

Обложка
щется

Обложка
щется

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

28 Февраля

№ 292.

1901 г.

Содержаніе: Свойства твердыхъ тѣлъ подѣ давленіемъ, диффузія твердаго вещества, внутреннія движенія въ твердомъ веществѣ. W. Spring'a. Переводъ Д. Шора. — Какихъ результатовъ можно требовать отъ преподаванія элементарной алгебры, и какъ ее слѣдуетъ излагать. Пр.-Доц. В. Лермантова. — Рецензіи: Начала тригонометріи. И. Россоптовскаго. Д. Ефремова. — Научная хроника: † П. М. Покровский. Астрономическія извѣстія: Новая періодическая комета. Колебаніе яркости Эроты. Новое изданіе Механики Тихо де Браге. Новая звезда въ Персеѣ. Пр. Доц. К. Покровскаго. — Опыты для учащихся: Электризація бумаги. — Математическія мелочи: Окружность девяти точекъ. — Задачи для учащихся №№ 16—21 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ V—XI (4 сер.), (3-ей серіи) №№ 622, 623, 635. Списокъ лицъ, приславшихъ запоздавшія рѣшенія. Объявленія.

Свойства твердыхъ тѣлъ подѣ давленіемъ, диффузія твердаго вещества, внутреннія движенія въ твердомъ веществѣ.

W. Spring'a,

профессора университета въ Люттихѣ (Ліежѣ), члена Королевской Бельгійской Академіи. Переводъ Д. Шора въ Геттингенѣ.

Долгое время на основныя состоянія агрегаціи матеріи смотрѣли, какъ на состоянія, рѣзко разграниченныя другъ отъ друга, обладающія свойствами, достаточно характеристичными для того, чтобы устранить всѣ сомнѣнія относительно границъ между ними. Такого рода возрѣніе было естественнымъ слѣдствіемъ скудныхъ свѣдѣній о веществѣ, которыми обладала наука. Съ теченіемъ времени этотъ взглядъ долженъ былъ необходимо измѣниться.

На связь между газообразнымъ и жидкимъ состояніями былъ пролить свѣтъ многочисленными изслѣдованіями, начиная съ первыхъ опытовъ Фарадея надъ сжиженіемъ газовъ и кончая работами самаго послѣдняго времени.

Сравненіе твердыхъ тѣлъ съ жидкими привело точно также къ очень важнымъ наблюденіямъ; ихъ необходимо привести въ порядокъ.

Не эту задачу поставилъ себѣ авторъ настоящей статьи; его цѣль болѣе скромна: онъ ограничивается группировкой и резю-

мированіемъ результатовъ, выведенныхъ изъ специальныхъ изслѣдованій надъ свойствами твердыхъ тѣлъ подъ высокимъ давленіемъ. Если намъ удастся показать, что даль нынѣ этотъ факторъ — *давленіе* — и что онъ можетъ дать еще, наша цѣль будетъ достигнута.

Подраздѣленіе этой статьи дается самыми задачами, которыя ставили себѣ изслѣдователи. Мы будемъ различать работы, предпринятыя надъ:

- 1) пластичностью твердыхъ тѣлъ;
- 2) упругостью твердыхъ тѣлъ;
- 3) аллотропическими преобразованиями;
- 4) срастаніемъ или спаиваніемъ твердыхъ тѣлъ;
- 5) диффузіей твердыхъ тѣлъ;
- 6) химическими реакціями въ твердыхъ тѣлахъ.

1. **Пластичность твердыхъ тѣлъ.** — Tresca показалъ первый ¹⁾, что въ твердыхъ тѣлахъ при помощи давленія можно обнаружитъ нѣкоторыя свойства, на которыя до тѣхъ поръ смотрѣли, какъ на характеристичныя для жидкаго состоянія.

Онъ сдавливалъ посредствомъ гидравлическаго пресса различныя металлическія пластинки, наложенныя въ цилиндръ надъ отверстіемъ въ днѣ его, и замѣтилъ, что ребра пластинокъ не оставались параллельными: металлы вытекали изъ отверстія въ формѣ трубокъ, вложенныхъ одна въ другую. Когда высота *текущаго* куска достигаетъ нѣкотораго предѣла, струя становится *спалой* и, наконецъ, она распадается.

Нѣтъ нужды упоминать здѣсь о значеніи этихъ фактовъ для познанія природы твердаго состоянія. Старое опредѣленіе этого состоянія должно быть отброшено. Твердые тѣла не образуютъ обособленной группы; они отличаются отъ жидкихъ только большимъ *внутреннимъ треніемъ* (сопротивленіемъ стороннему относительному перемѣщенію двухъ молекулъ). Tresca вывелъ совершенно справедливо заключеніе, „что давленіе, оказываемое на какую-либо частичку твердаго тѣла, передается равномерно во всей массѣ.“ Другими словами, законы гидростатики и гидродинамики приложимы къ твердымъ тѣламъ, подверженнымъ высокому давленію.

При этомъ подразумѣвается, конечно, что это свойство твердыхъ тѣлъ, *текучесть*, мѣняется отъ одного вещества къ другому. Существуютъ тѣла, которыя, какъ напр. стекло и кварцъ, совершенно не текучи и не проходятъ черезъ отверстіе цилиндра Tresca или же рассыпаются въ болѣе или менѣе мелкій порошокъ.

¹⁾ *Comptes rendus*, t. LIX, p. 754; 1864. *Jd.*, t. LX, p. 398. *Jd.*, t. LXIV, p. 809. *Jd.*, t. LXVI, p. 263. *In extenso: Annales du Conservatoire des Arts et Metiers*, t. VI, p. 1—62; 1865.

2. **Эластичность твердых тѣлъ подѣ давленіемъ.**—Твердое тѣло деформируется, какъ только на него начинаютъ дѣйствовать механическія силы. Если перейти *предѣлъ упругости*, то деформация сохраняется. Ежедневное примѣненіе этого факта при формировкѣ тысячи металлическихъ предметовъ обиходнаго употребленія содѣйствовало тому, что многіе, часто даже изъ среды техниковъ, полагають, будто остаточная деформация можетъ быть произведена не только растяженіемъ, сгибаніемъ, крученіемъ, но также и равномернымъ, достаточно сильнымъ сдавливаніемъ. Думали вообще, что твердое состояніе матеріи претерпѣваетъ постоянное уменьшеніе объема, подобно тому, какъ оно претерпѣваетъ постоянное удлиненіе или сплющиваніе. Не мало содѣйствовало укрѣпленію этого мнѣнія тотъ фактъ, что твердыя тѣла, подвергавшіяся сдавливанію, пріобрѣтали обыкновенно большую плотность. Увеличеніе плотности приписывали не уменьшенію *пустотъ*, которыя должны существовать въ твердыхъ тѣлахъ, но конденсациі самой матеріи, влекущей за собой болѣе или менѣе замѣтное измѣненіе въ его твердости и ковкости. Болѣе смѣлые умы придерживались даже того взгляда, что при помощи внѣшняго сдавливанія возможно преобразование одного простого тѣла въ другое—болѣе плотное. Напримѣръ, считали возможнымъ, что сѣра порождаетъ селенъ, мышьякъ превращается въ сурьму.

Работы W. Spring'a ¹⁾ разъяснили этотъ вопросъ. Если сжимать твердыя тѣла въ *замкнутыхъ сосудахъ* одинаково во всѣхъ направленіяхъ, т. е. тѣмъ способомъ, которымъ достигается гидростатическое сдавливаніе, то оказывается, что уменьшеніе объема, вызванное давленіемъ, не сохраняется, какъ бы велика ни была *приложенная сила*. При уменьшеніи объема нѣтъ предѣла упругости; существуетъ только для каждаго даннаго давленія предѣлъ сжатія; но каково бы ни было уменьшеніе объема во время дѣйствія давленія, матерія принимаетъ всегда точно свой прежній объемъ, коль скоро давленіе прекращается. Итакъ, твердыя тѣла обладаютъ совершенною упругостью. Предѣлъ упругости появляется только въ случаѣ *сторонняго* относительнаго перемѣщенія частичекъ твердой матеріи. Вотъ вкратцѣ какъ были констатированы эти факты:

Твердыя тѣла вводились въ небольшой цилиндръ изъ твердой стали; внѣшній діаметръ послѣдняго былъ 4 сантиметра, а внутренний—только 8 миллиметровъ. Этотъ цилиндръ былъ, кромѣ того, скрѣпленъ желѣзнымъ обручемъ девяти сантиметровъ въ діаметрѣ. Замыкающій пистонъ плотно укрѣплялся въ цилиндрѣ ходомъ рычага, отягощеннаго нѣкоторымъ грузомъ, который можно было медленно опускать при помощи винта.

Твердыя тѣла, плотность которыхъ была опредѣлена предварительно, были подвергнуты первому сдавливанію, продолжавшемуся приблизительно три недѣли, послѣ чего ихъ плотность

¹⁾ *Bulletin de l'Acad. royale de Belgique*, 3-e série, t. VI, p. 507 и слѣд.; 1883.

опредѣлялась снова. Затѣмъ ихъ еще разъ вводили въ тотъ же аппаратъ, при чемъ констатировалось уменьшеніе объема по опусканію свободного конца плеча рычага. Когда удаляли грузъ, нажимавшій рычагъ, то послѣдній постепенно поднимался: *сжатая матерія принимала такимъ образомъ свой первоначальный объемъ*. Этотъ фактъ былъ доказанъ сверхъ того съ полною точностью опредѣленіемъ плотности послѣ второго сжиманія. Вотъ обзоръ полученныхъ результатовъ:

П л о т н о с т ь

п о с л ь

Сжимавшіяся вещества	передъ 1-ымъ сжатіемъ	1-го сжатія	2-го сжатія
1. Свинецъ . . .	11,350 при 14°, 0	11,501 при 14°	11,492 при 16°
2. Олово . . .	7,286 " 10	7,292 " 10	7,296 " 11
3. Висмутъ . . .	9,804 " 13,5	9,856 " 15	9,863 " 15
4. Сурьма . . .	6,675 " 15,5	6,733 " 15	6,740 " 16
5. Кадмій . . .	8,642 " 17	8,667 " 17	8,667 " 16
6. Алюминій . . .	2,743 " 16,4	2,752 " 16	2,750 " 16
7. Цинкъ . . .	7,142 " 16	7,153 " 16	7,150 " 16
8. Сѣрноокислый калій . . .	2,653 " 21	2,651 " 22	2,656 " 22
9. Сѣрноокислый аммоній . . .	1,773 " 20	1,750 " 12	1,760 " 22
10. Квасцы . . .	1,641 " 18	1,629 " 19	1,634 " 18

Эта таблица ясно показываетъ, что небольшое остаточное уменьшеніе объема между первымъ и вторымъ сжатіемъ зависитъ отъ особенностей металловъ. Послѣдніе растворяютъ, очевидно, газы, когда они расплавляются, и выпускаютъ ихъ изъ своей массы въ формѣ незамѣтныхъ пузырей во время отвердѣванія. Кристаллическія очень прозрачныя соли, какъ сѣрноокислый калий, не даютъ никакого остаточнаго измѣненія объема.

Итакъ, необходимо признать, что по отношенію къ упругости твердыя тѣла не отличаются подъ давленіемъ отъ жидкихъ и газообразныхъ. Разница состоитъ только въ томъ, что они не обладаютъ расширяемостью газовъ, а отъ летучести жидкостей у нихъ остается только слѣдъ.

Опыты Spring'a показали тѣмъ не менѣе, что на ряду съ тѣлами, безконечно упругими, существуютъ и такія, которыя послѣ сжатія сохраняютъ уменьшеніе объема. Для этихъ тѣлъ упругость при гидростатическомъ сдавливаніи имѣетъ такимъ образомъ предѣлъ. Сюда относятся тѣла, которыя въ твердомъ со-

стояніи обладаютъ нѣсколькими аллотропическими состояніями характеризующимися главнымъ образомъ замѣтною разницею въ плотности. Подвергая эти тѣла сдавливанію, можно наблюдать иногда остаточное уменьшеніе объема. Изслѣдованіе условий, при которыхъ этотъ результатъ можетъ быть достигнутъ, составитъ тему слѣдующаго параграфа.

3. Аллотропическія преобразованія твердыхъ тѣлъ. — Многія тѣла обладаютъ свойствомъ кристаллизоваться въ различныхъ формахъ. Это свойство мы называемъ *аллотропией* или *полиморфизмомъ*. Законы, управляющіе переходомъ одного изъ этихъ состояній въ другое, напоминаютъ законы измѣненія состояній агрегаціи (жидкаго, твердаго и газообразнаго). Такъ, температура является при этомъ главнымъ факторомъ. Напримѣръ, сѣра кристаллизуется въ форму, называемую *призматической*, при температурѣ, превосходящей $95^{\circ},6$, въ то время какъ при всѣхъ температурахъ ниже этой точки получается разновидность, называемая *октаэдрической*, которая только и бываетъ устойчива. Отсюда видно, что эти измѣненія подобны *плавленію* и *кипѣнію*; выше 0° жидкая вода находится въ устойчивомъ состояніи, между тѣмъ какъ ниже этой точки только ледъ устойчивъ; при 0° же оба состоянія могутъ существовать одновременно въ соприкосновеніи съ паромъ, который они испускаютъ. Температура, при которой два аллотропическихъ состоянія могутъ находиться въ равновѣсїи, какъ вода и ледъ при 0° , была названа *точкою преобразованія*. Послѣдняя, какъ и точка кипѣнія или точка плавленія, зависитъ отъ давленія. Термодинамика даетъ слѣдующее соотношеніе между измѣненіемъ температуры преобразованія и давленіемъ:

$$\frac{l}{\theta} = \frac{s - \sigma}{J} \cdot \frac{dP}{d\theta},$$

гдѣ l — скрытая теплота преобразованія; s и σ соответственно — удѣльные объемы двухъ аллотропическихъ состояній; $\frac{dP}{d\theta}$ — частная производная давленія по температурѣ, при постоянномъ объемѣ; J — механическій эквивалентъ тепла.

Можно написать:

$$(s - \sigma) \frac{dP}{d\theta} = J \frac{l}{\theta};$$

и такъ какъ второй членъ этого равенства положителенъ для всѣхъ тѣлъ, скрытая теплота преобразованія которыхъ положительна, то и первый членъ долженъ быть въ такомъ случаѣ положительнымъ, что равносильно требованію, чтобы $(s - \sigma)$ и $\frac{dP}{d\theta}$ были всегда одного и того же знака. Отсюда вытекаетъ, что для тѣлъ, которыя переходятъ изъ одного состоянія въ другое менее плотное, увеличеніе давленія произведетъ поднятіе точки преобразованія, и обратно.

Ж. Н. Вант-Гофф и Рейхер ¹⁾ исследовали, одинъ теоретически, другойъ практически, случай преобразования октаэдрической сѣры въ призматическую. Они нашли вычисленіемъ, что $\frac{d\theta}{dP}$ имѣетъ значеніе 0,049, а опытнымъ путемъ 0,050 градусовъ на атмосферу; замѣчательно такое согласіе результатовъ.

Обратный случай встрѣчается рѣже. Первый, который былъ вполне исследованъ,—это преобразование *гексагональнаго* іодистаго серебра въ *кубическое*. Mallard и Le Chatelier ²⁾ показали, что это преобразование, которое совершается только при 146° подъ нормальнымъ давленіемъ, имѣетъ мѣсто уже при 20° подъ давленіемъ въ 2475 атмосферъ. Въ послѣднемъ случаѣ послѣ преобразования получается уменьшеніе на 0,16 объема, т. е. въ десять разъ большее, чѣмъ при 146°.

Едва ли будетъ необходимо отмѣтить, какъ далеко идетъ аналогія между аллотропическимъ преобразованиемъ твердыхъ тѣлъ и измѣненіемъ состояній агрегаций. Для этихъ послѣднихъ, главное правило состоитъ въ томъ, что при той же температурѣ и томъ же давленіи удѣльный объемъ жидкости больше удѣльнаго объема твердаго тѣла, отъ котораго она произошла. Сжимая твердыя тѣла, наблюдаютъ *поднятіе точки плавленія*. Доказательство этого факта дано было Бунзеномъ ³⁾ уже давно при посредствѣ *парафина* и *спермцета*. Увеличеніе давленія приблизительно на 100 атмосферъ возвышаетъ точку плавленія парафина на 2,6 градуса, а спермцета на 2,0 градуса.

Наоборотъ, сжимая жидкости, можно достигнуть ихъ отвердѣванія, когда давленіе станетъ достаточно высокимъ. Первый сюда относящійся опытъ былъ произведенъ уже въ 1851 году ⁴⁾.

Было констатировано, что если подвергать оливковое масло давленію въ 60 атмосферъ, то отвердѣваетъ большая часть его. Когда давленіе не больше 35-ти атмосферъ, масло снова принимаетъ свое жидкое состояніе и становится опять прозрачнымъ.

Позже Амага ⁵⁾ приводилъ *хлористый углеродъ* (C_2Cl_4) въ твердое состояніе при помощи сжатія. Онъ нашелъ, что отвердѣваніе происходило:

при 210 атмосферахъ, когда температура была—	19° 5
„ 620 „ „ „ „ „	0
„ 900 „ „ „ „ „	10
„ 1160 „ „ „ „ „	19,5.

¹⁾ *Etudes de Dynamique Chimique*, p. 152. Amsterdam, 1884.

²⁾ *Comptes rendus*, t. XCIX, p. 157—160, 1884.

³⁾ *Ann. de Poggendorf*, t. LXXXI, p. 562, 1850.

⁴⁾ *Dingler's polyt. Journal*, t. CXX, p. 393. (Извлеченіе безъ имени автора изъ *Intelligenz-Blatt des oesterreich. Ingenieur-Vereines*).

⁵⁾ *Comptes rendus*, t. CV, p. 165; 1887.

Предыдущіе случаи преобразованія относятся къ матеріи въ состояніи *неустойчиваго равновѣсія*; мы уже упомянули о преобразованіи сѣры выше и ниже $95^{\circ},6$.

Теперь мы рассмотримъ дѣйствіе давленія на вещество твердыхъ тѣлъ въ *неустойчивомъ состояніи*.

Чтобы облегчить себѣ опредѣленіе этого *неустойчиваго состоянія*, мы будемъ продолжать пользоваться примѣромъ, который представляетъ сѣра.

Если медленно охлаждать призматическую сѣру, образовавшуюся при высокой температурѣ, то ее можно довести до обыкновенной температуры, не измѣняя при этомъ ея состоянія. Это и есть случай вещества въ *неустойчивомъ состояніи*. Это состояніе можно сравнить съ состояніемъ воды, которую удалось охладить до температуры ниже 0° , принимая требуемая предосторожности, чтобы избѣжать оледенѣнія. Итакъ, вообще говоря, тѣла могутъ сохранять ниже своей точки преобразованія состояніе, которое свойственно имъ выше этой точки, но они находятся, въ такомъ случаѣ, въ *неустойчивомъ состояніи*.

Каково дѣйствіе давленія на вещество въ этомъ состояніи? Этотъ вопросъ W. Spring изслѣдовалъ съ 1880 года ¹⁾. Вотъ вкратцѣ полученные имъ результаты.

Призматическая сѣра переходитъ въ *октаэдрическое* болѣе плотное состояніе черезъ небольшой промежутокъ времени подъ давленіемъ въ 5000 атмосферъ. Также пластическая разновидность сѣры, получаемая, какъ извѣстно, охлажденіемъ въ холодной водѣ сѣры, нагрѣтой предварительно до 300° , принимаетъ кристаллическое *октаэдрическое* состояніе. Однако, это послѣднее преобразование требуетъ болѣе продолжительнаго времени. Если извлечь сѣру изъ сжимателя послѣ нѣсколькихъ часовъ сдавливанія, то она оказывается еще мягкой въ центральной части цилиндра. Послѣ нѣсколькихъ дней сдавливанія преобразование закончено, между тѣмъ какъ другая проба пластической сѣры, сохраняемая для контроля въ тѣхъ же условіяхъ температуры, не измѣняется сколько-нибудь замѣтнымъ образомъ.

Аморфный мышьякъ, плотность котораго 4,71, преобразуется, при тѣхъ же условіяхъ, въ болѣе плотную кристаллическую разновидность. Черезъ нѣсколько дней плотность сжимаемой пробы становится—4,9. Такъ какъ кристаллическій мышьякъ имѣетъ плотность 5,71, то не трудно вычислить, что послѣ этого времени приблизительно четверть всей массы была преобразована.

Еще болѣе интересенъ слѣдующій результатъ:

¹⁾ Bull. de l'Acad. royal de Belgique, 2-e série, t. XLIX, p. 323. См. также: Bull. de l'Acad. royal de Belgique, 3-e série, t. V, p. 492; 1883. *Id.*, 3-e série, t. V: p. 229; 1883. *Id.*, 3-e série, t. VI, p. 523; 1883. *Id.*, 3-e série, t. XXVIII, p. 238, 1894.

Твердые хлористый, бромистый и йодистый калий были известны только въ одномъ состояніи. Путемъ сдавливанія открыли, что они обладаютъ двумя состояніями. Дѣйствительно, если подвергать давленію въ 10000 атмосферъ при обыкновенной температурѣ твердыя соли, полученныя медленнымъ охлажденіемъ ихъ расплавленной массы, то онѣ принимаютъ всегда *меньшій удѣльный объемъ* и переходятъ въ кристаллическое состояніе. Они принимали *стекловидное состояніе* послѣ отвердѣванія. При этомъ уменьшеніе объема таково, что напримѣръ, бромистый калий имѣетъ на 200 граммовъ большую массу въ литрѣ послѣ сжатія (2,704 килограммовъ вмѣсто 2,505).

Если же не подвергать этихъ трехъ тѣлъ энергичному сдавливанію, то они долго, если не безконечно, сохраняютъ свое *стекловидное* состояніе. Слѣдовательно, сжатіе разстроило въ короткое время, состояніе неустойчиваго равновѣсія. Существованіе галоидныхъ солей калия въ двухъ различныхъ состояніяхъ было подтверждено J.-S. Stas'омъ ¹⁾ въ его „*Исслѣдованіяхъ объ отношеніи серебра къ хлористому калию.*“

Эти преобразованія состояній подъ вліяніемъ давленія показываютъ, что матерія принимаетъ то состояніе, которое соответствуетъ объему, придаваемому ей. При обыкновенныхъ условіяхъ давленія твердыя тѣла измѣняются и кристаллизуются порою самопроизвольно съ весьма различною скоростью, когда они находятся въ неустойчивомъ состояніи. Если же они находятся подъ сильнымъ давленіемъ, то они измѣняются съ болѣею скоростью; но сжиманіе производитъ только такое преобразованіе, которое возможно независимо отъ него.

Однако, слѣдуетъ быть очень осторожнымъ при опѣнкѣ роли давленія въ настоящемъ случаѣ. W. Spring сдавливалъ до самой высокой степени, но безъ всякаго результата *черную сѣрнистую ртуть*, въ надеждѣ вызвать переходъ ея въ красную кристаллическую разновидность. Между тѣмъ удѣльный объемъ черной сѣрнистой ртути на 9 процентовъ больше удѣльнаго объема *киновари*. Подобная неудача сопровождала сжиманіе стекловидной *мышьяковистой кислоты* и стекла, которыя не проявляли оба никакого слѣда преобразованія, каково бы ни было давленіе.

М. Moissan'у ²⁾, напротивъ того, удалось преобразовать *углеродъ*, растворенный въ чугуна, въ алмазъ подъ дѣйствіемъ давленія. Этотъ результатъ, полученный знаменитымъ французскимъ химикомъ, столь извѣстенъ, что мы можемъ не описывать всѣхъ деталей его опыта и не напоминать о приспособленіяхъ, которыя были устроены, чтобы отвердѣваніе чугуна произошло при высокомъ давленіи.

¹⁾ *Œuvres posthumes* (Mém. in 4^o de l'Académie de Belgique, t. XLIX, p. 22).

²⁾ *Comptes rendus*, t. CXVI, p. 218—224; 1893.

Въ итогѣ, если, съ одной стороны, сжиманіе не заставляетъ всѣ твердыя тѣла, способныя принимать различныя состоянія, переходить въ болѣе плотныя разновидности, то съ другой стороны, оно можетъ производить остаточное уплотненіе вещества только въ томъ случаѣ, если послѣднее имѣетъ болѣе плотное аллотропическое состояніе (см. тему предыдущаго параграфа).

Такимъ образомъ можетъ быть интересно прослѣдить сжиманіе вещества въ неустойчивомъ состояніи, гдѣ оно можетъ быть уподоблено состоянію *переплавленія* или *перенасыщенія*. Можно было бы, безъ сомнѣнія, собрать свѣдѣнія, въ особенности при помощи измѣненія температуры, объ относительной неустойчивости различныхъ веществъ. О. Lehmann констатироваль ¹⁾, съ своей стороны, что ни въ коемъ случаѣ *перемѣшиваніе* подъ давленіемъ кристаллическихъ тѣлъ не можетъ возвратитъ ихъ въ аморфное состояніе. Обратная задача—задача преобразованія аморфнаго состоянія въ кристаллическое—представляетъ, такимъ образомъ, многообещающую перспективу, если судить по нѣкоторымъ фактамъ, установленнымъ въ настоящее время.

Вышесказанное будетъ не лишнимъ сопоставить съ интересными опытами, которые произвелъ А. Villiers ²⁾ надъ преобразованиемъ *аморфнаго сѣрнистаго соединенія въ кристаллическое* во время замерзанія въ средѣ, въ которой оно было взвѣшено. Авторъ говоритъ самъ, что отнюдь нельзя считать невозможнымъ, чтобы сжатіе, происходящее во время замерзанія, играло активную роль.

Съ другой стороны, кристаллизація твердыхъ тѣлъ по наблюденіямъ W. Spring'a ³⁾ имѣетъ мѣсто помимо давленія. При поднятіи температуры до 250°, этотъ переходъ уже наблюдается безъ труда, если употреблять для опыта аморфные порошки сѣрнистыхъ металловъ. Большинство сѣрнистыхъ соединений даютъ микроскопическія кристаллы; другіе, напримѣръ сѣрнистое серебро и сѣрнистая сурьма, даютъ кристаллы, видимые простымъ глазомъ. Здѣсь дѣло идетъ о дѣйствительномъ перемѣщеніи молекулъ, изъ которыхъ образуются кристаллы. Такимъ образомъ внутри твердыхъ тѣлъ не все неподвижно. При нѣкоторой температурѣ молекулы обладают подвижностью, достаточно большою для того, чтобы ориентироваться и группироваться, какъ это происходитъ во время перехода изъ газообразнаго или жидкаго состоянія въ твердое. Опыты, произведенные при различныхъ температурахъ, показали, кромѣ того, что эта подвижность не прекращается и при обыкновенной температурѣ: движеніе происходитъ только съ болѣею медленностью; такъ напримѣръ, проба

¹⁾ Zeitschrift für Krystallographie, t. XVII, p. 269; 1889, и Wiedemann's Annalen, t. XL, p. 403; 1890.

²⁾ Bulletin de la Société chimique de Paris (3), t. XIII, p. 321—324; 1895.

³⁾ Bull. de l'Acad. royal de Belgique, 3-e série, t. XXX, p. 311—319; 1895.

сѣрнистаго висмута только черезъ одиннадцать лѣтъ, при обыкновенной температурѣ, приняла состояние, которое, при температурѣ въ 265°, возникаетъ черезъ девяносто часовъ.

Прежде чѣмъ окончить этотъ параграфъ, мы замѣтимъ еще, что преобразованія состояній, упомянутыя выше, абсолютно отличны отъ медленной кристаллизаціи, которую много разъ наблюдали въ всякаго давленія во влажныхъ аморфныхъ тѣлахъ. Последняя была изслѣдована въ особенности Büchner'омъ, Kuhlmann'омъ, Lehmann'омъ и Winkler'омъ ¹⁾. Эти физики показали, что небольшой слѣдъ сырости, осажденный на поверхности тѣла, можетъ вызвать преобразованіе послѣдняго. Поэтому-то аморфная разновидность часто легче растворима, чѣмъ кристаллическая. Растворъ аморфнаго вещества въ этомъ случаѣ играетъ, очевидно, ту же роль, что и пресыщенный растворъ при соприкосновеніи съ готовымъ кристаллическимъ зародышемъ: оно отдаетъ послѣднему вещество, необходимое для его роста.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Какихъ результатовъ можно требовать отъ преподаванія элементарной алгебры, и какъ ее слѣдуетъ излагать. *)

Приватъ-Доцента В. Лермантова въ С.-Петербурѣ.

Узнавъ изъ рецензіи моей „Примѣнимой Алгебры“, напечатанной въ „Вѣстникѣ Опытной Физики“ Г. Пр.-Доц. В. Каганомъ, какія именно особенности моего изложенія идутъ въ разрѣзъ съ общепринятыми взглядами и кажутся неправильными, я воспользуюсь любезностью Редакціи и попытаюсь изложить здѣсь мотивы, заставившіе меня ввести такія отступленія отъ обычая. И самую книжку свою я написалъ именно съ цѣлью вызвать обмѣнъ мыслей по поводу преподаванія точныхъ наукъ въ школахъ, не считывая на одобреніе большинства. Выбралъ я алгебру, предметъ, не составляющій моей специальности, потому что въ изложеніи этой науки особенно рѣзка разница между обычнымъ способомъ изложенія и тѣмъ, который я считаю наиболее цѣлесообразнымъ.

¹⁾ См. O. Lehmann, *Molekularphysik*, t. I, p. 724 и слѣд.

^{*)} Статья г. Лермантова, написанная по поводу помѣщенной въ № 286 рецензіи его книги, прислана намъ еще въ концѣ декабря. Но вслѣдствіе необходимости ликвидировать начатыя статьи, мы не имѣли возможности удѣлить ей мѣсто въ предыдущихъ номерахъ. *Ред.*

Въ частности, полное осужденіе моей книжки Рецензентомъ я вполне оправдываю: особенности моего изложенія должны были безпрестанно противорѣчить его взглядамъ, глубоко-ученаго чистаго математика, а то, почему я считалъ нужнымъ излагать многое иначе, чѣмъ изложилъ бы онъ самъ, ему оставалось неизвѣстнымъ.

Занимаясь болѣе 30 лѣтъ преподаваніемъ умѣнья дѣлать физическія измѣренія студентамъ СПб. Университета, я былъ поставленъ въ особенно благоприятныя условія для закулисныхъ педагогическихъ наблюденій. Примѣняя вынесенныя изъ гимназій знанія математики къ вычисленію своихъ опытовъ, наши студенты-первокурсники развѣртывали передъ моими глазами постоянно измѣняющуюся картину результатовъ гимназическаго преподаванія, на которой ярко отражались всѣ послѣдовательныя измѣненія системы. Съ другой стороны, по самому роду моихъ лаборантскихъ обязанностей, мнѣ пришлось изучить многія отрасли техники, имѣть близкое общеніе съ ремесленниками, узнавать чего они требуютъ отъ науки для своего обихода, и самому выучиться довольно основательно нѣсколькимъ ремесламъ. Все это дало мнѣ возможность лучше многихъ узнать, чего жизнь требуетъ отъ науки, и подмѣтить, такъ сказать изъ за кулисъ, многое въ ходѣ нашей образовательной машины, что не видно ни изъ партера для публики, ни изъ директорской ложи. Уже много лѣтъ, какъ результаты моихъ наблюденій сложились для меня въ видѣ немногихъ опредѣленныхъ положеній, и мнѣ стало ясно въ чемъ ошибки современной школы и въ какомъ направленіи надо дѣйствовать, чтобы ихъ избѣжать. Ошибки эти общи для всей системы преподаванія; поэтому я изложу ихъ въ общемъ видѣ, а для алгебры—въ частности—покажу, какъ, по моему мнѣнію, слѣдуетъ поставить ея преподаваніе.

Корень зла идетъ отъ Аристотеля (хотя онъ самъ въ этомъ злѣ ни мало не повиненъ): мы и теперь придерживаемся его рецепта для обученія „свободнаго юноши греческаго“, котораго слѣдовало обучать всему тому, что украшаетъ жизнь, избѣгая всего ремесленнаго, практическаго, ибо сіе есть удѣлъ рабовъ и Илотовъ. *) Свободный юноша греческій давно прекратилъ свое существованіе, а мы продолжаемъ обучать въ томъ же духѣ дѣтей современныхъ „Илотовъ и рабовъ“, которыя должны вынести изъ школы умѣнье зарабатывать свой хлѣбъ насущный.

Рецептъ аристотелевъ сохранился лишь по существу: подъ вліяніемъ средневѣковыхъ христіанскихъ идей и успѣховъ наукъ о природѣ въ наше время, эстетически-философское развитіе грековъ мало по малу замѣнено стараніемъ сообщить подростающему юношеству умственно-нравственное развитіе; неприкосновеннымъ осталось лишь тщательное обереганіе обучающагося отъ всего ремесленнаго, практическаго. Мало по малу сложился при-

*) См. Исторія Педагогикъ Шмидта пер. Циммермана 1877, Т. I, стр. 319.

близительно такой идеаль: „обучите юношу начаткамъ всѣхъ наукъ, сообщите ему умственное развитіе, т. е. умѣнье разсуждать, и онъ самъ примѣнитъ свои знанія къ тѣмъ житейскимъ требованіямъ, какія ему представятся“. Нѣтъ сомнѣнія, что этотъ идеаль прекрасенъ, что ничѣмъ другимъ мы его замѣнить не можемъ. Многія отдѣльныя личности оказались весьма близки къ этому идеалу, и ихъ успѣхи поддерживаютъ въ педагогахъ вѣру въ непереложность ихъ системы.

Однако, этихъ высоко-развитыхъ людей мы причисляемъ къ особенно талантливымъ, выдающимся личностямъ, а система общественнаго обученія необходимо должна быть рассчитана для среднихъ, заурядныхъ людей. Что-же такіе выносятъ изъ школы? Вѣдь они не достигаютъ значительной степени умственного развитія, не пріобрѣтаютъ умѣнья разсуждать самостоятельно, а выучиваются лишь дѣйствовать по указанному и сообразно изученнымъ примѣрамъ, „точно такъ, какъ учитель хочетъ.“ А примѣнимыхъ къ дѣлу правилъ и указаній ученикамъ сообщаютъ въ школѣ очень немного: только въ предѣлахъ т. наз. грамотности ихъ научаютъ умѣнью читать, писать, считать и молиться Богу по обычаямъ того вѣроисповѣданія, къ которому каждый принадлежитъ. Главное же вниманіе обращается на успѣшное исполненіе школьныхъ задачъ и на основы всѣхъ наукъ. Какъ же съ такимъ запасомъ успѣшно примѣнять самостоятельно свои знанія основаній всѣхъ наукъ? Вѣдь въ жизни встрѣчаются задачи, вовсе не похожія на школьныя упражненія.

На самомъ дѣлѣ школьныя знанія примѣняютъ неуспѣшно, или совсѣмъ примѣнить не могутъ; отсюда и происходитъ общее недовольство результатами обученія въ современныхъ школахъ, гдѣ учащіе и учащіяся тратятъ столько энергіи для достиженія идеала, хотя и прекраснаго, но завѣдомо недостижимаго для большинства. Не въ выборѣ преподаваемыхъ предметовъ заключается причина такого неуспѣха: всѣ они нужны и вносятъ свою долю идей, нужныхъ для обихода современнаго образованнаго человѣка, а въ выборѣ сообщаемыхъ фактовъ каждой науки, способѣ ихъ изложенія и направленія школьныхъ упражненій.

Чтобы выяснитъ въ немногихъ словахъ чего жизнь требуетъ въ настоящее время отъ школы, я выскажу почти догматически немногія положенія, выведенныя мною изъ моихъ продолжительныхъ наблюденій.

I. Въ жизни каждый примѣняетъ лишь разнаго рода умѣнья, изъ которыхъ многія всецѣло основаны на наукѣ. На самыя научныя знанія, не соединенныя съ умѣньемъ ихъ примѣнять, спроса вовсе нѣтъ. Чистая наука должна сама себя.

Лучшимъ доказательствомъ этого положенія можетъ служить тотъ фактъ, что исключенія удается подобрать только кажущіяся. Всякій въ жизни что либо дѣлаетъ, а для этого надо обладать соотвѣтственнымъ умѣньемъ, даже для благополучнаго „ничего-недѣланія“. Такъ какъ въ наше время многія изъ этихъ умѣній

основаны на примѣненіи научныхъ фактовъ, то часто призываютъ завѣдомыхъ ученыхъ къ участию въ чисто практическихъ дѣлахъ. Но въ такихъ случаяхъ отъ этихъ лицъ всегда требуютъ умѣнія указать, какъ поступать при стеченіяхъ обстоятельствъ, для которыхъ еще не было прецедентовъ. Если ученый не можетъ давать такого рода указаній, его называютъ „кабинетнымъ“, говорятъ, что „онъ, можетъ быть, очень много знаетъ, да примѣнять свои знанія не умѣетъ“, и стараются замѣнить другимъ, болѣе умѣлымъ. Только ученый, занимающійся какой либо самой непримѣнимой наукой, но получающій за свои знанія обезпеченное положеніе академика, составляетъ исключеніе. Однако всякому понятно, что это исключеніе кажущееся: учредитель такой синекуры имѣлъ въ виду, „что всѣ науки полезны“, и благоразумно не бралъ на себя отвѣтственности за исключеніе какой либо науки; исторія дала много примѣровъ, оправдывающихъ такую осторожность.

II. *Прирожденные способности учениковъ очень различны.* Вѣсьма немногіе (вѣроятно меньше 10% всѣхъ поступающихъ въ школы) способны приобрести умѣніе разсуждать самостоятельно въ такой высокой степени, чтобы удачно примѣнять хотя одинъ отдѣлъ своихъ знаній основаній всѣхъ наукъ, а большинство можетъ только выучиться дѣлать и мыслить „точно такъ, какъ учитель хочетъ“. Изъ числа этого большинства по крайней мѣрѣ половина ни мало не желаетъ вникнуть въ преподаваемое, а лишь отбиваетъ школьную повинность. Другіе проявляютъ сначала желаніе, хотя слабое, вникать въ немногіе изъ преподаваемыхъ предметовъ, но это вызываетъ обыкновенно болѣе небрежное отношеніе къ другимъ неизлюбленнымъ предметамъ и усиленное „подтягиваніе“ со стороны преподавателей, скоро отбивающее всякую охоту „вникать“ и развивающее умѣніе „дѣлать точно такъ, какъ учитель хочетъ.“ Такое природное неравенство способностей дѣлаетъ невозможнымъ успѣхъ преподаванія при существованіи одинаковыхъ требованій для всѣхъ учениковъ, когда умственное развитіе (т. е. умѣніе разсуждать) требуется и отъ лишенныхъ отъ природы этой способности. На дѣлѣ все сводится къ тому, что довольствуются суррогатомъ полезнаго умственнаго развитія, умѣніемъ отвѣчать и дѣлать школьныя упражненія точно такъ, какъ учитель хочетъ.

III. *Вообще, думать—для людей трудъ тяжкій, и они всячески стараются замѣнить непосредственное думаніе примѣненіемъ готовой формулы или прецедента.* Всѣ чисто умозрительныя науки идутъ этимъ путемъ готовыхъ рѣшеній. Лучшимъ примѣромъ могутъ служить теоремы Евклидовой геометріи, основанныя одна на другой. Поэтому и высоко-развитому человѣку понадобится очень много времени и труда, чтобы самому примѣнять самостоятельно усвоенныя имъ основы наукъ. Менѣе развитый техникъ, обученный готовымъ выводамъ—рецептамъ, перегонитъ его на обыденной работѣ. Силы свои высоко-развитый ученый долженъ примѣ-

нять лишь для вывода новыхъ формулъ—рецептовъ, когда въ нихъ встрѣтится надобность, а вывода вновь извѣстное другимъ, онъ добровольно ставитъ себя въ положеніе живущаго въ глуши самоучки.

Если эти три положенія (которыя я не развиваю здѣсь подробно лишь за недостаткомъ мѣста) *верны, то путь для улучшенія преподаванія очевиденъ: надо поступать и дальше такъ, какъ уже лѣтъ 50 стали поступать при преподаваніи грамотности.* Въ школахъ грамотности начинаютъ съ обученія умѣнно читать, писать и считать по навыку, а затѣмъ уже, по мѣрѣ возможности, внушаютъ и правила грамматики и ариѳметики. Очень многіе не усваиваютъ этихъ начатковъ научныхъ знаній, но все таки выносятъ изъ школы посильное умѣніе читать, писать и считать.

Такъ и при преподаваніи элементарной алгебры; надо бросить несбыточные мечтанія о сообщеніи всѣмъ ученикамъ „математическаго развитія“ (умѣнія самостоятельно рассуждать о математическихъ вопросахъ въ предѣлахъ преподаванія), такъ какъ это подъ силу лишь немногимъ изъ нихъ, достаточно одареннымъ отъ природы. Начинать надо просто съ сообщенія умѣнія рѣшать задачи алгебраическимъ методомъ. Алгебру начинаютъ въ третьемъ классѣ, гдѣ ученики лѣтъ 12—13; въ этомъ возрастѣ только начинаетъ развиваться способность къ отвлеченному мышленію: вѣдь дѣти мыслятъ образами. Не зная еще достаточно математическихъ фактовъ, начинающій еще не обладаетъ достаточнымъ количествомъ матеріала для самостоятельнаго мышленія. На этой стадіи обученія его можно лишь выучить бойко повторять рассужденія учителя, а это умѣніе обыкновенно принимается за посильное математическое развитіе. Значитъ, въ началѣ надлежитъ лишь сообщать доступнымъ для учениковъ языкомъ факты; о тонкостяхъ алгебраической науки еще не должно быть и рѣчи. Определенія необходимо давать завѣдомо не полныя, и вообще, ничего не сообщать въ запасъ, а лишь по мѣрѣ надобности: каждое правило или теорему тогда, когда въ ней предстоитъ надобность для рѣшенія задачъ. А доступныя тонкости алгебраическія, изученіе которыхъ можетъ служить для сообщенія математическаго развитія способнымъ, надо отложить до болѣе старшаго возраста.

Всѣ мы, достигшіе посильнаго математическаго развитія, воспріяли его не сразу, а путемъ многократныхъ повтореній, соединенныхъ съ распространеніемъ предѣловъ нашихъ знаній. Исключая необыкновенно даровитыхъ юношей, едва ли кто выносилъ изъ средняго училища столь высокую степень математическаго развитія, чтобы самостоятельно примѣнять свои знанія. Обыкновенно выучиваются лишь рѣшать задачи изъ своихъ задачниковъ. Только въ университетѣ, послѣ знакомства съ высшей математикой, вырабатывается пониманіе значенія статей курса гимназическаго, а такое же пониманіе курса университетскаго

получается лишь по его окончаніи у тѣхъ только, кто продолжалъ заниматься своей наукою. Къ выпускному экзамену такой степени знанія достигаютъ лишь немногіе, особливо талантливые студенты, да и то лишь по излюбленной специальности.

(Продолженіе слѣдуетъ).

РЕЦЕНЗІИ.

Начала тригонометріи (Гониометрія и прямолинейная тригонометрія), Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Составилъ преподаватель Прилукской гимназіи **И Россоптовскій**. Кіевъ. 1900. Цѣна 60 коп.

Учебникъ этотъ состоитъ изъ двухъ частей, раздѣляющихся на нѣсколько отдѣловъ, именно: Часть I. Гониометрія (§§ 1—19). Нахожденіе значеній тригонометрическихъ чиселъ (§§ 20—29). Распространеніе понятія о тригонометрическихъ числахъ на углы большіе 180° и отрицательные (§§ 30—43). Рѣшеніе тригонометрическихъ уравненій (§§ 44—49). — Часть II. Прямолинейная тригонометрія (§§ 1—17). Примѣненіе тригонометріи къ опредѣленію разстояній на мѣстности (§§ 18—22).

Въ предисловіи авторъ говоритъ: „Первые 29 §§ предлагаемаго руководства заключаютъ въ себѣ основныя положенія гониометріи и доказательство ея главнѣйшихъ теоремъ для угловъ отъ 0° до 180° . Свѣдѣнія, сообщаемыя въ этихъ §§, вполне достаточны для перехода ко второй части руководства (т. е. къ рѣшенію треугольниковъ), къ изученію которой учащіеся должны приступать возможно ранѣе“. „Что касается §§ 30—49, то обобщенія, составляющія ихъ содержаніе, могутъ быть отнесены къ концу курса“. Но такой послѣдовательности при прохожденіи тригонометріи преподаватель могъ бы держаться и въ томъ случаѣ, если бы обобщеніе теоріи тригонометрическихъ функцій было помѣщено въ своемъ мѣстѣ, а не послѣ статьи о вычисленіи тригонометрическихъ чиселъ и о тригонометрическихъ таблицахъ. Чтобы учебникъ имѣлъ характеръ научной книги, необходимо, чтобы послѣдовательность въ изложеніи была строго сообразована съ требованіями логики предмета, а не съ практическими цѣлями.

Тригонометрическія числа авторъ опредѣляетъ, какъ отношенія между сторонами прямоугольнаго треугольника, получающагося, если изъ произвольной точки на сторонѣ какого-либо угла (острого или тупого) опустить перпендикуляръ на другую его сторону. Понятіе о тригонометрическихъ линіяхъ и ихъ построеніи при этомъ не дается. Установивъ затѣмъ правило знаковъ и объяснивъ измѣненіе тригонометрическихъ чиселъ при измѣненіи угла отъ 0° до 180° , авторъ алгебраическимъ путемъ выводитъ соотношенія между этими числами одного и того же угла. Далѣе выводятся формулы для тригонометрическихъ чиселъ суммы угловъ, разности ихъ и т. д.

Переходя къ нахожденію значеній тригонометрическихъ чиселъ, авторъ даетъ понятіе о *теоретической* или *радіальной* мѣрѣ угловъ; такою мѣрою наз. уголъ, дуга котораго $=$ радіусу. Объяснивъ затѣмъ вычисленіе $\sin 10''$ и $\cos 10''$ на основаніи извѣстнаго неравенства, авторъ выводитъ *формулы Симпсона* для вычисленія синусовъ и косинусовъ угловъ отъ 0° до 45° . О вычисленіи тригонометрическихъ чиселъ посредствомъ рядовъ совсѣмъ не упоминается. Тутъ-же дается таблица тригонометрическихъ чиселъ для угловъ отъ 0° до 90° чрезъ 1° и объясняется употребленіе ея. Составъ и употребленіе таблицъ логарифмовъ тригонометрическихъ чиселъ совсѣмъ не объяснены. По нашему мнѣнію—это весьма важный пробѣлъ въ учебникѣ. Конецъ этого отдѣла посвященъ преобразованію формулъ къ виду, удобному для логарифмированія.

Въ слѣдующемъ отдѣлѣ теорія логарифмическихъ чиселъ распространяется на углы 180° и отрицательные; въ концѣ отдѣла дается понятіе о тригонометрическихъ линіяхъ и ихъ построеніи.

Въ послѣднемъ отдѣлѣ I части говорится о тригонометрическихъ уравненіяхъ и рѣшеніи ихъ. Этотъ отдѣлъ составляетъ преимущество разсматриваемаго учебника предъ многими другими, въ которыхъ о тригонометрическихъ уравненіяхъ ничего не говорится.

Во второй части выводятся соотношенія между углами и сторонами (и нѣкоторыми другими линіями) треугольника и объясняются способы рѣшенія треугольниковъ, при чемъ прямоугольные треугольники разсматриваются какъ частный случай треугольниковъ косогоугольных.

Въ концѣ книги указаны способы рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ на мѣстности при помощи угломѣрныхъ приборовъ.

Задачъ для упражненія въ учебникѣ совсѣмъ нѣтъ.

Въ изложеніи встрѣчаются неточности, имѣющія характеръ ошибокъ и потому недопустимыя въ учебной книгѣ. Въ самомъ началѣ книги (§ 1) говорится: „Между сторонами и углами тр-ка существуетъ зависимость, при помощи которой можно опредѣлять углы тр-ка, зная стороны его, или вычислять стороны, зная углы“; послѣднее не вѣрно. Въ § 25 (стр. 28) при объясненіи употребленія тригонометрической таблицы, въ сноскѣ говорится: „Разсматривая таблицу, замѣчаемъ, что измѣненіе синуса пропорціонально измѣненію угла“; это также не вѣрно.

Въ § 1 ч. II (стр. 53) читаемъ: „Все, что въ тр-кѣ можетъ быть выражено числомъ, наз. *частью*, или *элементомъ* тр-ка“, напр., углы, стороны, высоты и т. п. Опредѣленіе неправильно: углы, стороны, высоты и т. п. можно, пожалуй, назвать элементами тр-ка, но частями нельзя: часть должна быть однородна съ цѣлымъ. Фраза: „плоскость—плоскостной элементъ тр-ка“ (тамъ-же)—ничего не выражаетъ. Въ § 3 (стр. 53) сказано: „Задачи на построеніе тр-ка имѣютъ опредѣленные рѣшенія, когда дается три элемента“; въ сноскѣ же говорится: „Исключеніе представляютъ нѣкоторые случаи, разсматриваемые ниже (§ 10)“. По нашему мнѣнію, необходимо было тутъ же указать на эти случаи. Въ опредѣленіи: „Значенія угловъ,

при которыхъ обѣ части тригонометрическаго ур-нія дѣлаются равными одна другой, наз. корнями ур-нія" (§ 45, стр. 46). Въмѣсто слова „равными“ слѣдовало сказать „тождественными“. Неудачно также выраженіе „устройство таблицъ“ (§ 26, стр. 29) вмѣсто „составленіе таблицъ“.

Не смотря на отмѣченные промахи, учебникъ г. Россоптовскаго, по оригинальности изложенія нѣкоторыхъ отдѣловъ и доказательствъ, заслуживаетъ полнаго вниманія преподавателей.

Д. Ефремовъ (Иваново-Вознесенскъ).

Примѣчаніе Редаціи. Мы позволимъ себѣ присоединить къ этой рецензіи слѣдующее замѣчаніе.

Г. Россоптовскій называетъ значенія тригонометрическихъ функций *тригонометрическими числами*. Этимъ авторъ желаетъ, повидимому, подчеркнуть, что мы имѣемъ здѣсь дѣло съ отвѣченными числами. Этотъ приѣмъ мы считаемъ, однако, и неудачнымъ и неправильнымъ. Числа одни; если мы не говоримъ „показательныя числа“, „логарифмическія числа“, то нѣтъ основанія называть значенія тригонометрическихъ функций „тригонометрическими числами“.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

† П. М. Покровскій. 14-го февраля скончался отъ туберкулеза легкихъ проф. П. М. Покровскій, занимавшій въ Киевскомъ университетѣ кафедру чистой математики. Довольно многочисленныя работы П. М. относились къ теоріи эллиптическихъ и главнымъ образомъ гиперэллиптическихъ функций. *Ред.*

Астрономическія Извѣстія.

Новая періодическая комета. 20-го декабря прошлаго 1900 года астрономъ Жіакобини въ Ниццѣ нашель комету, движеніе которой чрезвычайно рѣзко отклонялось отъ вычисленной на основаніи первыхъ наблюденій параболической орбиты. Это обстоятельство послужило поводомъ для астронома Крейтце сдѣлать предположеніе, что комета періодическая. Онъ попытался получить эллиптическую орбиту и нашель, что эллипсъ, по которому движется комета, весьма небольшой, для котораго время обращенія около солнца нѣсколько меньше 7 лѣтъ, такъ что комета является вполне членомъ нашей солнечной системы. Интересно, что орбита ея подобна орбитѣ періодической кометы Вольфа, съ которой, замѣтимъ кстати, имѣетъ большое сходство и орбита кометы Бернарди, открытой въ 1892 году и ожидавшейся вновь въ 1899 году, но не найденной.

Въ какомъ отношеніи стоятъ другъ къ другу всѣ эти три кометы, сказать въ данное время нельзя, но возможно, что онѣ имѣютъ между собой связь. Онѣ составляютъ группу, къ которой можно присоединить также комету 1874 г. IV Coggia, тоже періодическую, но съ періодомъ въ 300 лѣтъ.

Астрономъ Deichmüller указаль также, что орбита новой ко-

меты имѣть нѣкоторое сходство съ орбитой кометы 1857 г. IV, для которой въ свое время Müller получилъ эллипсъ съ періодомъ въ 234,6 года.

Колебание яркости Эрота. Съ самого момента открытія (въ 1898 г.) Эротъ, какъ, извѣстно, привлекъ большое вниманіе астрономовъ. Его орбита расположена не въ томъ кольцѣ между орбитами Марса и Юпитера, гдѣ располагаются орбиты другихъ астероидовъ, а на половину почти заходитъ *внутрь* орбиты Марса, такъ что очень близко подходитъ къ земной орбитѣ. Вслѣдствіе этого по временамъ, когда планетка значительно приближается къ землѣ, она оказывается особенно пригодной для опредѣленія разстоянія солнца отъ насъ. Астрономы хотѣли воспользоваться приближеніемъ Эрота къ землѣ въ концѣ 1900 года, которое хотя и не было наибольшимъ, тѣмъ не менѣе все таки сулило большія выгоды. Организуется огромное международное предпріятіе для наблюденія Эрота въ теченіе ряда мѣсяцевъ конца 1900 и начала 1901 года. По истеченіи этого періода планета, казалось, не должна была уже сосредоточивать на себѣ исключительнаго вниманія наблюдателей, по крайней мѣрѣ до слѣдующаго значительнаго приближенія къ землѣ, до котораго осталось еще лѣтъ двадцать. Но новое открытіе измѣняетъ дѣло. Эг. Оппольцеръ въ Потсдамѣ въ циркулярѣ журнала „Astronomische Nachrichten“ отъ 9-го февраля извѣщаетъ, что ему удалось замѣтить измѣненіе яркости Эрота въ теченіе нѣсколькихъ часовъ. Онъ приглашаетъ астрономовъ послѣдить за планетой, производя сравненіе ея блеска съ блескомъ окружающихъ звѣздъ нѣсколько разъ въ ночь. Телеграмма Valentiner'a изъ Гейдельберга свидѣтельствуетъ, что наблюденія Jost'a, сдѣланные съ помощью фотометра Цѣльнера, подтверждаютъ открытіе Оппольцера.

Фактъ установленъ. Интересно найти его объясненіе. Возможно, что онъ послужитъ намъ для уясненія условія вращенія планеты и устройства ея поверхности.

Новое изданіе Механики Тихо де Браге. 24-го октября (н. ст.) 1901 года исполнится 300 лѣтъ со дня кончины великаго наблюдателя Тихо де Браге. Королевская шведская Академія Наукъ рѣшила ознаменовать эту годовщину изданіемъ факсимиле знаменитаго сочиненія „Astronomical instauratae mechanich“, въ которомъ описана обсерваторія Тихо де Браге на островѣ Хвене — „Ураніенбургъ“ и инструменты, находившіеся на ней. Подписная цѣна на это изданіе 40 марокъ. Обращаться до 1-го марта непосредственно въ Академію Наукъ въ Стокгольмѣ.

Новая звѣзда въ Персеѣ. 21-го февраля астрономъ Андерсонъ въ Единбургѣ открылъ „Новую“ звѣзду въ созвѣздіи Персея, положеніе которой опредѣляется числами

$$\varphi = 51^{\circ}6'$$

$$\delta = 43^{\circ}34'.$$

Въ моментъ открытія яркость ея была равна 2,7 звѣздной величины, но черезъ четыре дня она достигла уже первой величины. Новая звѣзда въ Персеѣ является такимъ образомъ наиболѣе яркой изъ всѣхъ, которыя наблюдались въ теченіе послѣднихъ 300 лѣтъ. Она представляетъ совершенно исключительное явленіе.

Пр.-Доц. К. Покровский. (Юрьевъ).

ОПЫТЫ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Электризація бумаги.

Г. Kleiber изъ Мюнхена предлагаетъ *) слѣдующій способъ электризаціи бумаги. Этотъ способъ долженъ быть для учащихся тѣмъ болѣе интересенъ, что опыты добыванія электричества треніемъ тѣхъ непроводниковъ, которые имѣются въ распоряженіи юноши, обыкновенно даютъ весьма слабый эффектъ, часто и вовсе не удаются. Между тѣмъ предлагаемый приемъ даетъ сравнительно сильный зарядъ.

1) Чтобы зарядить кусокъ сухой бумаги положительнымъ электричествомъ, нужно взять ее за одинъ конецъ одной рукой и провести съ значительнымъ треніемъ между большимъ и указательнымъ пальцами другой руки. При этомъ бумага получаетъ настолько сильный зарядъ, что она, благодаря притяженію, довольно долго виситъ у ладони руки при совершенно горизонтальномъ ея положеніи. Если ее держать въ одной рукѣ на отвѣсѣ и приближать другую руку, то притяженіе замѣчается уже на разстояніи 10^{cm}.

2) Чтобы сообщить бумагѣ отрицательный зарядъ, слѣдуетъ положить ее на теплую плиту или на стекло отъ лампы и провести по ней сухой резинкой. Зарядъ получается еще болѣе интенсивный, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ.

Этимъ способомъ можно также сдѣлать простенькій, но очень чувствительный электроскопъ. Для этого достаточно воткнуть спицу въ огарокъ стеариновой свѣчи, наэлектризовать бумажную полоску указаннымъ выше способомъ и, слегка перегнувъ ее по длинѣ, надѣть на спицу. Если приблизить къ этому прибору другой кусокъ бумаги, наэлектризованной тѣмъ же способомъ, то взаимодѣйствіе чувствуется уже на разстояніи полуметра.

*) „Zeitschrift für den Physikalischen und Chemischen Unterricht.“ 1901, т. I.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Окружность девяти точекъ.

Въ треугольникѣ ABC обозначимъ основанія высотъ черезъ a, b, c , середины сторонъ BC, CA и AB черезъ α, β, γ и черезъ x, y, z середины отрезковъ $АН, ВН$ и $СН$, гдѣ $Н$ точка пересѣченія высотъ (ортоцентръ) треугольника.

Извѣстно, что точки $a, b, c, — \alpha, \beta, \gamma, — x, y, z$ лежатъ на одной окружности, носящей названіе окружности 9-ти точекъ. Центръ этой окружности лежитъ въ серединѣ (P) отрезка $ОН$, гдѣ $Н$ по прежнему означаетъ ортоцентръ, а O центръ описанной окружности. Если радіусъ послѣдней обозначить черезъ R , то радіусъ окружности девяти точекъ равенъ $\frac{1}{2} R$.

Въ послѣдней (LXXIII) книжкѣ журнала «Mathematical questions from the „Educational Times“» проф. М. Bhattacharyya предлагаетъ новое весьма простое доказательство этого предложенія.

Дѣло сводится, очевидно, къ тому, чтобы обнаружить, что

$$Pa = P\alpha = Px = \frac{1}{2} R, Pb = P\beta = Py = \frac{1}{2} R, Pc = P\gamma = Pz = \frac{1}{2} R. (*)$$

Продолжимъ высоту Aa до пересѣченія съ окружностью описаннаго круга въ точкѣ L . Тогда $\angle CBb = \angle CAa$, такъ какъ каждый изъ нихъ дополняетъ до прямого уголъ C треугольника. Съ другой стороны, $\angle CAa = \angle CBL$, такъ какъ они опираются на одну и ту же дугу CL . Такимъ образомъ $\angle CBb = \angle CBL$, а вслѣдствіе этого $Ha = La$. Отрезокъ Pa , соединяющій середины P и a двухъ сторонъ треугольника $НОL$, равенъ половинѣ основанія, т. е. $\frac{1}{2} R$. Точно такъ-же отрезокъ Px , соединяющій середины двухъ сторонъ треугольника $ОНА$ равенъ $\frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} R$. Наконецъ $P\alpha = Pa$, такъ какъ точка P , очевидно, лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ къ отрезку aa изъ его середины. Итакъ $Pa = P\alpha = Px = \frac{1}{2} R$. Очевидно, такимъ же точно образомъ докажемъ остальные равенства (*).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

№ 16 (4 сер.). Построить треугольник, зная радиусъ круга описаннаго, расстояние между центромъ этого круга и ортоцентромъ треугольника и длину одной изъ сторонъ.

(Займств.).

№ 17 (4 сер.). Найти на плоскости геометрическое мѣсто точекъ, сумма четвертыхъ степеней разстояній которыхъ отъ вершинъ даннаго правильнаго многоугольника есть величина постоянная.

Найти такую точку, чтобы сумма четвертыхъ степеней разстояній ея отъ вершинъ правильнаго многоугольника была minimum.

Е. Е.

№ 18 (4 сер.). Найти предѣлы: 1) отношенія квадрата наружной поверхности переменнаго шароваго сегмента къ его объему при безконечномъ уменьшеніи размѣровъ сегмента, зная, что переменный сегментъ отсѣкается отъ шара постояннаго объема V ; 2) отношенія куба дуги круговаго сегмента радиуса r къ его площади при безконечномъ уменьшеніи площади сегмента.

Н. С. (Одесса).

№ 19 (4 сер.). Найти цѣлые положительные корни уравненія

$$2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 992.$$

(Займств.).

№ 20 (4 сер.). Показать, что при x цѣломъ и положительномъ число

$$(2x^2-2x+1)^{x^2-x+1} + (x^2-x+2)^{x^2+x+1}$$

дѣлится на 3, а число

$$(x^2+2)^{2x^2+1} + (4x^2+3)^{2x+1}$$

дѣлится на 5.

Е. Буницкий (Одесса).

№ 21 (4 сер.). Изъ аэростата, находившагося надъ моремъ, была выброшена закупоренная бутылка. Промежутокъ времени между погруженіемъ бутылки въ воду и обратнымъ ея появленіемъ на поверхности равнялся $\Theta=40$ секундъ. Вѣсъ бутылки $P=400$ грамм., а внѣшній объемъ равенъ $V=1$ литру. Определить высоту аэростата.

Плотность морской воды $d=1,03$, ускореніе силы тяжести $g=9,81$ м.

(Займств.) М. Гербановскій.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

✓ **Г. *)** Плоскость разраблена на равные квадраты. Доказать, что не существуетъ правильнаго треугольника, вершины котораго совпадаютъ бы съ вершинами квадратовъ.

Предположимъ, что ABC есть правильный треугольникъ, вершины котораго A, B, C совпадаютъ съ вершинами квадратовъ. Пусть Ax и Ay суть

*) Римскими цифрами мы будемъ помѣчать задачи изъ отдѣла, не предназначеннаго для учащихся.

стороны квадрата, имѣющаго вершину въ A . Опустимъ изъ точекъ C и B перпендикуляры CD и BE на прямую Ax . Если принять за единицу сторону равныхъ квадратовъ, то, согласно съ сдѣланнымъ нами предположеніемъ и условіемъ задачи, отрѣзки AD , AE , $DE = \pm AE + AD$ (гдѣ знаки зависятъ отъ расположенія точекъ A , D и E на прямой Ax), CD и BE выражаются цѣлыми числами, равно какъ и квадратъ стороны AB равносторонняго треугольника, равный суммѣ квадратовъ отрѣзковъ AE и BE . Площадь равносторонняго треугольника равна алгебраической суммѣ площадей треугольниковъ ADC , ABE и трапеціи $CDEB$ (знаки суммы зависятъ отъ расположенія треугольника ABC относительно угла $\angle Ax$). Согласно съ предыдущимъ, площадь каждой изъ этихъ трехъ фигуръ выражается числомъ рациональнымъ. Слѣдовательно и площадь равносторонняго треугольника ABC выражается рациональнымъ числомъ m . Но площадь того же треугольника равна $\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$, гдѣ AB^2 есть по предыдущему цѣлое число n . Слѣдовательно

$$\frac{n\sqrt{3}}{4} = m, \text{ откуда } \sqrt{3} = \frac{4m}{n}, \quad 3 = \left(\frac{4m}{n}\right)^2,$$

т. е. 3 есть квадратъ рациональнаго числа, что невѣрно. Слѣдовательно предположеніе, сдѣланное въ началѣ разсужденія, тоже невѣрно.

С. Адамовичъ (Двинскъ); П. Полушкинъ (Знаменка).

XI. Построить треугольникъ по радіусу круга описаннаго и по двумъ высотамъ.

Пусть h_a и h_b —данныя высоты, r —радіусъ круга вписаннаго, a , b , c —стороны, p —полупериметръ и s —площадь искомага треугольника. Тогда

$$2s = h_a \cdot a, \quad 2s = h_b \cdot b, \quad 2s = 2rp \quad (1).$$

Построимъ теперь три отрѣзка a' , b' и p' , удовлетворяющіе равенствамъ

$$m^2 = h_a \cdot a', \quad m^2 = h_b \cdot b', \quad m^2 = 2rp' \quad (2),$$

гдѣ m —совершенно произвольный отрѣзокъ.

Для равенства (2) на соотвѣтствующія равенства (1), находимъ:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{p'}{p} = \frac{m^2}{2s},$$

откуда видно, что треугольникъ, двѣ стороны котораго и полупериметръ суть a' , b' и p' , подобенъ искомому. Отсюда вытекаетъ построеніе при помощи метода подобія. Пользуясь равенствами (2) строимъ отрѣзки a' , b' и p' ; затѣмъ строимъ отрѣзокъ $c' = 2p' - a' - b'$. По тремъ сторонамъ a' , b' и c' строимъ треугольникъ $A'B'C'$; проведемъ высоту его $A'D'$, откладываемъ на ней отъ точки A' отрѣзокъ $A'D$, равный h_a , и строимъ проходящую черезъ точку D и параллельную сторонѣ $B'C'$ прямую, которая встрѣтитъ стороны $A'B'$ и $A'C'$ въ точкахъ B и C . Треугольникъ $A'BC$ есть искомый.

Д. Полупановъ (Новочеркасскъ); П. Полушкинъ (Знаменка); Н. С. (Одесса); приложеніемъ алгебры къ геометріи рѣшилъ задачу *Л. Магацинъ (Вердичевъ).*

№ 622 (3 сер.). Решить уравненіе

$$\frac{10^{-5}}{x^{91 \log x}} \cdot x^{10 \log^2 x + 101} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-4} x^{10(\log^2 x + 1)}.$$

Логарифмируя обѣ части уравненія, перенося члены его въ одну часть

и сдѣлавъ приведеніе, находимъ:

$$9\log^3 x - 91\log^2 x + 91\log x - 9 = 0,$$

или

$$9(\log^3 x - 1) - 91(\log x - 1)\log x = (\log x - 1)(9\log^2 x - 82\log x + 9) = 0,$$

откуда или

$$\log x - 1 = 0, \text{ или } 9\log^2 x - 82\log x + 9 = 0.$$

Первое уравненіе даетъ рѣшеніе

$$\log x_1 = 1,$$

а второе — два рѣшенія

$$\log x_2 = 9, \quad \log x_3 = \frac{1}{9}.$$

Такимъ образомъ, получаемъ три корня: $x_1 = 10$, $x_2 = 10^9$, $x_3 = \sqrt[9]{10}$.

В. Толстой (Тамбовъ); П. Давидсонъ (Житомиръ).

№ 623 (3 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\sqrt[4]{1300 - x} + \sqrt[4]{x + 12} = 8.$$

Полагая

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{1300 - x} &= u \\ \sqrt[4]{x + 12} &= v \end{aligned} \quad (1),$$

приводимъ наше уравненіе къ системѣ

$$u + v = 8 \quad (2)$$

$$u^4 + v^4 = 1312 \quad (3).$$

Возвышая обѣ части уравненія (2) въ квадратъ и перенося членъ $2uv$ во вторую часть, затѣмъ снова возвышая обѣ части полученнаго уравненія въ квадратъ, находимъ послѣ приведенія:

$$u^4 + v^4 = 4096 + 2u^2v^2 - 256uv,$$

или (см. 3):

$$1312 = 4096 + 2u^2v^2 - 256uv,$$

или же

$$u^2v^2 - 128uv + 1392 = 0.$$

Изъ этого уравненія находимъ для uv два значенія, — 12 и 116. Такимъ образомъ система (2), (3) приводится къ двумъ системамъ:

$$uv = 12, \quad u + v = 8; \quad uv = 116, \quad u + v = 8.$$

Первая система даетъ для v значенія 2 и 6.

Подставляя значенія v во второе уравненіе системы (1), найдемъ

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 1284.$$

Система

$$uv = 116, u + v = 8$$

даетъ для u, v и далѣе для x мнимые корни.

М. Милашевичъ (Севастополь); *Л. Гальперинъ* (Вердичевъ); *И. Кудинъ* (Москва); *П. Давидсонъ* (Житомиръ).

№ 635 (3 сер.). *Рѣшить въ рациональныхъ, а затѣмъ въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$x^2 - y^2 = y^3.$$

Перенеся y^2 во вторую часть находимъ:

$$x^2 = y^2 + y^3, \text{ откуда}$$

$$x = \pm y \sqrt{1 + y} \quad (1).$$

Для того, чтобы x было числомъ рациональнымъ, необходимо и достаточно, чтобы $1 + y$ было точнымъ квадратомъ. Слѣдовательно $1 + y = \alpha^2$ (2), гдѣ α число рациональное. Поэтому (см. (1))

$$y = \alpha^2 - 1,$$

и (см. (2))

$$x = \pm (\alpha^2 - 1) \cdot \alpha \quad (3).$$

Изъ уравненія (2) видно, что при y цѣломъ α есть число цѣлое. Такимъ образомъ формулы (3) даютъ цѣлыя значенія для x и y при цѣломъ и только при цѣломъ α .

Л. Гальперинъ (Вердичевъ); *П. Полушкинъ* (Знаменка).

Списокъ лицъ, приславшихъ запоздавшія рѣшенія.

Редакціей были получены запоздавшія рѣшенія задачъ XXIII-го семестра отъ слѣдующихъ лицъ:

№№ 515, 517, 519, 521 *С. Адамовичъ* (Двинскъ). № 525 *Б. Фрейманъ* (Тамбовъ); *В. Морозовъ* (Тамбовъ). № 527 *Кязымбекъ Годжаманбековъ* (Баку); *В. Морозовъ* (Тамбовъ); *С. Адамовичъ* (Двинскъ). № 535 *Кязымбекъ Годжаманбековъ* (Баку); *Б. Фрейманъ* (Тамбовъ); *М. Глинскій* (Симбирскъ); *А. Варениковъ* (Шуя). № 537 *С. Адамовичъ* (Двинскъ); *Кязымбекъ Годжаманбековъ* (Баку); *А. Варениковъ* (Шуя). № 538. *М. Глинскій* (Симбирскъ). № 542. *П. Лисевичъ* (Курскъ). № 560. *Ө. Бѣлоярцевъ*. № 561. *И. Дембковскій*. № № 566, 568. *Д. Дьяковъ*. Кромѣ того отъ не извѣстнаго лица были присланы рѣшенія задачъ №№ 519, 549, 550.

Редакторъ **В. А. Циммерманъ.**

Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено цензурою, Одесса, 27-го февраля 1901 г.

Типографія Бланкоиздательства *М. Шпенцера*, Ямская, д. № 64.

Обложка
щется

Обложка
щется