѣкаютъ AC въ E′ и E_1.

Примѣняя вышенайденную формулу (2) къ этому случаю, будемъ имѣть:

$$\frac{AE' \cdot AE_1}{E'C \cdot E_1C} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Далѣе по теоремѣ Менелая треугольники ACD и ACD_1, пересѣченные прямыми BE′ и BE_1, даютъ соотношенія:

$$\frac{NA}{ND} \cdot \frac{E'C}{E'A} \cdot \frac{BD}{BC} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\frac{N_1A}{N_1D_1} \cdot \frac{E_1C}{E_1A} \cdot \frac{BD_1}{BC} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Перемножая равенства: (6), (7), (8) и замѣчая, что по величинѣ и по знаку $AE' \cdot AE_1 = E'A \cdot E_1A$, по сокращеніи найдемъ:

$$\frac{NA}{ND} \cdot \frac{N_1A}{N_1D_1} \cdot \frac{BD \cdot BD_1}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2},$$

откуда, чрезъ умноженіе обѣихъ частей на $\frac{\overline{BC}^2}{BD \cdot BD_1}$, придемъ къ равенству (5).

§ 4. Пусть N_2 будетъ точка, изотомически-сопряженная съ N, и пусть прямая AN_2 пересѣкаетъ BC въ D_2, тогда

$$\frac{NA}{ND} \cdot \frac{N_2A}{N_2D_2} = \frac{\overline{BC}^2}{BD \cdot BD_2} \quad \ldots\ldots (9)$$

Если прямая BN_2 пересѣкаетъ AC въ F, то треугольникъ ACD_2 и сѣкущая BF даютъ:

$$\frac{N_2A}{N_2D_2} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{BD_2}{BC} = 1.$$

Перемножаемъ это равенство съ (7):

$$\frac{NA}{ND} \cdot \frac{N_2A}{N_2D_2} \cdot \frac{E'C \cdot FC}{E'A \cdot FA} \cdot \frac{BD \cdot BD_2}{\overline{BC}^2} = 1 \quad .\ . \quad (10)$$

Такъ какъ по опредѣленію изотомическихъ точекъ

$$E'C = -FA, \quad FC = -E'A$$

то слѣдовательно

$$\frac{E'C}{FA} = -1, \quad \frac{FC}{E'A} = -1, \quad \frac{E'C \cdot FC}{FA \cdot E'A} = 1,$$

и равенство (1) приводится къ слѣдующему:

$$\frac{NA}{ND} \cdot \frac{N_2A}{N_2D_2} \cdot \frac{BD \cdot BD_2}{\overline{BC}^2} = 1,$$

а отсюда, умножая обѣ части на $\frac{\overline{BC}^2}{BD \cdot BD_2}$, получимъ равенство (9).

§ 5. Обращаясь теперь къ доказательству выщеупомянутаго свойства трансверсали AD, замѣтимъ прежде всего, что какъ бы ни были расположены точки A, D, E на прямой AD, всегда

$$AD + DE + EA = 0$$

откуда

$$AE = -EA = AD + DE,$$

и равенство (1) преобразуется такъ

$$AD \cdot AE = AD\,(AD + DE) = \overline{AD}^2 + AD \cdot DE = \overline{BC}^2 \quad .\ .\ . \ (11)$$

Замѣчая же, что D есть точка пересѣченія хордъ BC и AE описанной окружности треугольника, будемъ имѣть:

$$AD \cdot DE = BD \cdot DC,$$

на основаніи чего равенство (11) замѣняемъ слѣдующимъ:

$$\overline{AD}^2 + BD \,.\, DC = \overline{BC}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

По теоремѣ Stewart'a:

$$\overline{AC}^2 \,.\, BD + \overline{AB}^2 \,.\, DC + CB\,(\overline{AD}^2 + BD \,.\, DC) = 0 \quad . \; . \; (13).$$

Сдѣлавъ подстановку изъ (12) въ (13), найдемъ:

$$\overline{AC}^2 \,.\, BD + \overline{AB}^2 \,.\, DC + CB \,.\, \overline{BC}^2 = 0,$$

откуда, такъ какъ $CB = -BC$, получимъ

$$\overline{AC}^2 \,.\, BD + \overline{AB}^2 \,.\, DC = \overline{BC}^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14).$$

Далѣе, для трехъ точекъ D_1, C, B имѣемъ:

$$D_1C + CB + BD_1 = 0$$

откуда

$$D_1C = BC - BD_1\,.$$

Подставимъ найденное для D_1C значеніе въ равенство (2):

$$\frac{BD \,.\, BD_1}{DC\,(BC - BD_1)} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Изъ этого равенства выводимъ:

$$(\overline{AC}^2 \,.\, BD + \overline{AB}^2 \,.\, DC)\, BD_1 = \overline{AB}^2 \,.\, DC \,.\, BC,$$

отсюда, принимая во вниманіе равенство (14), получаемъ:

$$\overline{BC}^3 \,.\, BD_1 = \overline{AB}^2 \,.\, DC \,.\, BC$$

и далѣе, чрезъ дѣленіе обѣихъ частей на $BC \,.\, BD \,.\, BD_1 \,.\, DC$,

$$\frac{\overline{BC}^2}{BD \,.\, DC} = \frac{\overline{AB}^2}{BD \;\; BD_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

Отрѣзки DC и BD_2 равны по величинѣ и одинаковы по направленію, поэтому въ равенствѣ (15) можемъ замѣнить DC чрезъ BD_2:

$$\frac{\overline{BC}^2}{BD \,.\, BD_2} = \frac{\overline{AB}^2}{BD \,.\, BD_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Сопоставляя теперь равенства: (16), (5), (9), видимъ, что

$$\frac{NA}{ND} \cdot \frac{N_2A}{N_2D_2} = \frac{NA}{ND} \cdot \frac{N_1A}{N_1D_1},$$

слѣдовательно

$$\frac{N_2A}{N_2D_2} = \frac{N_1A}{N_1D_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

Найденное соотношеніе (17) показываетъ, что точки N_1 и N_2 дѣлятъ въ равныхъ отношеніяхъ и одинаковымъ образомъ (т. е., обѣ внутренне или обѣ внѣшне) трансверсали AD_1 и AD_2, а потому прямая N_1N_2 параллельна прямой D_1D_2, иначе сторонѣ BC треугольника. Это и требовалось доказать.

Обратно, если прямыя N_1N_2 и BC параллельны, то исходя изъ соотношенія (17), можемъ вывести равенство (11), и такимъ образомъ докажемъ, что точка N лежитъ на трансверсали AD, обладающей свойствомъ, выражаемымъ равенствомъ (1).

§ 6. Разсматриваемая трансверсаль можетъ быть построена слѣдующимъ образомъ. Опустимъ высоту треугольника AH и отложимъ на линіи AH въ томъ же направленіи отрѣзокъ AH_1, опредѣляемый равенствомъ

$$AH_1 = \frac{BC^2}{AH}.$$

Окружность, описанная на AH_1, какъ на діаметрѣ, имѣя съ описанною окружностью треугольника ABC общую точку въ A, пересѣчетъ ее въ нѣкоторой другой точкѣ E. Если D будетъ точка пересѣченія прямыхъ BC и AE, то изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ AHD и AH_1E имѣемъ:

$$\frac{AD}{AH_1} = \frac{AH}{AE}$$

откуда

$$AD \,.\, AE = AH \,.\, AH_1 = \overline{BC}^2,$$

слѣдовательно, прямая AE есть искомая трансверсаль. Построеніе трансверсали AE всегда возможно. Если $AB = AC$, то AE параллельна BC.

§ 7. На основаніи вышеизложеннаго можно рѣшить слѣдующую задачу.

Для даннаго треугольника ABC найти точку N, такъ чтобы три точки: N, N_1—изогонально-сопряженная съ N, и N_2—изотомически-сопряженная съ N лежали на одной прямой, параллельной одной изъ сторонъ треугольника.

Положимъ, что прямая $N N_1 N_2$ параллельна сторонѣ BC. Сохраняя предыдущія обозначенія, можемъ условіе задачи выразить слѣдующимъ равенствомъ:

$$\frac{NA}{ND} = \frac{N_1A}{N_1D_1} = \frac{N_2A}{N_2D_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18).$$

Точка N должна лежать на трансверсали AD, построеніе которой намъ извѣстно. Для полнаго опредѣленія положенія точки N достаточно знать отношеніе, въ которомъ отрѣзокъ AD дѣлится точкой N. Это отношеніе найдемъ изъ равенства (9), которое на основаніи (18) преобразуется въ слѣдующее:

$$\left(\frac{NA}{ND}\right)^2 = \frac{\overline{BC}^2}{BD \,.\, BD_2},$$

откуда

$$\frac{NA}{ND} = \pm \frac{BC}{\sqrt{BD \, . \, BD_2}}$$

или, такъ какъ $BD_2 = DC$,

$$\frac{NA}{ND} = \pm \frac{BC}{\sqrt{BD \, . \, DC}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Построивъ вышеуказаннымъ (§ 6) способомъ трансверсаль AD, вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлимъ отрѣзки BD и DC, а затѣмъ уже на основанiи (19) не трудно построить искомую точку N. Двойственность знака во второй части равенства (19) показываетъ, что на трансверсали AD могутъ существовать двѣ точки, удовлетворяющiя условiю задачи: одна дѣлитъ трансверсаль AD внутренне, другая—внѣшне. Но для того чтобы построенiе той или другой точки на основанiи формулы (19) было возможно, необходимо, чтобы въ знаменателѣ подъ радикаломъ была положительная величина, т. е., чтобы

$$BD \, . \, DC > 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Опредѣлимъ, какая зависимость должна существовать между отрѣзками треугольника ABC, чтобы неравенство (20) было выполнено. Изъ равенства (14) въ связи съ равснствомъ

$$BD + DC = BC$$

найдемъ

$$BD = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} \cdot BC, \quad DC = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} \cdot BC.$$

Пользуясь найденными выраженiями, неравенство (20) приводимъ къ слѣдующему:

$$\frac{(\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2)(\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2)}{(\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2)^2} \cdot \overline{BC}^2 > 0,$$

которое, очевидно, эквивалентно съ неравенствомъ:

$$(\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2)(\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2) > 0,$$

а раздѣливъ это послѣднее на

$$(BC + AB)(AC + BC),$$

получимъ:

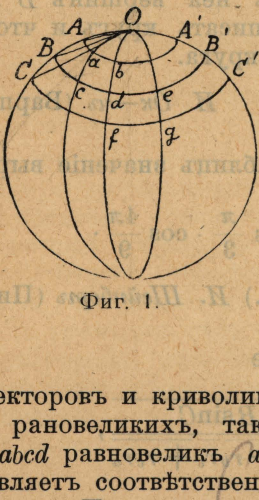
$$(BC - AB)(AC - BC) > 0,$$

откуда видимъ, что для возможности построенiя точки N необходимо, а вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно, чтобы сторона BC треугольника заключалась по величинѣ между двумя другими сторонами. Изъ трехъ сторонъ разносторонняго треугольника всегда найдется одна и только одна сторона, удовлетворяющая этому условiю. Слѣдовательно, для даннаго разносторонняго треугольника всегда можно найти двѣ и только двѣ точки удовлетворяющiя условiю задачи.

Елецъ Орл. губ. *М. Зиминъ*

Замѣтка о сферическихъ фигурахъ.

Поверхность шарового сегмента равна площади круга, имѣющаго радіусъ равный хордѣ, соединяющей вершину сегмента съ любой точкой окружности основанія (опредѣленіе Архимеда). Если проведемъ на шарѣ съ полюсомъ O рядъ параллельныхъ круговъ и изъ точки O′ на плоскости опишемъ рядъ концентрическихъ круговъ радіусами OA, OB, OC и т. д., то внутренній кругъ и кольца L, M и т. д будутъ равновелики соотвѣтственно сегменту OAA′ и поясамъ ABA′B′, BCB′C′ и т. д. Проведя на шарѣ рядъ равноотстоящихъ меридіановъ и изъ центра круга столько же равнонаклоненныхъ радіусовъ, разобьемъ поверхность шара на рядъ сферическихъ трехъ-и четырехугольниковъ, а площадь круга



Фиг. 1.

Фиг. 2.

на рядъ секторовъ и криволинейныхъ четырехугольниковъ соотвѣтственно рановеликихъ, такъ что напр. сферическій четыреугольникъ $abcd$ равновеликъ $a'b'c'd'$, $defg = d'e'f'g'$, ибо каждый изъ нихъ составляетъ соотвѣтственно одну и туже часть своего пояса и своего кольца. Поэтому, *если на шарѣ начертить какой нибудь замкнутый контуръ, то его можно перенести на плоскость съ сохраненіемъ площади ограниченной фигуры.* Въ самомъ дѣлѣ: первую площадь можно разсматривать какъ сумму безконечнаго множества безконечно малыхъ сферическихъ четыреугольниковъ, а вторую какъ сумму *такого-же* числа безконечно малыхъ криволинейныхъ четыреугольниковъ; такъ какъ слагаемыя первой суммы соотвѣтственно равны слагаемымъ второй, то обѣ суммы равны.

Такимъ образомъ измѣреніе площади сферической фигуры можно свести къ измѣренію площади плоской, каковое можно произвести хотя-бы при помощи планиметра.

К. С.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

№ 589. Рѣшить систему уравненій:

$$x+y=a,$$
$$\sqrt[4]{m+x}+\sqrt[4]{n+y}=d.$$

С. Адамовичъ (Двинскъ).

№ 590. Построить треугольникъ, если извѣстно положеніе центра круга вписаннаго, средины одной изъ его сторонъ и точки пересѣченія биссектора противолежащаго этой сторонѣ угла съ описанной около искомаго треугольника окружностью.

Мясковъ (Слонимъ).

№ 591. Построить четыреугольникъ $ABCD$ по діагонали его AC и по даннымъ разстояніямъ отъ нея вершинъ D и B, зная, что около четыреугольника можно описать кругъ и что діагональ BD проходитъ черезъ центръ этого круга.

И. Ок—чъ (Варшава).

№ 592. Найти безъ помощи таблицъ значеніе выраженія

$$\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}\cdot$$

(Заимств.) *И. Шейнбергъ* (Пинскъ).

№ 593. Доказать, что выраженіе

$$\frac{a}{2\sin A}\sqrt{\frac{a\sin B\sin C}{\sqrt{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}}},$$

гдѣ a сторона треугольника, A, B, C его углы, r_a, r_b, r_c радіусы внѣвписанныхъ окружностей, есть средняя пропорціональная между радіусами круговъ вписаннаго и описаннаго.

Багадуръ Маллачи-Ханъ (Темиръ-Ханъ-Шура).

№ 594. Вольтаметръ даетъ въ минуту 120 куб. цм. водорода при 20^0 и давленіи 750 мм., причемъ упругость водяного пара, насыщающаго пространство при данной температурѣ, равна 17 мм. Опредѣлить силу тока, если извѣстно, что 1 амперъ даетъ въ секунду 117 куб. мм. водорода при нормальныхъ условіяхъ и что коэффиціентъ расширенія газа равенъ 0,004.

(Заимств.) *М. Г.*

ЗАДАЧИ.

№ 7. Ареометръ Никольсона, служащій для опредѣленія удѣльнаго вѣса твердыхъ тѣлъ, состоитъ изъ полаго поплавка, къ которому неподвижно прикрѣплена сверху чашечка для накладыванія разновѣсокъ, а снизу—чашечка для взвѣшиванія испытуемаго тѣла въ жидкости, служащая обыкновенно и балластомъ. Конструкторъ желаетъ дать полому поплавку форму цилиндра, заканчивающагося двумя конусами, причемъ діаметръ основанія цилиндра равенъ половинѣ его высоты, а высота каждаго изъ конусовъ равна радіусу его основанія, т. е. радіусу основанія цилиндра. Верхняя чашечка, служащая для накладыванія разновѣсокъ, прикрѣплена къ проволочному стержню длиною въ a сантиметровъ, направленному по продолженію оси полаго поплавка, а нижняя чашечка имѣетъ форму закрытой конической коробки, обращенной вершиной внизъ; радіусъ основанія этого конуса равенъ радіусу основанія цилиндрической части поплавка, а высота его равна радіусу. Взвѣшиваемый грузъ кладется на основаніе этого конуса, которое отстоитъ отъ вершины нижняго изъ конусовъ поплавка на b сантиметровъ. Для изготовленія полаго поплавка и нижней коробки конструкторъ желаетъ употребить металлическій листъ, толщина котораго равна d, а удѣльный вѣсъ δ.

Пренебрегая вѣсомъ верхней чашечки прибора, стержня, соединяющаго ее съ поплавкомъ, и тѣхъ частей, которыя соединяютъ съ поплавкомъ нижнюю коническую коробку, и предполагая, что помѣщенный на верхнюю чашечку грузъ сосредоточенъ на концѣ проволочнаго стержня, т. е. на разстояніи a сантиметровъ отъ поплавка, вычислить въ сантиметрахъ діаметръ основанія поплавка и въ граммахъ вѣсъ свинца, который надо влить въ нижнюю коническую коробку для балласта, если требуется, чтобы приборомъ можно было пользоваться для опредѣленія удѣльнаго вѣса тѣлъ, вѣсящихъ не болѣе p граммовъ, и чтобы приборъ оставался при этомъ въ устойчивомъ равновѣсіи въ водѣ.

В. Гернетъ (Одесса).

№ 8. Пусть

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ .\ .\ .\ .\ \pi \quad (1)$$

рядъ всевозможныхъ положительныхъ чиселъ, взаимно простыхъ съ цѣлымъ числомъ M и не большихъ M. Показать, что удвоенная сумма всевозможныхъ произведеній по данному нечетному числу множителей взятыхъ изъ ряда (1), дѣлится на M.

Теорема остается вѣрной, если вмѣсто ряда чиселъ (1) подставимъ рядъ всевозможныхъ положительныхъ чиселъ, не большихъ M и не взаимно простыхъ съ M.

Е. Буницкій (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 375 (3 сер.). *Показать, что*

$$\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^2+\left(\frac{r_b}{h_b}\right)^2+\left(\frac{r_c}{h_c}\right)^2=\frac{8R^2+r^2-p^2}{2r^2},$$

гдѣ r, r_a, r_b, r_c *суть радіусы вписаннаго и внѣвписанныхъ въ треугольникъ круговъ,* R — *радіусъ описаннаго около того же треугольника круга.* h_a, h_b, h_c — *высоты треугольника, а* p — *его полупериметръ.*

Пусть a, b, c будутъ стороны треугольника, и пусть

$$a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2-a^3-b^3-c^3=d.$$

Изъ равенствъ

$$\frac{r_a}{h_a}=\frac{a}{-a+b+c},\quad \frac{r_b}{h_b}=\frac{b}{a-b+c},\quad \frac{r_c}{h_c}=\frac{c}{a+b-c};$$

$$(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)=d-2abc$$

находимъ:

$$\frac{r_b}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}=\frac{6abc-d}{d-2abc}, \qquad (1)$$

$$\frac{r_a}{h_a}\cdot\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_a}{h_a}\cdot\frac{r_c}{h_c}+\frac{r_b}{h_c}\cdot\frac{r_c}{h_c}=\frac{a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2-3abc}{(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)},$$

$$2\left(\frac{r_a}{h_a}\cdot\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_a}{h_a}\cdot\frac{r_c}{h_c}+\frac{r^b}{h_b}\cdot\frac{r_c}{h_c}\right)+\frac{1}{2}-\frac{(a+b+c)^3}{2(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}=$$

$$=\frac{2d-20abc}{2(d-2abc)}=\frac{d-10abc}{d-2abc}.$$

Такъ какъ

$$\frac{(a+b+c)^3}{2(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}=\frac{p^2}{2r^2},$$

то

$$2\left(\frac{r_a}{h_a}\cdot\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_a}{h_a}\cdot\frac{r_c}{h_c}+\frac{r_b}{h_b}\cdot\frac{r_c}{h_c}\right)=\frac{d-10abc}{d-2abc}-\frac{r^2-p^2}{2r^2} \qquad (2)$$

Изъ равенствъ (1) и (2) получимъ:

$$\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^2+\left(\frac{r_b}{h_b}\right)^2+\left(\frac{r_c}{h_c}\right)^2=\left(\frac{6abc-d}{d-2abc}\right)^2-\frac{d-10abc}{d-2abc}+\frac{r^2-p^2}{2r^2}.$$

Но

$$\left(\frac{6abc-d}{d-2abc}\right)^2-\frac{d-10abc}{d-2abc}=\frac{16a^2b^2c^2}{(d-2abc)^2}=$$

$$=\frac{16a^2b^2c^2}{(-a+b+c)^2(a-b+c)^2(a+b-c)^2}=\frac{8R^2}{2r^2},$$

а потому

$$\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^2+\left(\frac{r_b}{h_b}\right)^2+\left(\frac{r_c}{h_c}\right)^2=\frac{8R^2+r^2-p^2}{2r^2}.$$

М. Зиминъ (Орелъ); *С. Адамовичъ* (Двинскъ).

№ 423 (2 сер.). *На сторонахъ прямоугольнаго треугольника построены внѣшніе квадраты. Называя центръ квадрата, построеннаго на гипотенузѣ* BC *черезъ* x, *на катетѣ* AC — *черезъ* y *и на катетѣ* AB — *черезъ* z, *показать, что*

1) прямая Ax *равна и перпендикулярна* zy,

2) треугольникъ xyz *равномѣренъ четыреугольнику* ABxC,

3) прямыя, соединяющія вершины треугольника съ центрами квадратовъ, построенныхъ на противоположныхъ сторонахъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

4) прямая, соединяющая вершину остраго угла съ центромъ квадрата, построеннаго на катетѣ, противолежащемъ этому углу, равна прямой, соединяющей центръ квадрата, построеннаго на гипотенузѣ съ центромъ квадрата, построеннаго на другомъ катетѣ.

1) Такъ какъ углы BAC и BxC прямые, то четыреугольникъ $ABxC$ вписуемъ въ окружность. Поэтому

$$\angle xAC = \angle xBC = \frac{\pi}{4},$$

а потому прямая xA перпендикулярна къ прямой Ay, или къ прямой zy, что все равно, такъ какъ точки z, A, y лежатъ на одной прямой. Опустивъ изъ точекъ B и C перпендикуляры BK и CL на прямую Ax, находимъ, что треугольники KBx и LxC равны, такъ какъ

$$Bx = xC,$$

и углы xBK и LxC, какъ составленные перпендикулярными сторонами равны между собою. Слѣдовательно

$$Kx = LC = Ay.$$

Изъ этого равенства и равенства

$$KA = zB = zA$$

находимъ:

$$xA = KA + Kx = zA + Ay = zy.$$

2) Изъ параллельности прямыхъ zB, Ax и yC слѣдуетъ, что треугольники Azx и Ayx равномѣрны соотвѣтственно треугольникамъ ABx и ACx. Слѣдовательно треугольникъ zyx равномѣренъ четыреугольнику $ABxC$.

4) Прямоугольные треугольники Axy и Cyz равны, такъ какъ

$$Ax = yz,\ Ay = yC.$$

Слѣдовательно

$$Cz = xy.$$

3) Изъ равенства треугольниковъ Axy и Cyz имѣемъ:

$$\angle Axy = \angle yCz,$$

а потому

$$Cz \perp xy.$$

Точно также найдемъ, что

$$By \perp zx.$$

Итакъ [см. 1)] прямыя Ax, By, Cz суть высоты треугольника xyz. Слѣдовательно онѣ пересѣкаются въ одной точкѣ.

А. П. (Пенза); *В. Шишаловъ* (с. Середа); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 451 (3 сер.). *На сторонахъ* AD *и* BC *даннаго четыреугольника* ABCD *выбраны соотвѣтственно точки* J *и* J′ *такъ, что*

$$\frac{AJ}{JD}=\frac{BJ'}{J'C}=\frac{AB}{CD}.$$

1⁰. *Показать, что прямая* JJ′ *параллельна биссектору угла между прямыми* AB *и* CD.

2⁰. *Если* A′ *и* B′ *суть точки, соотвѣтственно симметричныя точкамъ* A *и* B *относительно прямой* JJ′, *то прямыя* DA′ *и* CB′ *пересѣкаются на* JJ′.

3⁰. *Если* O *есть точка пересѣченія прямыхъ* DA′ *и* CB′, *то треугольники* OCD *и* AOB *подобны.*

1⁰. Если прямыя AB и CD параллельны, то изъ равенства

$$\frac{AJ}{JD}=\frac{BJ'}{J'C}$$

вытекаетъ

$$JJ' \parallel AB \parallel CD$$

Мы больше не будемъ возвращаться къ этому предположенію, лишь облегчающему послѣдующія доказательства, а потому предположимъ, что прямыя AB и CD пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ X. Построимъ параллелограммы JDCL и JABK. Тогда имѣемъ

$$\frac{BK}{CL}=\frac{AJ}{JD}=\frac{BJ'}{J'C}=\frac{AB}{CD}=\frac{JK}{JL}. \qquad (1)$$

Изъ пропорціи (см. 1)

$$\frac{BK}{CL}=\frac{BJ'}{J'C}$$

и равенства угловъ KBJ′ и LCJ′ вытекаетъ подобіе треугольниковъ KBJ′ и LCJ′, а потому

$$\angle CJ'L=\angle BJ'K,$$

откуда заключаемъ, что точки L, J′, K лежатъ на одной прямой и что фигура KJ′LJ есть треугольникъ.

Изъ подобія тѣхъ же треугольниковъ

$$\frac{KJ'}{J'L}=\frac{BJ'}{J'C},$$

или (см. 1)

$$\frac{KJ'}{J'L}=\frac{JK}{JL}.$$

Слѣдовательно прямая JJ' есть биссекторъ угла LJK. Принимая во вниманіе равенство угловъ AXD и LJK, а также параллельность прямыхъ JK и AB, убѣждаемся, что прямая JJ' параллельна биссектору XJ угла AXD.

2°. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что прямыя AB и CD наклонены къ прямой JJ' подъ равными, но противоположно направленными углами. То же можно сказать и о симметричныхъ относительно оси JJ' прямыхъ AB и $A'B'$. Отсюда слѣдуетъ, что прямыя DC и $A'B'$ наклонены къ прямой JJ' подъ равными и одинаково направленными углами; слѣдовательно онѣ параллельны.

Отсюда вытекаетъ, что

$$\Delta A'OB' \sim \Delta DOC \qquad (2)$$

гдѣ O — точка встрѣчи прямыхъ $A'D$ и $B'C$. *)

Изъ этого подобія имѣемъ:

$$\frac{A'O}{A'D} = \frac{A'B'}{A'B' - DC},$$

или, замѣчая, что симметричныя прямыя AB и $A'B'$ равны, —

$$\frac{A'O'}{A'D} = \frac{AB}{AB - DC}. \qquad (3)$$

Пусть M — точка пересѣченія прямыхъ AA' и JJ' и DN — перпендикуляръ, опущенной изъ точки D на прямую JJ'. Пусть O' — точка встрѣчи прямыхъ $A'D$ и JJ' (эти прямыя могутъ быть параллельны лишь въ случаѣ $AB = CD$). Пользуясь парами подобныхъ треугольниковъ $A'MO'$ и DNO', AMJ и NDJ, равенствомъ $AM = A'M$ и однимъ изъ равенствъ (1), находимъ:

$$\frac{A'O'}{A'D} = \frac{A'M}{A'M - DN} = \frac{AM}{AM - DN} = \frac{AJ}{AJ - DJ} = \frac{AB}{AB - DC},$$

откуда слѣдуетъ (см. 3), что

$$A'O' = AO,$$

т. е. точки O и O' совпадаютъ. Другими словами прямыя $A'D$, $B'C$ и JJ' пересѣкаются въ точкѣ O.

3°. Замѣняя въ подобіи (2) треугольникъ $A'OB'$ симметричнымъ и равнымъ ему треугольникомъ AOB, находимъ:

$$\Delta OCD \sim \Delta AOB.$$

Я. Полушкинъ (Знаменка); *Н. С.* (Одесса); *М. Зиминъ* (Орелъ).

---

*) Прямыя эти параллельны лишь въ случаѣ $AB = CD$. Но тогда $A'D \parallel BC \parallel JJ'$, что предоставляемъ доказать читателю.

№ 493 и **517** (3 сер.) (№ 493). *Показать что при цѣлыхъ значеніяхъ* m *и* n *число*

$$mn(m^4 - n^4)$$

кратно 30-ти.

(№ 517). *Доказать, что при цѣлыхъ значеніяхъ* m *и* n *число*

$$mn(m^{60} - n^{60})$$

дѣлится на

$$2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13 \; 31 . 61 = 56786730.$$

Пусть

$$A = p_1 . p_2 . p_3 \ldots p_k ,$$

гдѣ

$$p_1 , p_2 , p_3 \ldots p_k$$

суть простыя числа и пусть положительное число M дѣлится на каждое изъ этихъ простыхъ чиселъ, уменьшенное на единицу.

Тогда число

$$mn(m^M - n^M)$$

дѣлится на A при любыхъ цѣлыхъ значеніяхъ m и n

Дѣйствительно, такъ какъ M дѣлится по предположенію на $p_1 - 1$, то и числа $m^M - 1$, $n^M - 1$ дѣлятся соотвѣтственно на числа $m^{p_1-1} - 1$, $n^{p_1-1} - 1$ Поэтому, если ни m ни n не кратны числа p_1, то числа $m^M - 1$ и $n^M - 1$ кратны p_1. такъ какъ по теоремѣ Фермата $m^{p_1-1} - 1$ и $n^{p_1-1} - 1$ дѣлятся въ этомъ случаѣ на p_1. Слѣдовательно разность

$$m^M - n^M = (m^M - 1) - (n^M - 1)$$

дѣлится на p_1, если ни m ни n не дѣлятся на p_1. Если же одно изъ чиселъ m или n дѣлится на p_1, то mn тоже дѣлится на p_1. Значитъ число

$$mn(m^M - n^M)$$

всегда дѣлится на p_1.

Повторяя предыдущее разсужденіе относительно любого изъ чиселъ

$$p_2 , p_3 \ldots p_k$$

найдемъ, что

$$mn(m^M - n^M)$$

дѣлится на каждое изъ нихъ и потому дѣлится на A.

Полагая

$$A = 2 . 3 . 5 = 30$$

имѣемъ, что числа

$$2 - 1,\ 3 - 1,\ 5 - 1, \text{ т. е. } 1,\ 2\ \ 4$$

суть дѣлители числа 4.

Поэтому число

$$mn(m^4 - n^4)$$

всегда дѣлится на 30 при m и n цѣлыхъ.

Полагая

$$A = 2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13 . 31 . 61 = 56786730,$$

находимъ, что числа

$$2-1,\ 3-1,\ 5-1,\ 7-1,\ 11-1,\ 13-1,\ 31-1,\ 61-1$$

суть дѣлители 60-ти.

Значитъ при m и n цѣлыхъ число

$$mn(m^{60} - n^{60})$$

дѣлится на

$$56786730.$$

Правильныя рѣшенія задачи № 493 прислали: *С. Адамовичъ* **(Двинскъ);** *Я. Полушкинъ* (Знаменка); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *И. Поповскій* (Умань); *И. Шейнбергъ* (Пинскъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону). **Правильныя рѣшенія задачи № 517 прислали:** *Я. Шатуновскій* (Вознесенскъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *Кязымбекъ Годжаманбековъ* (Баку).

№ 495 (3 сер.). *Показать, что во всякомъ треугольникѣ*

$$\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2} + \frac{1}{2r_3} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2};$$

$$\frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r} = p^2,$$

гдѣ r, r_1, r_2, r_3 *суть радіусы вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ,* h, h_1, h_2 — *высоты, а* p — *полупериметръ треугольника.*

Изъ уравненій

$$s = pr = (p-a)r_1 = (p-b)r_2 = (p-c)r_3 \qquad (1)$$

гдѣ a, b, c — стороны, а s — площадь треугольника, находимъ:

$$\frac{1}{2r} = \frac{p}{2s},\ \frac{1}{2r_1} = \frac{p-a}{2s},\ \frac{1}{2r_2} = \frac{p-b}{2s},\ \frac{1}{2r_3} = \frac{p-c}{2s},$$

а потому

$$\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2} + \frac{1}{2r_3} = \frac{4p-(a+b+c)}{2s} = \frac{p}{s}.$$

Съ другой стороны

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} = \frac{a}{2s} + \frac{b}{2s} + \frac{c}{2s} = \frac{p}{s}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2} + \frac{1}{2r_3} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}.$$

Опредѣляя изъ уравненій (1) r, r_1, r_2, r_3, найдемъ:

$$r=\frac{s}{p},\ r_1=\frac{s}{p-a}\cdot r_2=\frac{s}{p-b},\ r_3=\frac{s}{p-c}.$$

Перемноживъ почленно три послѣднихъ изъ этихъ четырехъ равенствъ и раздѣливъ полученное равенство на первое изъ нихъ, найдемъ:

$$\frac{r_1 r_2 r_3}{r}=\frac{s^2 p}{(p-a)(p-b)(p-c)}=p^2.$$

С. Адамовичъ (Двинскъ); *П. Полушкинъ* (с. Знаменка); *И. Поповскій* (Умань); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону).

№ 498 (3 сер.). *Токъ отъ* 100 *элементовъ Бунзена проходитъ въ цѣпи, внѣшнее сопротивленіе которой равно* 10 *омамъ. Опредѣлить, какова будетъ сила тока батареи изъ 100 элементовъ, расположенныхъ въ 4 ряда по 25 элементовъ въ каждомъ? Какъ нужно расположить элементы, чтобы сила тока въ цѣпи была наибольшая?*

Электродвижущая сила элемента Бунзена — 1,9 вольта; внутреннее сопротивленіе этого элемента — 0,1 ома.

Полагая, что элементы въ ряду соединены послѣдовательно, а ряды—параллельно, воспользуемся формулой

$$f=\frac{nl}{\frac{nr}{m}+R},$$

гдѣ l — электродвижущая сила элемента, n — число элементовъ въ ряду, m — число рядовъ, r — внутреннее и R — внѣшнее сопротивленіе, f — искомая сила тока. Тогда получимъ:

$$f=\frac{25 . 1{,}9}{\frac{25\ \ 0{,}1}{4}+10}=4\frac{8}{17}\text{ амп.}$$

Внутреннее сопротивленіе цѣпи

$$\frac{nr}{m}=\frac{n . 0{,}1}{\left(\frac{100}{n}\right)}=\frac{n^2}{1000}$$

при наибольшей силѣ тока должно равняться внѣшнему. Слѣдовательно

$$\frac{n^2}{1000}=10,$$

откуда

$$n=100,$$

т. е. элементы должны быть соединены послѣдовательно.

Я. Полушкинъ (Знаменка); *И. Поповскій* (Умань); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону).

№ 500 (3 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$7346\ 7^{secx} + 7^{1+secx} - 7010 \cdot 7^{2secx} - 7^{3+2secx} + 3\ \ 7^{2+3secx} = 147.$$

Пусть
$$7^{secx} = y.$$

Тогда данное уравненіе приметъ видъ

$$7346y + 7y - 7010y^2 - 343y^2 + 147y^3 = 147,$$

или

$$147(y^3 - 1) = 7353y(y - 1).$$

Раздѣливъ обѣ части уравненія на $y - 1$, находимъ при этомъ корень

$$y_1 = 1,$$

или

$$7^{secx} = 1,$$

откуда

$$secx = 0.$$

Это рѣшеніе не удовлетворяетъ вопросу, такъ какъ по абсолютной величинѣ

$$secx \not< 1.$$

По раздѣленіи на $y - 1$ получимъ

$$147(y^2 + y + 1) = 7353y;\ 49(y^2 + y + 1) = 2451,$$

или

$$49y^2 - 2402y + 49 = 0$$

откуда

$$y = \frac{1201 \pm \sqrt{(1201) - 49^2}}{49};\ y_2 = 49;\ y_3 = \frac{1}{49}.$$

Слѣдовательно

$$7^{secx} = 49 \text{ и } 7^{secx} = \frac{1}{49},$$

откуда

$$x = 180n^0 \pm 60^0,$$

гдѣ n можетъ быть нулемъ и всякимъ цѣлымъ числомъ.

Я. Полушкинъ (Знаменка); *В. Шидловскій* (Полоцкъ); *И. Поповскій* (Умань); *С. Бужинскій* (Новочеркасскъ; *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону); *В. Жеребко* (Умань).

ОТЧЕТЫ О ЗАСѢДАНІЯХЪ УЧЕНЫХЪ ОБЩЕСТВЪ.

Математическое Отдѣленіе Педагогическаго Общества, состоящаго при ИМПЕРАТОРСКОМЪ Московскомъ Университетѣ.

1898—99 учебный годъ.

Отдѣленіе было открыто 30 октября 1898 года, причемъ предсѣдателемъ былъ избранъ профессоръ *Б. К. Млодзѣевскій*, товарищемъ его *Ѳ. С. Коробкинъ* и секретарями: *А. С. Алферова* и *Д. Д. Галанинъ*. Засѣданія Отдѣленія происходятъ втеченіе учебнаго времени, разъ въ мѣсяцъ, въ зданіи Московскаго Университета, и состоятъ изъ чтенія и обсужденія рефератовъ научно-педагогическаго содержанія, педагогическихъ бесѣдъ по отдѣльнымъ вопросамъ преподаванія, разсматриванія моделей и учебныхъ пособій и приборовъ, относящихся къ преподаванію математики и проч.

Въ 1898—99 году доклады дѣлали слѣдующія лица:

Б. К. Млодзѣевскій—1. Простой выводъ формулы сочетаній съ повтореніями и примѣненіе ея къ опредѣленію числа членовъ многочлена. 2. О геометрическомъ отношеніи.

Д. Д. Галанинъ—О преподаваніи математики въ средней школѣ.

М. Ѳ. Бергъ—О безконечныхъ рѣшеніяхъ уравненій.

Н. А. Рыбкинъ—Замѣчанія: 1) къ статьѣ о непрерывныхъ дробяхъ; 2) къ статьѣ о правильныхъ многоугольникахъ.

А. Ѳ. Гаттлихъ—Евклидъ и Джонъ Валлисъ (изъ теоріи параллельныхъ линій).

А. Н. Шапошниковъ—Замѣтка о начальныхъ теоремахъ геометріи.

1899—900 учебный годъ.

Составъ должностныхъ лицъ Отдѣленія остается тотъ-же, за исключеніемъ отказавшагося отъ должности секретаря *Д. Д. Галанина*, на мѣсто котораго избранъ *І. И. Чистяковъ* Послѣднее засѣданіе Отдѣленія состоялось 11 февраля. Доклады до сихъ поръ были сдѣланы слѣдующаго содержанія:

А. Ѳ. Гаттлихъ—Н. И. Лобачевскій (изъ теоріи параллельныхъ линій).

А. К. Власовъ, *С. П. Виноградовъ*, *Д. Ѳ. Егоровъ* — Объ конкурсныхъ испытаніяхъ по математикѣ въ Императорскомъ Московскомъ Инженерномъ Училищѣ.

А. Н. Шапошниковъ—Объ относительномъ положеніи двухъ окружностей

А. А. Дмитровскій—Доказательство трансцендентности числа π.

І. И. Чистяковъ—1) О построеніи простѣйшихъ алгебраическихъ выраженій. 2) Объ одномъ вопросѣ изъ теоріи maximum и minimum.

Н. К. Вальцовъ—1) О рѣшеніи геометрическихъ задачъ на вычисленіе. 2) Доказательство нѣкоторыхъ теоремъ геометріи.

Б. К. Млодзѣевскій—О трисекціи угла (2 сообщенія).

Д. Д. Галанинъ—О желательномъ измѣненіи обычнаго курса математики въ 3-мъ классѣ гимназій (два доклада).

Слѣдующее засѣданіе Отдѣленія назначено на 17 марта 1900 г.

І. Чистяковъ.

Варшавскій Кружокъ Преподавателей Физики и Математики.

Засѣданіе 5 декабря 1899 г.

Въ $7^1/_2$ час. вечера, въ физической аудиторіи Университета подъ предсѣдательствомъ *Н. М. Бородича,* состоялось закрытое засѣданіе Варшавскаго Кружка преподавателей физики и математики.

I. Слушали:

1) Протоколъ предыдущаго засѣданія,

2) Слѣдующія сообщенія:

а) *В. Л. Влодарскаго*: „Къ вопросу о распредѣленіи учебнаго матеріала по математикѣ въ VIII классѣ гимназій". Сообщеніе вызвало замѣчаніе со стороны Д. П. Петрова

b) *С. Е. Троцевича.*: „О приготовленіи объективовъ". Сообщеніе сопровождалось демонстрированіемъ изготовленныхъ г. С. Е. Троцевичемъ объективовъ и нѣкоторыхъ употреблявшихся при ихъ изготовленіи приборовъ. Нѣсколько замѣчаній сдѣлано по поводу этого сообщенія Н. М. Радивановскимъ и П. А. Зиловымъ, при чемъ первый изъ нихъ представилъ собранію небольшую освѣтительную лампу къ микроскопу, изготовленную имъ самимъ.

с) *А. А. Трусевича*: „Демонстрація нѣкоторыхъ школьныхъ опытовъ". Сообщеніе вызвало замѣчаніе со стороны С. Е. Троцевича и Ф. И. Ростовцева.

II. По предложенію г. Товарища Почетнаго Предсѣдателя *П. А. Зилова* постановлено просить гг. дѣлающихъ сообщенія представлять краткое содержаніе ихъ сообщеній въ архивъ Кружка.

23 декабря.

Въ $7^1/_2$ час. вечера, въ физической аудиторіи Университета подъ предсѣдательствомъ *Н. М. Бородича,* состоялось открытое, экстренное засѣданіе Варшавскаго Кружка преподавателей физики и математики, на которомъ г. *Корчаковъ* демонстрировалъ усовершенствованный имъ фонографъ. По готовымъ уже фонограммамъ были воспроизведены многія музыкальныя и вокальныя піесы; затѣмъ были записаны музкальный и вокальный отрывки въ присутствіи собранія и сейчасъ повторены фонографомъ.

Демонстрированію фонографа профессоръ П. А. Зиловъ предпослалъ краткій историческій очеркъ фонографа.

Засѣданіе 20 января 1900 г.

Въ $7^1/_2$ час. вечера, въ физической аудиторіи Варшавскаго Университета, подъ предсѣдательствомъ *Н. М. Бородича,* состоялось закрытое засѣданіе Варшавскаго Кружка преподавателей физики и математики.

I. Товарищъ Почетнаго Предсѣдателя *П. А. Зиловъ*, сказалъ краткую рѣчь, посвященную памяти скончавшагося 6 января с. г. Почетнаго Предсѣдателя Кружка В. Н. Лигина, память котораго присутствующіе почтили вставаніемъ.

II, Заслушаны и утверждены:

Протоколъ предыдущаго засѣданія и годовой отчетъ секретаря за 1899 г.

III. Единогласно избранъ въ Почетные члены Кружка Помощникъ Попечителя Варшавскаго Учебнаго Округа В. М. Добровольскій.

IV. Приняты въ дѣйствительные члены А. Д. Крохинъ, А. С. Гіевскій и Вульфензонъ.

V. Заслушаны сообщенія:

a) *А. А. Трусевича:* „Къ вопросу объ элементарномъ преподаваніи магнитизма".

Сообщеніе вызвало замѣчанія со стороны П. А. Зилова, Н. И. Радивановскаго, Ф. И. Ростовцева и В. А. Савицкаго.

b) *Ф. И. Ростовцева:* „Нѣкоторые опыты по акустикѣ".

c) *П. А. Зилова:* „Цвѣта тонкихъ пластинокъ и цвѣтная фотографія Липмана".

1 февраля.

Въ $7^1/_2$ час. вечера, въ физической аудиторіи Университета подъ предсѣдательствомъ *Н. М. Бородича*, состоялось засѣданіе Варшавскаго Кружка преподавателей физики и математики.

Первая часть была открытой и здѣсь выслушано было сообщеніе *А. А. Трусевича* „Стробоскопъ".

На второй части закрытой заслушаны:

a) Протоколъ предыдущаго засѣданія;

b) Предложеніе Правленія о порученіи въ нынѣшнемъ году исполненія обязанностей библіотекаря члену Правленія И. Я. Бѣляеву.

c) Сообщеніе *И. К. Окоемова*: „По поводу мнѣнія П. А. Некрасова о преподаваніи математики въ гимназіяхъ".

Ф. Ростовцевъ.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

Bulletin de la Société Astronomique de France.

№ 7—1898.

Occultation de Vénus. G. A. 22 мая, вскорѣ послѣ заката солнца, въ нѣкоторыхъ мѣстахъ Европы удалось наблюдать довольно рѣдкое явленіе: покрытіе Венеры луной. Луна имѣла видъ тончайшаго серпа (на второй день послѣ новолунія) и надвигалась на Венеру слѣд. своей невидимой частью. Вслѣдствіе параллакса явленіе представлялось неодинаково изъ разныхъ мѣстъ. Благодаря дурной погодѣ не удалось подмѣтить особенностей этого явленія.

Soc. Astr. de France. Séance du 1 Juin 1898.

Chute des graves. Divergence de verticales — déviation en latitude. *H. de la Fresnaye.* Принимая во вниманіе, что отклоненіе падающихъ тѣлъ къ Югу отъ вертикали происходитъ какъ отъ сжатія земли, такъ и отъ ея вращенія, Фреенэ вычислилъ величину отклоненія въ зависимости отъ каждой изъ этихъ причинъ и получилъ величину во всякомъ случаѣ менѣе 0.1 мил. для паденія съ высоты въ 200 м. подъ 45^0 шир., что не согласуется съ наблюденной во Фрейбергѣ величиной въ 43 мил.

Largeur des raies du Spectre des étoiles et vitesse de rotation de ces astres. *A. Souleyre.* Такъ какъ есть основаніе полагать, что звѣзды кромѣ поступательнаго движенія имѣютъ и вращательное около своихъ осей и такъ какъ линейныя скорости этихъ движеній - величины одного порядка, то это обстоятельство должно отразиться на ихъ спектрахъ: разъ звѣзда вращается около оси, то одна часть ея удаляется отъ насъ, другая приближается; спектральная линія должна поэтому раздвоиться на двѣ слагающихъ, отступающихъ къ противуположнымъ концамъ спектра—линія должна расшириться; ширина линіи должна быть наибольшей, когда щель спектроскопа лежитъ въ одной плоскости съ осью звѣзды, и наименьшей, когда щель и ось взаимно перпендикулярны. Отсюда вытекаетъ:

1) спектроскопъ можетъ дать возможность опредѣлить положеніе оси,

2) слагающую линейной скорости вращенія по направленію луча зрѣнія — на основаніи измѣренія перемѣщенія *края* линіи,

3) радіальную слагающую скорости поступательнаго движенія -- на основаніи перемѣщенія *средины* линіи.

Въ перемѣнныхъ звѣздахъ спектроскопъ можетъ обнаружить существованіе двухъ осей.

Photographies de la chromosphère entière du Soleil. *H. Deslandres* Наблюденія надъ хромосферой начались послѣ того, какъ Жансенъ и Локьеръ показали возможность наблюдать ее постоянно, ставя щель спектроскопа касательно къ изображенію солнца въ фокальной плоскости объектива зрительной трубы; наблюденія производились только глазомъ, такъ какъ попытка Lohse'а (1887 г) фотографировать оказалась неудачной вслѣдствіе слабаго дѣйствія на фотографическую пластинку красныхъ водородныхъ лучей Еще въ 1872 г. Юнгь открылъ въ спектрѣ протуберанцевъ двѣ линіи H и K въ фіолетовой части, линіи приписываемыя кальцію. Въ 1891 г. Hale изъ Чикаго и Деляндръ нашли, что свѣтъ этихъ линій обладаетъ сильнымъ фотографическимъ дѣйствіемъ. Благодаря этому явилась возможность при помощи спектрографа съ двумя щелями, построеннаго Hale и затѣмъ усовершенствованнаго Деляндромъ, фотографировать и ту часть хромосферы, которая проэктируется на дискъ солнца. Вторая щель этого прибора даетъ возможность выдѣлить лучи линій H и K изъ другихъ лучей спектра. Сопоставленіе обыкновенной фотографіи солнца съ фотографіей хромосферы для того же момента обнаруживаетъ нѣкоторое соотвѣтствіе: Факеламъ т. е. болѣе яркимъ и высокимъ частямъ фотосферы соотвѣтствуютъ болѣе свѣтлыя мѣста хромосферы, пятна вполнѣ или отчасти покрыты свѣтлыми частями хромосферы, какъ видно изъ приложенныхъ къ статьѣ фотографій. Къ этому спектрографу, имѣющемуся въ Парижской Обсерваторіи, Деляндръ присоединилъ еще другой „автоматическій спектрографъ скоростей", отмѣчающій скорость паровъ хромосферы по направленію луча зрѣнія.

Du dédoublement des canaux de Mars. *Schiaparelli*, *Antoniadi*, *Moreux*. Въ мартовскомъ засѣданіи Французскаго Астрономическаго Общества, послѣ того какъ Антоніади предложилъ свою оптическую гипотезу двоенія каналовъ Марса, былъ продѣланъ опытъ Менье: металлическій шаръ съ изображеніемъ каналовъ Марса, покрытъ кисеей; при боковомъ освѣщеніи каналы казались двойными вслѣдствіе того, что рядомъ съ каналомъ было видно его отраженіе по поверхность кисеи. Скіапарелли не согласенъ съ обѣими гипотезами; съ послѣдней потому, что каналы не такъ и не въ тѣхъ мѣстахъ двоятся, какъ должно бы быть на этой гипотезѣ; что касается гипотезы Антоніади, то она еще въ 1882 г приходила въ голову Скіапарелли, но тщательныя изслѣдованія его убѣдили, что монокулярной диплопіи приписать явленія нельзя.—Антоніади противъ гипотезы Менье высказываетъ также нѣкоторыя соображенія: условія опыта Менье не одинаковы съ тѣми, кои имѣются на Марсѣ; у Менье шаръ имѣетъ поверхность полированную, между тѣмъ какъ у Марса слѣдуетъ предположить шероховатую, дающую разсѣяніе свѣта, а не правильное отраженіе; кромѣ того, пришлось бы допустить у Марса существованіе атмосферы слишкомъ высокой, заходящей за орбиту второго спутника, что совсѣмъ невѣроятно. — Морё въ пользу гипотезы Антоніади приводитъ нѣкоторыя соображенія, основанныя на строеніи кристалика человѣческаго глаза; кристаликъ состоитъ изъ секторовъ (у ребенка 6, у взрослаго 12 - 14); если ретина не въ фокусѣ, то точка на ней изобразится у ребенка шестью точками, составляющими вершины правильнаго шестиугольника, а у взрослаго множествомъ точекъ или кругомъ; прямая, какъ непрерывный рядъ точекъ должна изобразиться четырьмя или тремя рядами точекъ у ребенка и двумя параллельными полосками съ зазубренными внутренними краями у взрослаго. При вооруженномъ зрѣніи эти обстоятельства усиливаются. Еще болѣе усиливаетъ ихъ волненіе атмосферы: въ то время какъ въ закрытомъ помѣщеніи ошибка въ установкѣ фокуса должна доходить до 2—3 мил. для того чтобы вызвать указанное явленін, при волненіи атмосферы достаточно ошибиться въ фокусѣ на 0,2—0,3 мил. Въ томъ же направленіи дѣйствуетъ еще одно обстоятельство: кристалликъ не можетъ долго находиться въ состояніи напряженія и испытываетъ періодически очень малыя колебанія, производя такимъ образомъ періодическія измѣненія въ аккомодаціи.

Для объясненія происхожденія каналовъ Марса Морё приводитъ слѣдующій опытъ: каучуковый шаръ, покрытый гипсомъ или парафиномъ, подвергался расширенію; смотря по толщинѣ облекающаго слоя на немъ появлялись трещины разнаго вида; при возрастаніи сопротивленія, онѣ стремились образовываться по большимъ кругамъ, пересѣкавшимся подъ прямымъ угломъ. Если принять согласно Лижонде, что Марсъ образовывался медленно, что матерія наслаивалась постепенно на ядро, то каждый новый слой охлаждаясь долженъ былъ давать трещины, подобныя описаннымъ.

Nouvelles de la Science. Variétés.

Le ciel du 15 Juillet au 15 Août.

№ 8—1898.

La photographie de la Lune. *Loewy et Puiseux.* Статья содержитъ подробное описаніе приложенныхъ къ ней фотографій луны, заимствованныхъ изъ луннаго атласа Леви и Пюизе. Снимки изображаютъ: циркъ Коперникъ съ окрестностями части Mare humorum и Mare Imbrium часть луны между Arzachel, Bouillaud и Kopernic, сѣверо-восточную часть Mare Imbrium. Авторы на основаніи тщательнаго изученія этихъ мѣстностей пытаются опредѣлить порядокъ нѣкоторыхъ лунныхъ образованій. Такъ напримѣръ относительно Mare humorum и его окрестностей имъ кажется вѣроятнымъ такой порядокъ:

1) появленіе цирковъ Gassendi и Hippalus,

2) опусканіе центральной части Mare humorum, распространившееся постепенно до окружающихъ его цирковъ,

3) обильное изліяніе въ опустившуюся часть жидкой массы и частичное разрушеніе цирковъ,

4) отвердѣніе излившихся массъ и образованіе трещинъ подъ вліяніемъ новыхъ пониженій,

5) появленіе на пути трещинъ отверстій для изліянія жидкой массы.

Въ пользу такого взгляда говорятъ отчасти разрушенные валы цирковъ, небольшая ихъ глубина, расположеніе трещинъ особенно около Hippalus, извилистыя возвышенія въ самомъ морѣ и т. д. Относительно Sinus Iridum высказывается предположеніе, что это остатокъ бывшаго цирка, нѣчто переходное между моремъ и собственно циркомъ; на это намекаютъ возвышенныя полоски идущія отъ мыса Лапласа къ мысу Гераклиду и какъ бы замыкающія этотъ заливъ со стороны моря.

Aspect actuel de la planète Jupiter. *H. У. Childs* Наблюденія 7—16 Апрѣля 1897 г. на Обсерваторіи Waugh въ Портландѣ Особенности Юпитера за это время слѣдующія: общій тонъ планеты желтоватый, южная умѣренная полоса одиночная, южная экваторіальная двойная и широкая, оживленная дѣятельность въ экваторіальной части (свѣтовыя и темныя пятна, дорожки), сѣверная экваторіальная полоса одиночная и довольно узкая, сѣверная умѣренная чуть замѣтна.

Histoire de la couronne solaire. *Hansky.* Первое наблюденіе солнечной короны встрѣчается у Плутарха при описаніи затменія 98 г. Первую попытку объяснить это явленіе сдѣлалъ Кеплеръ, предложивши двѣ гипотезы: согласно первой —это воспламененный близъ солнца эѳиръ, по второй, принятой большинствомъ астрономовъ того времени, это лунная атмосфера, освѣщенная солнечными лучами. Противъ такого объясненія первымъ возсталъ Кассини, считавшій на основаніи наблюденія покрытія звѣздъ луну лишенной маломальски плотной атмосферы. Затѣмъ корона наблюдаема была въ 1706 г. въ Парижѣ, въ 1715 г. въ Лондонѣ и въ 1724 году въ Парижѣ. Кассини (сынъ), наблюдавшій вмѣстѣ съ другими астрономами затменіе 1709 г. приписалъ явленіе той же причинѣ, которая производитъ зодіакальный свѣтъ; согласно Кассини во время полнаго солнечнаго затменія мы видимъ болѣе интенсивную часть той свѣтящейся матеріи, которая окружаетъ солнце, болѣе же слабыя ея части можно видѣть только тогда, когда не мѣшаетъ свѣтъ солнца или луны. Не смотря на предложенное Кассини объясненіе Louville, наблюдавшій затменіе въ 1715 г., всетаки приписываетъ корону лунной атмосферѣ. Во время этого затменія впервые замѣтили хромосферу. Послѣ того многіе пытались объяснить явленіе. Между прочимъ Delisle приписывалъ явленіе диффракціи свѣта. Затменіе 1724 г. ничего новаго для объясненія явленія не дало. Только въ 1842 г. Фузиніери попробовалъ получить спектръ короны и нашелъ, что въ немъ нехватаетъ зеленой части, между тѣмъ какъ мы знаемъ, что именно зеленая линія характерна для спектра короны Насколько извѣстенъ ея составъ въ настоящее время, мы можемъ сказать, что во внѣшнихъ частяхъ имѣется короній, въ болѣе внутреннихъ—водородъ, гелій, кальцій.

Eclipse de Lune du 3 Juillet 1898. Статья содержитъ массу наблюденій этого затменія, произведенныхъ различными наблюдателями въ разныхъ мѣстахъ. На основаніи совокупности всѣхъ этихъ наблюденій получаются такіе выводы: часть луны, погруженная въ тѣнь, казалась невооруженному глазу красноватой (разные наблюдатели различно оцѣниваютъ оттѣнки), въ зрительную трубу—сѣроватой; она была настолько свѣтла большую часть времени, что можно было видѣть болѣе крупныя подробности лунной поверхности напримѣръ моря Serenitatis, Crisium, Imbrium, Nectaris, горы Алтайскія, Рифейскія, Апиенины, кратеръ Тихо съ его лучами; незадолго до выхода луны изъ конуса тѣни Аристархъ блестѣлъ яркой точкой; граница затемненной части казалась сѣровато-пепельной съ голубоватымъ или зеленоватымъ отливомъ. Во время наибольшей фазы полной темноты не было, такъ что многіе наблюдатели могли различить млечный путь. — Получено много фотографій, на которыхъ красная—затемненная часть отсутствуетъ.

Nouvelles de la Science. Variétés.

Le ciel du 15 Août au 15 Septembre.

К. Смоличъ (Умань).

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ и БРОШЮРЫ.

169. **Отчетъ попечителя Кавказскаго учебнаго округа о состояніи учебныхъ заведеній за 1898 годъ.** Тифлисъ. 1899.

170. *М. С. Сегель*, приватъ-доцентъ Императорскаго Казанскаго Университета. **Опытъ примѣненія полосъ интерференціи къ изслѣдованію упругости мягкихъ тѣлъ** Казань. 1899.

171. Д-ръ мед. *Г. А. Масловъ*. **Къ ученію о центральныхъ тѣльцахъ.** Изъ гистологической лабораторіи Императорскаго Харьковскаго Университета. Харьковъ. 1899.

172. **Телэлектроскопъ Яна Щепаника.** *П. Бахметьева.* (Извлечено изъ журн. «Электричество», № 19 за 1898 г.).

173. **Отчетъ о положеніи изслѣдованія народнаго образованія въ Россіи,** производимаго Императорскимъ Вольнымъ Экономическимъ Обществомъ въ связи съ общимъ положеніемъ школьной статистики въ Россіи. (Читанъ *Г. А. Фальборкомъ* и *В. И. Чарнолускимъ* въ Общемъ Собраніи Вольнаго Экономическаго Общества 17-го апрѣля и въ Статистическомъ Отдѣленіи Московскаго Юридическаго Общества 22-го апрѣля 1898 года). СПб.

174. **Уставъ Варшавскаго Кружка преподавателей физики и математики.** 1899.

175. **Простое ученіе о воздушномъ кораблѣ и его построеніи.** *К. Ціолковскаго.* Особый оттискъ изъ журнала „Общедоступный Техникъ“. М. 1899. Ц. 80 к.

176. **Очеркъ исторіи оптики и исторіи оптическаго производства въ Россіи**. Составилъ оптикъ Императорской Военно-Медицинской Академіи и Императорскаго Клиническаго Института Великой Княгини Елены Павловны. Изданіе первое. Спб. 1899. Ц. 60 к. (Соч. И. Я. Урлауба).

177. **Историческій очеркъ Главной Физической Обсерваторіи за 50 лѣтъ ея дѣятельности**. 1849—1899. Составилъ Директоръ Обсерваторіи Академикъ М. Рыкачевъ. Часть I. Спб. 1899.

178. *Плято ф. Рейсснера*. **Новѣйшая Русско-Нѣмецкая Азбука „Самоучитель"** для обученія въ 1 мѣсяцъ нѣмецкому чтенію, письму и разговору съ образцами письма и картинками. XIV-ое изданіе. Варшава. 1898. Ц. 20 к.

179. **Die Bedeutung des osmotischen Druckes in der Thermodynamik der Lösungen**. Von *N. Schiller*. Separat-Abdruck aus d n Annalen der Physik und Chemie. Neue Folge. Band 67. 1899 Leipzig.

180. *Н. Н. Шиллеръ*. **Происхожденіе и развитіе понятій о „температурѣ" и о „теплѣ"**. (Критико-гносеологическій очеркъ) Кіевъ. 1899.

181. **Объ измѣненіи внутренней энергіи при разжиженіи растворовъ**. *Н. Н. Шиллера*. Кіевъ. 1899.

182. **Къ вопросу о строеніи артерій головного мозга и его оболочекъ**. *Авраамъ Ножниковъ*. Харьковъ. 1899

183. *I. Г. Беньковичъ*. **Какъ снаряжать и содержать въ исправности батарею (Лекланше) при электрическихъ звонкахъ**. Изд. П. О. Рабиновича. Москва. 1900. Ц. 10 к.

184. *I. Г. Беньковичъ*. **Какъ безъ мастера проводить и исправлять электрическіе телефоны**. Съ 17-ю рис. въ текстѣ. Изданіе П. О. Рабиновича. Москва. 1900. Ц. 35.

185. *Юнгъ*. **Солнце**. Второе изданіе русскаго перевода. Изданіе Т-ва „Знаніе" (№ 3. Общедоступная научная библіотека). Переводъ *Л. Г. Малиса*, хранителя при Обсерваторіи Спб. Университета. Спб. 1899. Ц. 1 р. 50 к.

186. *Клейнъ*. **Прошлое, настоящее и будущее вселенной**. Общедоступное изложеніе основныхъ космологическихъ вопросовъ. Изданіе второе. Изданіе Т-ва „Знаніе" (№ 2. Общедоступная научная библіотека). Переводъ *К. П. Пятницкаго*. Спб. 1900. Ц. 1 р. 50 к.

ПОПРАВКА.

Въ № 276 „Вѣстника" на стр. 308, 9-я строка снизу напечатано: „между ребромъ и плоскостью", должно быть: „между ребромъ и плоскостью основанія".

Редакторъ **В. А. Циммерманъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 15-го Марта 1900 г.

Типографія Г. М. Левинсона, Ришельевская, домъ № 19.

Обложка
ищется

Обложка
пщется