Обложка
ищется

Обложка
пщется

XXX Сем. № 1.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

15 Іюля № 349. 1903 г.

ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ КВАТЕРНІОНОВЪ.

Дм. Ефремова (Иваново-Вознесенскъ).

ПРЕДИСЛОВІЕ.

> Le Calcul des quaternions c'est l'Algèbre des faits géométriques de l'espace.
>
> *Laisant.*

Въ концѣ XVII столѣтія *Валлисъ (Wallis)* предложилъ изображать геометрически мнимыя количества вида $a\sqrt{-1}$ перпендикулярами къ прямой, отрѣзки которой, по правилу Декарта, изображаютъ дѣйствительныя алгебраическія количества. Это предложеніе было обобщено *Арганомъ (Argand)* и *Варреномъ (Warren)* на комплексныя выраженія вида $a+b\sqrt{-1}$, или $a+bi$ и дало начало геометрической теоріи такихъ выраженій, разработанной *Коши (Cauchy)* и основанной на представленіи комплексныхъ выраженій прямолинейными отрѣзками въ одной плоскости. Оказалось, что всѣ дѣйствія съ такими отрѣзками выполняются съ такою же общностью, какъ и съ алгебраическими количествами.

Естественно, что явилась мысль обобщить полученные въ этомъ направленіи результаты на отрѣзки, не лежащіе въ одной плоскости. Для этого необходимо было найти алгебраическое выраженіе, которымъ опредѣлялись-бы длина и направленіе отрѣзка въ пространствѣ. Рѣшить эту задачу удалось англійскому математику *В. Гамильтону* (*W. Hamilton*), открывшему новый методъ, названный имъ *Исчисленіемъ Кватерніоновъ.* Въ его книгахъ *Lectures on quaternions* (Dublin. 1853) и *Elements of quaternions* (London. 1866) теорія алгебраическихъ дѣйствій съ отрѣзками въ пространствѣ разработана во всей полнотѣ.

Исчисленіе кватерніоновъ основано на разсмотрѣніи двоякаго рода величинъ.

Величины перваго рода суть обыкновенныя алгебраическія количества (дѣйствительныя, а не мнимыя), названныя Гамильтономъ *скалярными* (*scalar*). Эти величины выражаются положительными или отрицательными числами и могутъ различаться только численными (ариѳметическими) значеніями ихъ и алгебраическими знаками $+$ и $-$.

Второго рода величины представляются прямолинейными отрѣзками и различаются какъ численными значеніями ихъ длины, такъ и направленіемъ ихъ. Эти величины Гамильтонъ назвалъ *векторами.*

Равными векторами принято считать только векторы одинаковаго направленія. Поэтому *векторіальное равенство* выражаетъ болѣе широкое понятіе, чѣмъ *равенство алгебраическое.*

Кватерніономъ Гамильтонъ назвалъ отношеніе двухъ векторовъ. Названіе это объясняется тѣмъ, что отношеніе двухъ векторовъ выражается въ зависимости отъ четырехъ величинъ.

Исчисленіе кватерніоновъ замѣчательно тѣмъ, что при умноженіи векторовъ не имѣетъ мѣста законъ перемѣстимости множителей, такъ что, если α и β суть два вектора, то вообще произведеніе $\alpha.\beta$ и $\beta.\alpha$ не равны.

Теорія кватерніоновъ получила примѣненіе въ геометріи, механикѣ и математической физикѣ *). Особенность метода кватерніоновъ при рѣшеніи вопросовъ прикладной математики состоитъ въ томъ, что три проэкціи прямолинейнаго отрѣзка на оси координатъ замѣняются однимъ алгебраическимъ выраженіемъ или символомъ этого отрѣзка, вслѣдствіе чего во многихъ случаяхъ вычисленія значительно упрощаются, и рѣшеніе пріобрѣтаетъ геометрическую наглядность. Какъ на примѣръ при-

---

*) *Tait.* An Elementary Treatise on quaternions. Oxford. 1873.

ложенія метода кватерніоновъ къ математической физикѣ, можно указать на знаменитую книгу Максвелля (Maxwell) *A Treatise on Electricity and Magnetism.* Несмотря на это, теорія кватерніоновъ долгое время оставалась малоизвѣстною для многихъ математиковъ континента, такъ что издатели французскаго перевода вышеупомянутой книги Максвеля нашли необходимымъ приложить къ ней, въ видѣ дополненія, статью проф. *Sarrau* о кватерніонахъ *), безъ чего чтеніе книги было-бы затруднительно.

Въ настоящее время существуетъ международное общество, поставившее своею задачею дальнѣйшее развитіе теоріи кватерніоновъ и ихъ примѣненій. Общество это основалось въ 1895 г. по иниціативѣ голландскаго профессора *P. Molenbrock'a* (изъ Гааги) и японскаго математика *Shunkichi Kimura* и называется *International Association for Promoting the Calculus of Quaternions.* Общество имѣетъ національныхъ секретарей во многихъ государствахъ; въ Россіи такимъ секретаремъ состоитъ профессоръ Кіевскаго политехникума А. П. Котельниковъ. Число членовъ общества всѣхъ національностей въ 1901 году было 68; изъ нихъ только двое русскихъ: упомянутый уже Кіевскій профессоръ А. П. Котельниковъ и Казанскій профессоръ А. В. Васильевъ.

Настоящій мой трудъ предназначается для лицъ, стоящихъ далеко отъ университетовъ и совсѣмъ незнакомыхъ съ кватерніонами.

Такъ какъ геометрическая теорія кватерніоновъ построена на теоріи векторовъ, то для пониманія первой необходимо ознакомиться со второю. Поэтому моя работа естественно распадается на двѣ части, составляющія двѣ отдѣльныя статьи: *О векторахъ* и *О кватерніонахъ* **).

---

*) *Sarrau.* Notions sur la théorie des quaternions. (Издана отдѣльно). Paris 1889.

**) Пособіями при изученіи кватерніоновъ и составленіи этихъ статей служили мнѣ слѣдующія книги:

W. R. Hamilton. Lectures on quaternions. Dublin. 1853.

W. R. Hamilton. Elements of quaternions. London. 1866.

Tait. An Elementary Treatise on quaternions. Oxford. 1873.

Laisant. Introduction à la méthode des quaternions. Paris. 1881.

Sarrau. Notions sur la théorie des quaternions. Paris. 1889.

Изъ русскихъ книгъ о кватерніонахъ мнѣ извѣстны только двѣ, именно:

Ромеръ П. Э. Основныя начала метода кватерніоновъ. Кіевъ 1867 г. и

П. Х. Кадикъ. О значеніи знаковъ въ теоріи кватерніоновъ. (Протоколы засѣданій С.-Петербургскаго Математ. Об-ва $18^{93}/_{94}$ г.).

О векторахъ.

1. **Опредѣленія и обозначенія.** *Векторомъ* называется отрѣзокъ прямой линіи, ограниченный двумя точками и имѣющій заданное направленіе отъ одной изъ этихъ точекъ къ другой.

Началомъ вектора называется та точка, отъ которой онъ проводится; другая точка, которою ограничивается векторъ, наз. *концомъ* его.

Если начало и конецъ вектора суть точки A и B, то векторъ обозначается символомъ $\overline{AB}$, такъ что буква, обозначающая конецъ вектора, ставится справа отъ буквы, обозначающей его начало.

За направленіе вектора принимается направленіе отъ его начала къ концу. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ имѣютъ, поэтому, противоположныя направленія.

Векторы, имѣющіе общее начало, иногда, для сокращенія, именуются одною буквою, обозначающею конецъ вектора, съ чертою надъ нею. Напр., векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, ... обозначаются чрезъ $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, ...

2. Параллельные *) векторы могутъ быть направлены или въ одну сторону, или въ стороны противоположныя.

Параллельные векторы равной длины и направленные въ одну сторону называются *равными*.

При всѣхъ дѣйствіяхъ надъ векторами каждый изъ нихъ можетъ быть замѣненъ другимъ, равнымъ ему. **)

3. Если два вектора параллельны, но направлены въ стороны противоположныя, то одинъ изъ нихъ принимается за положительный и берется со знакомъ $+$, а другой—за отрицательный, со знакомъ $-$. При этомъ условіи, знакъ $-$, поставленный передъ обозначеніемъ вектора, мѣняетъ его направленіе на прямо противоположное. Другими словами, умноженіе вектора на -1 равносильно повороту этого вектора на 180^0.

Параллельные векторы равной длины, направленные въ противоположныя стороны, наз. *противоположными*. Векторы, противоположные вектору $\overline{AB}$, равны вектору $\overline{BA}$.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что

$$\overline{AB} = -\overline{BA}.$$

4. Числовая величина длины вектора, независимо отъ его направленія, называется *модулемъ* или *тенсоромъ* вектора. Этотъ

*) Къ параллельнымъ векторамъ мы относимъ и тѣ, которые расположены на одной прямой.

**) Т. е. опредѣленія дѣйствій устанавливаются такимъ образомъ, чтобы они удовлетворяли этому требованію.

Прим. ред.

терминъ (*Tensor*) введенъ Гамильтономъ и обозначается буквою T, такъ что, если длина вектора $\overline{AB}$ равна a, то

$$T\overline{AB} = a.$$

Тенсоръ всегда число *положительное*.

Тенсоры равныхъ или противоположныхъ векторовъ равны; поэтому, если $\overline{AB} = \overline{CD}$, то

$$T\overline{AB} = T\overline{CD} \text{ и } T\overline{AB} = T\overline{BA}.$$

5. *Подъ умноженіемъ и дѣленіемъ даннаго вектора* $\overline{OA}$ или $\overline{A}$ *на какое-нибудь число* m разумѣютъ процессъ, заключающійся въ томъ, что мы умножаемъ или дѣлимъ на это число длину вектора a, такъ что въ результатѣ получается новый векторъ $\overline{OB}$ или $\overline{B}$, направленный въ одну сторону съ даннымъ векторомъ, когда m—число положительное, или въ сторону противоположную, когда m число отрицательное. Поэтому, если

$$T\overline{A} = a \text{ и } \overline{OB} = \overline{B} = m.\overline{A},$$

то *)

$$T\overline{B} = (m)a = (m).T\overline{A},$$

или

$$Tm\overline{A} = (m).T\overline{A};$$

если-же

$$\overline{OB} = \overline{B} = \frac{\overline{A}}{m},$$

то

$$T\overline{B} = T\frac{\overline{A}}{m} = \frac{a}{(m)} = \frac{T\overline{A}}{(m)}.$$

6. *Отношеніемъ* двухъ параллельныхъ векторовъ $\overline{A}$ и $\overline{B}$ называется отношеніе ихъ длинъ, взятое со знакомъ $+$, когда эти векторы направлены въ одну стоđону, или со знакомъ $-$, когда направленія ихъ противоположны. Обозначивъ это отношеніе чрезъ m, получимъ

$$\frac{\overline{A}}{\overline{B}} = m, \text{ или } \overline{A} = m.\overline{B}.$$

Отсюда видно, что *каждый изъ двухъ параллельныхъ векторовъ можетъ быть представленъ въ видѣ произведенія другого на нѣкоторое (дѣйствительное) алгебраическое количество*, т. е. всѣ векторы, параллельные вектору $\overline{M}$, могутъ быть представлены въ видѣ $m.\overline{M}$, гдѣ m—дѣйствительное алгебраическое количество.

Обратно, *если векторъ* $\overline{A}$ *представляется въ видѣ произведенія вектора* $\overline{B}$ *на нѣкоторое алгебраическое количество* m, *т. е. если* $\overline{A} = m.\overline{B}$, *то векторы* $\overline{A}$ *и* $\overline{B}$ *параллельны.*

---

*) Чрезъ (m) обозначена абсолютная величина количества m.

7. Векторъ, длина котораго равна единицѣ, называется *единичнымъ* (*unitaire*). Если обозначить чрезъ $\overline{A}_1$ единичный векторъ, направленіе котораго совпадаетъ съ направленіемъ вектора $\overline{A}$, то

$$\overline{A} = a . \overline{A}_1 .$$

Если длина какого-нибудь вектора $\overline{B}$, параллельнаго $\overline{A}$, равна b, то

$$\overline{B} = \pm b . \overline{A}_1 ,$$

гдѣ берется знакъ $+$, когда векторы $\overline{A}_1$ и $\overline{B}$ направлены въ одну сторону, и $-$, когда направленія ихъ противоположны.

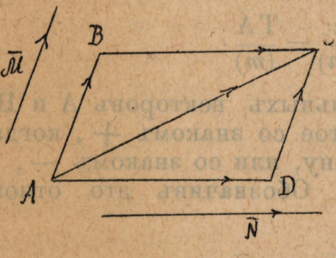
8. **Сложеніе и вычитаніе векторовъ.** Векторы называются *послѣдовательными*, если начало каждаго изъ нихъ совпадаетъ съ концомъ предшествующаго; напр., $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ .... суть послѣдовательные векторы.

Геометрической суммою, или просто *суммою* двухъ послѣдовательныхъ векторовъ $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ (фиг. 1) называется векторъ $\overline{AC}$, начало котораго совпадаетъ съ началомъ перваго слагаемаго вектора, а конецъ—съ концомъ второго. По этому опредѣленію

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} .$$

Суммой двухъ какихъ бы то ни было векторовъ $\overline{M}$ и $\overline{N}$ (фиг. 1) называютъ сумму равныхъ имъ послѣдовательныхъ векторовъ.

Легко обнаружить, что сумма векторовъ останется та же, если мы замѣнимъ векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ другой парой равныхъ имъ послѣдовательныхъ векторовъ $\overline{A'B'}$ и $\overline{B'C'}$.



Фиг. 1.

9. Построивъ параллелограммъ ABCD (фиг. 1), противоположныя стороны котораго равны векторамъ $\overline{M}$ и $\overline{N}$, такъ что

$$\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{M} \text{ и } \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{N},$$

на основаніи предыдущаго, получимъ:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{M} + \overline{N} = \overline{AC}$$

и

$$\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{N} + \overline{M} = \overline{AC};$$

слѣдовательно,

$$\overline{M} + \overline{N} = \overline{N} + \overline{M}.$$

Это равенство показываетъ, что при сложенiи векторовъ законъ перемѣстимости слагаемыхъ не нарушается.

10. Для сложенiя нѣсколькихъ векторовъ $\overline{M}$, $\overline{N}$, $\overline{P}$.... находятъ сначала векторъ $\overline{R}$, равный суммѣ векторовъ $\overline{M}$ и $\overline{N}$; затѣмъ находятъ векторъ S, равный суммѣ векторовъ $\overline{R}$ и $\overline{P}$, и т. д.

Пусть $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ будутъ послѣдовательные векторы, равные векторамъ $\overline{M}$, $\overline{N}$, P. Тогда векторъ $\overline{AD}$ представляетъ собой сумму векторовъ $\overline{M}$, N и $\overline{P}$.

$$AD = \overline{M} + \overline{N} + \overline{P} = (\overline{M} + \overline{N}) + \overline{P}.$$

Съ другой стороны, векторъ $\overline{AD}$ можно разсматривать какъ сумму векторовъ $\overline{AB}$ и $\overline{BD}$; векторъ же $\overline{BD}$ какъ сумму векторовъ $\overline{N}$ и $\overline{P}$. Поэтому

$$\overline{AD} = \overline{M} + (\overline{N} + \overline{P});$$

отсюда

$$\overline{M} + (\overline{N} + \overline{P}) = (\overline{M} + \overline{N}) + \overline{P},$$

иными словами, сложенiе векторовъ подчинено также закону сочетательному. Извѣстно, что изъ перемѣстительнаго и сочетательнаго законовъ выводятся всѣ тождественныя преобразованiя суммы. Они сохраняютъ поэтому свою силу и для векторовъ.

Очевидно, что при сложенiи векторовъ длина суммы вообще меньше суммы длинъ слагаемыхъ; только при сложенiи параллельныхъ векторовъ, направленныхъ въ одну сторону, длина суммы равна суммѣ длинъ слагаемыхъ.

11. *Разностью* двухъ векторовъ $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ называется векторъ $\overline{BC}$, сумма котораго съ вычитаемымъ векторомъ $\overline{AB}$ равна уменьшаемому вектору $\overline{AC}$ (фиг. 1).

Такъ какъ (3)

$$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BA},$$

то *разность двухъ векторовъ равна суммѣ уменьшаемаго вектора и вектора, противоположнаго вычитаемому.* Такимъ образомъ, вычитанiе векторовъ приводится къ сложенiю вектора уменьшаемаго съ векторомъ, противоположнымъ вычитаемому.

12. *Всякiй векторъ* $\overline{AB}$ *можетъ быть представленъ въ видѣ разности двухъ векторовъ, проведенныхъ изъ произвольной точки O къ точкамъ A и B.*

Дѣйствительно, такъ какъ при всякомъ положенiи точки O

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB},$$

то

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{AO} - \overline{BO}.$$

13. Пусть $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ суть какіе-нибудь два вектора. Взявъ произвольную точку O, по предыдущему, получимъ:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} \text{ и } \overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC};$$

поэтому

$$\overline{AB} - \overline{CD} = \overline{OB} - \overline{OA} - \overline{OD} + \overline{OC} = (\overline{OC} - \overline{OA}) - (\overline{OD} - \overline{OB});$$

но

$$\overline{OC} - \overline{OA} = \overline{AC} \text{ и } \overline{OD} - \overline{OB} = \overline{BD};$$

слѣдовательно,

$$\overline{AB} - \overline{CD} = \overline{AC} - \overline{BD} = \overline{DB} - \overline{CA}.$$

14. Сумма нѣсколькихъ послѣдовательныхъ векторовъ равна нулю, если конецъ послѣдняго вектора совпадаетъ съ началомъ перваго, т. е. если эти векторы образуютъ замкнутый многоугольникъ.

Сумма двухъ непараллельныхъ векторовъ не можетъ быть равна нулю. Поэтому, *если $\overline{A}$ и $\overline{B}$ суть непараллельные векторы, то равенство вида*

$$m.\overline{A} + n.\overline{B} = 0,$$

гдѣ m и n—алгебраическія количества, возможно только при $m = 0$ и $n = 0$.

Отсюда слѣдуетъ, что равенство

$$m.\overline{A} + n.\overline{B} = p.\overline{A} + q.\overline{B},$$

гдѣ $\overline{A}$ и $\overline{B}$ непараллельные векторы, а m, n, p, q—алгебраическія количества, возможно только при $m = p$ и $n = q$.

(Продолженіе слѣдуетъ).

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Матеріалы для ученическихъ работъ въ физическихъ кабинетахъ.

Эр. Шпачинскаго.

*(Продолженіе *).*

II. Самопрерыватели тока (продолженіе). Присланный въ прошломъ году въ физическій кабинетъ Лодзинскаго коммерческаго училища фирмою Max Kohl'a (изъ Хемница), вмѣстѣ съ большимъ индукторомъ, ротаціонный къ нему прерыватель тока оказался никуда негоднымъ. Не говоря уже о томъ, что электродвигатель его (граммовскаго типа) для приведенія во вращеніе требовалъ тока отъ шести большихъ аккумуляторовъ, самый при-

*) См. „В. О. Ф.“ № 328, стр. 82—89.

боръ былъ собранъ такъ неаккуратно, что вовсе не могъ быть приводимъ въ дѣйствіе *). Починить его или, лучше сказать, передѣлать заново домашними средствами намъ до сихъ поръ не удалось, и для того, чтобы показать ученикамъ опыты съ большою индукціонною катушкою (напр., Рентгеновскіе лучи), пришлось предварительно сдѣлать собственноручно прерыватель для достаточно сильнаго тока.

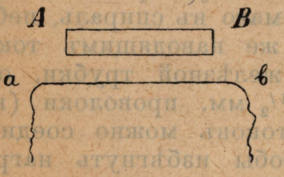
Практической разработкѣ это темы я посвятилъ часть Пасхальныхъ каникулъ, и, въ то время какъ привлеченные мною къ занятіямъ въ кабинетѣ ученики 4-го класса увлекались изготовленіемъ нѣкототорыхъ приборовъ по механическому отдѣлу (о коихъ сообщу впослѣдствіи), я вмѣстѣ съ нѣсколькими учениками 6-го класса придумывали различныя системы прерывателей.

Прежде всего, мы пришли къ экспериментальной установкѣ слѣдующаго электродинамическаго принципа (не упоминаемаго въ учебникахъ).

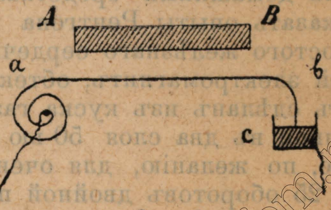
Если кольцевыя электромагнитныя линіи силъ тока распредѣляются несимметрично въ средахъ различной магнитной проницаемости, то проводникъ этого тока увлекается линіями силъ въ сторону той среды, коей магнитная проницаемость больше.

Такъ, напримѣръ, если ab (см. фиг. 1) есть подвижная часть проводника тока, а AB — неподвижно помѣщенный, параллельно ему, парамагнитный брусокъ, то линіи силъ, расположенныя несимметрично въ воздухѣ и въ массѣ этого бруска, стремятся приблизить ab къ AB. Наоборотъ, если брусокъ AB состоитъ изъ вещества діамагнитнаго, линіи силъ стремятся удалить ab отъ AB.

Можно было бы, слѣдовательно, устроить на этомъ принципѣ идеально простой прерыватель тока, напримѣръ, по схемѣ фиг. 2-ой, гдѣ AB — неподвижная полоса желѣза, расположенная



Фиг. 1.



Фиг. 2.

надъ проводникомъ — пружиною ab, и c — чашка со ртутью для замыканія тока.

Доказавъ на опытѣ возможность такого прибора, мы не

*) Вообще, считаю своею обязанностью предупредить товарищей, что пріобрѣвшая въ послѣднее время такую популярность нѣмецкая фирма Max Kohl'a, хотя и не назначаетъ слишкомъ высокихъ цѣнъ, но зато очень часто снабжаетъ насъ приборами крайне небрежно исполненными, а иногда и вовсе негодными.

стали, однакожъ, тратить времени на его изготовленіе въ виду того, что наврядъ-ли удалось бы достигнуть здѣсь достаточно широкаго размаха пружины *ab* безъ того, чтобы сама она не очень нагрѣвалась токомъ.

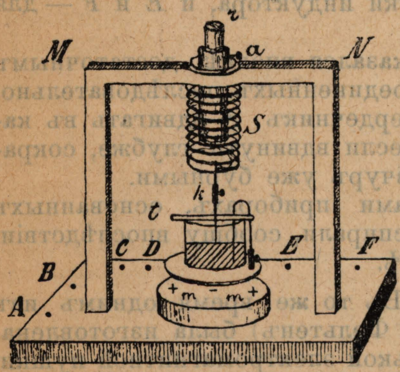
Вмѣсто этого, мнѣ пришла мысль примѣнить тотъ же принципъ къ усовершенствованію общеизвѣстнаго электродинамическаго прерывателя, носящаго названіе „спирали Рожета". Опытъ съ этой спиралью (на Амперовомъ столикѣ), вообще говоря, удается довольно плохо, требуетъ сильнаго тока, при которомъ сама спираль быстро нагрѣвается, и пр., такъ что, въ результатѣ, этотъ обычный въ курсѣ опытъ имѣлъ лишь значеніе учебное, но не практическое. Между тѣмъ, любой *кусокъ желѣза, вставленный внутрь такой вертикально подвѣшенной Рожетовской спирали, превращаетъ ее въ весьма энергичный и надежный ртутный прерыватель.*

Измѣняя толщину проволоки, діаметръ и число оборотовъ спирали, можемъ мѣнять въ широкихъ предѣлахъ число перерывовъ тока въ секунду, а вдвигая внутрь спирали желѣзный сердечникъ меньше или больше, можемъ въ столь же широкихъ предѣлахъ измѣнять величину размаха ныряющаго въ ртуть наконечника.

Опыты съ такою сокращающеюся подъ вліяніемъ собственныхъ линій силъ спиралью очень понравились ученикамъ и, надо сказать, они перевели не мало проволоки на изготовленіе различныхъ вибраторовъ по этому типу. Одинъ изъ нихъ сдѣлалъ даже особаго вида электрическій звонокъ, основанный на вибраціяхъ такой спирали (въ немъ, вмѣсто ртути, токъ замыкается самой чашкой колокольчика), другой—пока еще не сдѣлалъ, но обдумываетъ устройство особаго амперометра, и пр.

Въ томъ типѣ прерывателя, который мы окончательно сдѣлали домашними средствами и который далъ мнѣ возможность показать опыты Рентгена всему классу, я употребилъ вмѣсто простого желѣзнаго сердечника, вдвигаемаго въ спираль, небольшой электромагнитъ, обтекаемый тѣмъ же наводящимъ токомъ. Онъ сдѣланъ изъ куска газопроводной желѣзной трубки, обмотанной въ два слоя 50-ью оборотами $1^1/_2$ мм. проволоки (которые, по желанію, для очень сильныхъ токовъ можно соединить въ 25 оборотовъ двойной проволоки, чтобы избѣгнуть нагрѣванія). Это усложнило нѣсколько устройство прибора, но зато, какъ легко понять, введеніемъ этой второй, неподвижной спирали внутрь основной въ значительной степени увеличивается механическій эффектъ сокращеній послѣдней, при томъ, конечно, условіи, что направленіе тока въ обѣихъ спираляхъ одинаково. Даже въ томъ случаѣ, когда для внѣшней качающейся спирали мы брали вдвое (по длинѣ связанную) весьма тугую проволоку діам. въ 2 мм. и давали ей лишь 12 оборотовъ, сокращенія получались вполнѣ достаточные по размаху и быстротѣ.

Въ общемъ, нашъ прерыватель имѣетъ видъ, представленный на фиг. 3. Въ отверстіи верхней части солидной деревянной рамы MN закрѣпленъ верхній конецъ качающейся спирали S изъ толстой тугой проволоки и внутри таковой пустая катушка электромагнитной обмотки (намотанной на жестяную трубочку); сердечникъ r, сдѣланный изъ куска толстостѣнной газопроводной желѣзной трубки, входитъ внутрь этой катушки и можетъ быть закрѣпленъ въ любомъ положеніи при помощи нажимнаго винта a. Чѣмъ глубже вдвинутъ сердечникъ r въ свою катушку, тѣмъ энергичнѣе спираль S сокращается. Ныряющій въ ртуть наконечникъ соединенъ съ концомъ спирали посредствомъ клеммы k, что позволяетъ мѣнять его по желанію и укорачивать или удлинять; у насъ онъ сдѣланъ попросту изъ мѣдной проволоки, потому что серебряной подъ рукой не оказалось (платиновая для подобной цѣли не рекомендуется, равно какъ и желѣзная, ибо эти металлы не смачиваются ртутью). Стаканчикъ со ртутью помѣщенъ на кругломъ столикѣ, верхняя часть котораго, при помощи трехъ подъемныхъ винтовъ m, m, устанавливается на требуемой для регулировки прибора высотѣ. Это необходимо, ибо безъ надлежащей регулировки ныряніе наконечника можетъ оказаться недостаточно быстрымъ, почему индуктивный токъ при размыканіи не будетъ достигать требуемаго напряженія. Ради той же цѣли, необходимо поверхъ ртути прилить въ стаканчикъ воды или другой непроводящей тока жидкости, ибо при размыканіи тока прямо въ воздухѣ искра длится слишкомъ долго, и



Фиг. 3.

потому эффектъ индукціонной катушки становится ничтожнымъ. Я пробовалъ вмѣсто воды приливать поверхъ ртути другія жидкости, какъ спиртъ (винный и древесный), керосинъ и пр., но замѣтнаго улучшенія дѣйствія прибора не получилъ; и всѣ эти жидкости загрязняются одинаково быстро черною мутью, которая послѣ 2—3-хъ минутъ не позволяетъ даже видѣть искры и мѣшаетъ точной регулировкѣ уровня ртути. Чтобы обойти это неудобство, я воспользовался тѣмъ обстоятельствомъ, что нашъ кабинетный столъ снабженъ водяными кранами и отливомъ, и при помощи сифоннаго приспособленія устроилъ непрерывный протокъ воды черезъ чашечку со ртутью. При такомъ обмѣнѣ воды она все время, какъ бы долго приборъ ни работалъ, остается почти совсѣмъ чистою.

Какъ бы аккуратно спираль S ни была свита и установлена (она состоитъ у насъ лишь изъ 14 оборотовъ изолированной гуттаперчею проволоки 2 мм. въ діам., общая ея длина 10 цм., діаметръ оборотовъ—4,5 цм.), она при своихъ вертикальныхъ сокращеніяхъ скоро начинаетъ раскачиваться во всѣ стороны и разбрызгивать воду. Чтобы устранить это неудобство, пришлось снабдить еще стаканчикъ крышкою t съ центральнымъ отверстіемъ для ныряющаго наконечника и боковыми отверстіями для соединенія ртути съ батар. клеммой и для стеклянныхъ сифоновъ приводящаго и отливающаго воду.—Послѣ всѣхъ этихъ мелкихъ усовершенствованій, прерыватель дѣйствуетъ очень хорошо и вполнѣ годится для продолжительныхъ опытовъ съ индукціонною катушкою.

Въ немъ остался еще только одинъ недостатокъ, котораго намъ не удалось пока устранить: онъ прерываетъ токъ недостаточно часто (около 4 или 5 разъ въ секунду), вслѣдствіе чего при Рентгеновскихъ опытахъ замѣчается нѣкоторое мерцаніе тѣней на экранѣ. Думаю, однакожъ, что намъ вскорѣ удастся подобрать другую, болѣе быстро качающуюся спираль.

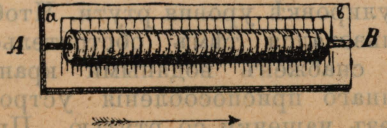
Подставка прибора снабжена клеммами: A и B—для батареи, C и D—для внутренней катушки индуктора, и E и F — для конденсатора.

Для всѣхъ нашихъ опытовъ оказался вполнѣ достаточнымъ токъ отъ шести аккумуляторовъ, соединенныхъ послѣдовательно, при чемъ приходилось желѣзный сердечникъ r вдвигать въ катушку лишь до половины ея, ибо, если вдвинуть глубже, сокращенія спирали S становились черезчуръ уже бурными.

О другихъ проектируемыхъ нами приборахъ, основанныхъ на томъ же принципѣ сокращеній спирали, сообщу впослѣдствіи; теперь перехожу къ другой новинкѣ.

III. Электромагнитная пушка. Въ то же время однимъ изъ учениковъ 6-го класса (по фамиліи Фельтенъ) была изготовлена, по моимъ указаніямъ, модель маленькой электромагнитной пушки. Если не ошибаюсь, эта пушка изобрѣтена въ Швеціи нѣкіимъ Биркеляндомъ и основана на принципѣ всасыванія желѣзнаго сердечника пустою катушкою, по оборотамъ коей пропускается сильный токъ. *)

Наша модель этого прибора, котораго нѣтъ еще ни въ физическихъ кабинетахъ, ни даже въ каталогахъ, устроена такъ: стеклянная трубка AB (фиг. 4), длиною въ 39 см. и внутр. діам.



Фиг. 4.

8 мм., изображающая дуло пушки, обмотана почти по всей длинѣ въ три слоя изолированною проволокою 1 мм. діам., но эта обмотка составлена изъ 34 отдѣльныхъ короткихъ катушекъ; концы проволокъ каждой такой катушки выведены наружу и съ одной

*) См. „Вѣстникъ" № 346 стр. 230. *Прим. ред.*

стороны припаяны къ одной общей проволокѣ ab, а съ другой оставлены свободными, очищены отъ изолировки и впущены въ разрѣзы деревянной доски, служащей подставкою. Проволока ab соединяется съ однимъ изъ полюсовъ батареи, а гибкій шнуръ, соединенный съ другимъ и снабженный на свободномъ концѣ мѣдною пластинкою, держится въ рукѣ. Вложивъ въ конецъ A трубки желѣзный стержень (пулю) и проведя возможно быстро мѣдной пластинкою, по направленію стрѣлки, по тому мѣсту деревянной доски, въ которое вдѣланы свободные концы катушекъ, произведемъ беззвучный выстрѣлъ: желѣзная пуля, всасываемая послѣдовательно каждою изъ катушекъ, пріобрѣтаетъ достаточное ускореніе и вылетаетъ изъ конца B съ пріобрѣтенною подъ конецъ скоростью.

Для удачной демонстраціи такой электромагнитной стрѣльбы нужно нѣсколько наловчиться: подобрать пулю соотвѣтственныхъ размѣровъ и вѣса, умѣть помѣстить ее въ концѣ A въ надлежащемъ мѣстѣ (въ противномъ случаѣ, она или не придетъ въ движеніе или вылетитъ даже въ обратномъ направленіи) и соразмѣрить скорость скольженія по свободнымъ концамъ катушекъ.

Въ подлинномъ экземплярѣ пушки Биркелянда, при опытахъ съ коимъ, пользовались токомъ въ 2300 амперовъ, послѣдовательное замыканіе тока въ катушкахъ производилось автоматически самой пулей, въ періодъ ея движенія внутри дула. Въ виду сложности подобнаго приспособленія, мы и не пробовали его воспроизвести, довольствуясь ручнымъ замыканіемъ.

Вслѣдствіе этого несовершенства или, быть можетъ, потому что размѣры, число оборотовъ, катушекъ и пр. несовсѣмъ удачно были нами выбраны, артиллерійскій эффектъ нашей пушки оказался довольно жалкимъ: при томъ же токѣ отъ шести аккумуляторовъ, она выбрасываетъ пулю (длиною въ 45 мм. и вѣсомъ въ 5 гр.) только на 7—8 шаговъ. Намъ некогда уже было передѣлать ее, но мнѣ кажется, что результатъ былъ бы гораздо лучше (при тѣхъ же прочихъ условіяхъ), если бы каждая изъ катушекъ была длиннѣе и заключала гораздо больше оборотовъ болѣе тонкой проволоки. Нагрѣванія и порчи изолировки здѣсь нечего бояться, ибо продолжительность тока въ каждой изъ катушекъ очень мала.

Интересно также замѣтить, что при этомъ опытѣ (если онъ удается) искры, замѣчаемыя при скольженіи мѣдной пластинки по свободнымъ концамъ проволокъ, получаются сравнительно слабыя. Это, вѣроятно, происходитъ оттого, что въ моментъ размыканія тока въ каждой катушкѣ экстратокъ ослабляется возникающимъ въ ней же индуктивнымъ токомъ обратнаго направленія, вызываемымъ удаленіемъ намагниченной пули.

(Продолженіе слѣдуетъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новыя измѣренія планетъ и ихъ спутниковъ. Недавно опубликованы результаты измѣреній планетъ и ихъ спутниковъ, произведенныхъ американскимъ астрономомъ Barnard'омъ 36-дюймовымъ рефракторомъ обсерваторіи Lick'a и 40-дюймовымъ рефракторомъ обсерваторіи Yerkes'a. Приводимъ нѣкоторые изъ полученныхъ результатовъ и сопоставимъ ихъ съ имѣвшимися ранѣе числами.

Діаметры планетъ:

Меркурій	при разстояніи, равномъ 1.	6."59	6."61 (Kaiser)
Венера		17. 14	17. 55 (Hartwig)
Марсъ (экватор. діам.)		9. 67	9. 35 (Hartwig)
„ (полярный „)		9. 58	
Церера		1. 06	—
Паллада		0. 68	—
Юнона		0. 27	—
Веста		0. 53	—
Юпитеръ (экватор. діам.)	разстояніе 5.2	38. 52	37. 69 (Kaiser)
„ (полярн. „)		36. 11	35. 50 (Kaiser)
„ I Спутникъ		1, 05	0. 83 (See)
„ II „		0. 85	0. 75 (See)
„ III „		1. 51	1. 26 (See)
„ IV „		1. 43	1. 17 (See)
Сатурнъ (экватор. діам.)	разст. 9.539	17. 80	17. 27 (Kaiser)
„ (полярный „)		16. 25	15. 39 (Kaiser)
„ Титанъ		0. 63	0. 73 (See)
Уранъ (экватор. діам.)	разст. 19.183	4. 15	3. 88 (Schiaparelli)
„ (полярный „)		3. 93	
Нептунъ (разстояніе 30.055)		2. 43	2. 24 (Lassel et Marth).

Интересно сопоставленіе опредѣленныхъ Barnard'омъ діаметровъ малыхъ планетъ съ опредѣленнымъ имъ же ихъ albedo, т. е. отражательною способностью дисковъ планетъ. Принимая albedo Марса равнымъ 1.00, Barnar нашелъ для albedo Цереры 0.67, Паллады 0.88, Юноны 1.67 и Весты 2.77. Эти числа объясняютъ тотъ фактъ, что, несмотря на значительную разницу въ величинахъ діаметровъ, блескъ этихъ планетъ немного отличается между собою, такъ какъ имѣющія наименьшіе діаметры Юнона и Веста обладаютъ наибольшими отражательными способностями.

В. А. Е.

О новомъ способѣ настраиванія станцій безпроводной телеграфіи при помощи мультипликатора. При „настраиваніи“ приборовъ безпроводнаго телеграфированія, въ цѣляхъ устранить перехватываніе депешъ какими-либо иными станціями, кромѣ той, которая вступаетъ въ обмѣнъ депешами, имѣетъ существенное значеніе надлежащее примѣненіе явленія резонанса. Необходимо достигнуть резонанса, во-первыхъ, между собственными колебаніями, присущими воздушному проводнику передающей станціи, съ проводами передатчика (настраиваніе самаго передатчика), во-вторыхъ, между собственными колебаніями воздушныхъ проводовъ на передающей и пріемной станціи и, въ-третьихъ, между собственными колебаніями воздушнаго проводника пріемной станціи съ пріемникомъ (настраиваніе самаго пріемника). Достиженіе резонанса можетъ быть осуществлено лишь путемъ послѣдовательныхъ испытаній. О новомъ методѣ подобныхъ испытаній сообщаетъ въ „Elektrotechnische Zeitschrift“ *Графъ Арко*. По отношенію къ настраиванію самаго передатчика, полученіе резонанса легко достижимо при посредствѣ включенія теплового прибора, съ предѣлами измѣренія отъ $^1/_{10}$ до $^1/_2$ ампера, въ воздушный проводникъ въ пунктѣ, соотвѣтствующемъ максимальной амплитудѣ волны силы тока, и измѣненія колебаній передатчика до тѣхъ поръ, пока приборъ не покажетъ максимальной силы тока. Что же касается настраиванія второго и третьяго рода, то оно хлопотливо и затруднительно.

Опыты были произведены между кабельнымъ заводомъ въ Обершпре берлинской фирмы Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft и зданіемъ, гдѣ помѣщается управленіе общества. На передающей станціи Обершпре воздушный проводникъ состоялъ изъ 10 мѣдныхъ кабелей, состоящихъ изъ 7 отдѣльныхъ проволокъ, которыя были подвѣшены къ пеньковому канату на разстояніяхъ около 2 m другъ отъ друга; канатъ былъ протянутъ на высотѣ 70 m между двумя отстоящими одна отъ другой на разстояніи 25 m дымовыми трубами; внизу мѣдныя проволоки шли къ расположенной въ 120 m передающей станціи. Воздушный проводъ возбуждался различнымъ образомъ, и всякій разъ достигалось при посредствѣ описаннаго выше способа соотвѣтствіе колебаній (резонансъ) пріемника. Затѣмъ на пріемной станціи устанавливалось настраиваніе катушки путемъ послѣдовательныхъ пробъ. Цѣлый рядъ произведенныхъ авторомъ измѣреній, результаты которыхъ представлены имъ наглядно въ графическомъ в..дѣ, доказываютъ правильность и точность описаннаго метода настраиванія и даютъ матеріалъ для сужденія относительно интересныхъ электрическихъ явленій, имѣющихъ мѣсто при различныхъ схемахъ; изъ этихъ данныхъ можно вывести заключенія относительно большей или меньшей цѣлесообразности той или иной схемы для надобностей настраиванія безпроводныхъ станцій.

(„Электротехн. Вѣстн.“).

Путь кометы Бореля. Комета открыта Борелемъ 8-го іюня 1903 года. На пути своемъ эта комета встрѣчала слѣдующія созвѣздія: Пегаса, Лебедя, Дракона и наконецъ (въ іюлѣ) Большой Медвѣдицы. За кометой можно слѣдить простымъ глазомъ.

Студ. *И. Данскій.*

3-ій Международный Конгрессъ Математиковъ. Въ послѣдней тетради „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ опубликованы рѣшенія комитета по созыву *3-ьяго Международнаго Конгресса Математиковъ въ Гейдельбергѣ въ 1904 году.*

1. Еще на съѣздѣ Германскаго Союза Математиковъ (Deutsche Mathematiker - Vereinigung) въ Гамбургѣ въ 1901 году президентомъ Конгресса избранъ H. Weber (Страсбургъ).

2. Завѣдующими спеціальными отдѣлами комитетъ избралъ:

a) ариѳметика и алгебра—Kneser (Берлинъ) и Lüroth (Фрейбургъ).

b) анализъ—Hilbert (Геттингенъ) и Schwarz (Берлинъ).

c) геометрія—Brill, Meyer (Кенигсбергъ) и Schur (Карльсруэ).

d) прикладная математика—Hauck, Klein (Геттингенъ) и Runge.

e) исторія математики—Cantor (Гейдельбергъ) и Stäckel (Киль).

f) педагогика—Schubert (Гамбургъ) и Treutlein.

3. Избранъ временный мѣстный комитетъ, въ который вошли городскіе совѣтники Гейдельберга и Cantor и Königsberger (оба въ Гейдельбергѣ).

4. Установлена плата въ 20 германскихъ марокъ за участіе въ конгрессѣ. Внесшій эту сумму получаетъ билетъ (Hauptkarte) и можетъ, кромѣ того, для членовъ своего семейства, пожелающихъ принять участіе въ конгрессѣ, получить дополнительныя карты (Nebenkarten), стоимостью каждая въ 10 марокъ.

5. Рѣшено съ конгрессомъ соединить праздникъ въ честь Jacobi.

Программа конгресса слѣдующая:—Въ понедѣльникъ 8-го августа 1904 года въ 5 часовъ (пополудни) засѣданіе комитета; въ 8 часовъ—встрѣча и пріемъ членовъ конгресса. Во вторникъ 9-го августа, отъ 10—1 часа утра первое общее засѣданіе (на немъ рѣчь Leo Königsberger'а); въ 4 часа — образованіе секцій; въ 6 часовъ—банкетъ. Въ среду, 10-го августа—засѣданія секцій отъ 9—11 и отъ 12—2. Въ четвергъ, 11-го августа отъ 10—1—второе общее засѣданіе (три или два доклада); въ 6 часовъ иллюминація Гейдельбергскаго Замка. Въ пятницу, 12-го августа отъ 9—11 и 12—2— засѣданія секцій. Въ субботу, 13-го августа въ 9 часовъ дѣловое засѣданіе; отъ 10—1 третье общее засѣданіе (два доклада и закрытіе Конгресса).

Послѣ докладовъ на общихъ засѣданіяхъ дебатовъ происходить не будетъ; докладчики на нихъ выбираются организаторами Конгресса.

Во время Конгресса будетъ ежедневно выходить особая газета, содержащая адреса участниковъ и программу занятій въ теченіе дня.

6. Съ Конгрессомъ будетъ соединена выставка моделей и литературы. Первой завѣдуютъ: Disteli, v. Dyck (Мюнхенъ) и Mehmke (Штуттгартъ); второй: Gutzmer (Іена) и Krazer.

Задача на премію Датской Академіи Наукъ. Академія Наукъ въ Копенгагенѣ предложила слѣдующую задачу:

„Indiquer les conditions nécessaires et suffisantes de la décomposition de deux polyèdres en un nombre fini des parties congruentes deux par deux, ou bien apporter une contribution à la solution de ce problème général ou donnant au moins les conditions pour le cas où l'un des solides est un polyèdre convexe et l'autre un cube. On devra aussi indiquer expressément quelles sont les pyramides, qui satisfont aux conditions trouvées". *)

Работа можетъ быть составлена на датскомъ, шведскомъ, англійскомъ, нѣмецкомъ, французскомъ или латинскомъ языкѣ, и должна быть доставлена не позже октября 1904 года секретарю Академіи: Prof. Dr. H. G. Zeuthen въ Копенгагенѣ. Рукопись безъ подписи должна быть снабжена эпиграфомъ и запечатаннымъ конвертомъ, содержащимъ внутри имя и адресъ автора и снаружи тотъ же эпиграфъ.

Новая біографія Helmholtz'a. Мы уже сообщали о выходѣ перваго тома обширной біографіи Helmholtz'a, составленной L. Königsberger'омъ **). Въ настоящее время вышли два остальныхъ тома этого сочиненія („Hermann von Helmholtz" von Leo Königsberger; II. Bd. и III. Bd.; Braunschweig. 1903). Томъ второй обнимаетъ, во-первыхъ, періодъ времени съ осени 1858 года до весны 1871, когда Helmholtz занималъ каѳедру физіологіи въ Гейдельбергѣ. Къ этому періоду относятся многочисленныя работы по физіологіи и физикѣ, оптикѣ и акустикѣ, а также изслѣдованія Helmholtz'a объ основаніяхъ геометріи. Большого интереса заслуживаетъ посвященное этому вопросу письмо Helmholtz'a къ Beltrami, опубликованное, насколько намъ извѣстно, въ первый разъ. Къ этому же времени относятся первыя работы Helmholtz'a въ области гидродинамики и электродинамики.

Во-вторыхъ, этотъ второй томъ обнимаетъ періодъ времени

---

*) „Указать условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы два многоугольника разлагались на конечное число попарно конгруэнтныхъ частей, или, по крайней мѣрѣ, приблизиться къ рѣшенію этого общаго вопроса; напримѣръ, изслѣдовать тотъ случай, когда одинъ изъ многогранниковъ выпуклый, а другой есть кубъ. При этомъ необходимо точно установить, каковы должны быть пирамиды, удовлетворяющія найденнымъ условіямъ".

**) См. „Вѣстникъ" № 339.

отъ весны 1871 года до весны 1888, когда Helmholtz занималъ каѳедру физики въ Берлинскомъ университетѣ. Къ этой эпохѣ относятся наиболѣе значительныя работы геніальнаго физика въ области электродинамики, гидродинамики, механики и термодинамики; далѣе, интереса заслуживаетъ переписка его съ Heinrich'омъ Hertz'емъ, опубликованная здѣсь впервые.

Ко второму тому приложены два портрета Helmholtz'a, выполненные художникомъ v. Lenbach'омъ въ 1884 и 1894 году.

Третій и послѣдній томъ этой монографіи заключаетъ въ себѣ эпоху, когда Helmholtz былъ президентомъ Физико-Техническаго Государственнаго учрежденія (Physikalisch-Technische Reichsanstalt), соотвѣтствующаго нашей Главной Палатѣ Мѣръ и Вѣсовъ, т. е. періодъ времени съ весны 1888 года до кончины его въ сентябрѣ 1894 года.

Къ этому послѣднему тому приложены два портрета Helmholtz'a, выполненные Lenbach'омъ въ 1894 году, портретъ его жены, писанный тѣмъ же художникомъ въ 1895 году, фототипія бюста Helmholtz'a, выполненнаго A. Hildebrand'омъ въ 1891 г.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

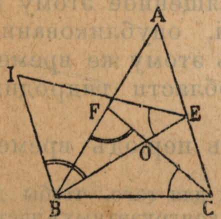
† Luigi Cremona. 10-го іюня (н. ст.) 1903 г. скончался въ Римѣ профессоръ Luigi Cremona. Покойный былъ однимъ изъ наиболѣе знаменитыхъ геометровъ второй половины 19-го вѣка.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Доказательство одной извѣстной теоремы.

Въ № 9 „Bulletin de Sciences Mathématiques et Physiques élémentaires" за текущій годъ помѣщено доказательство слѣдующей теоремы, принадлежащее M. Juel'ю изъ Копенгагена:

Треугольникъ, въ которомъ двѣ внутреннія биссектрисы равны, есть равнобедренный.



Положимъ, что въ $\triangle ABC$ биссектриса FC равна биссектрисѣ EB. Требуется доказать, что $\angle ABC = \angle ACB$ или, что то же, $\angle EBC = \angle FCB$.

Строимъ на биссектрисѣ BE $\triangle JBE = \triangle FBC$, какъ показываетъ рисунокъ.

$\angle BOC$, какъ внѣшній по отношенію къ $\triangle EOC$, равенъ суммѣ внутреннихъ угловъ, не смежныхъ съ нимъ

$$\angle BOC = \angle BEC + \angle ECF$$

или, замѣняя $\angle ECF$ угломъ JEB,

$$\angle BOC = \angle BEC + \angle JEB = \angle JEC \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Точно такъ же изъ $\triangle FOB$ находимъ

$$\angle BOC = \angle CFB + \angle ABE$$

или, замѣняя $\angle CFB$ угломъ JBE, а $\angle ABE$ угломъ EBC, имѣемъ

$$\angle BOC = \angle JBE + \angle EBC = \angle JBC \quad . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Сравнивая правыя части равенствъ (1) и (2), находимъ

$$\angle JEC = \angle JBC.$$

Принявъ во вниманіе, что

$$JE = BC,$$

видимъ, что четыреугольникъ $JECB$ есть параллелограммъ.

Такъ какъ діагональ дѣлитъ параллелограммъ на два равныхъ тр-ка, то

$$\triangle JEB = \triangle EBC;$$

отсюда

$$\angle JEB = \angle EBC.$$

Такъ какъ

$$\angle JEB = \angle FCB,$$

то

$$\angle EBC = \angle FCB.$$

Что и требовалось доказать.

РЕЦЕНЗІИ.

Курсъ физики (Теплота или тепловая энергетика). **Проф. Н. Д. Пильчикова.** Харьковъ. 1903.

Каждый новый курсъ физики, составленный, въ особенности, компетентнымъ ученымъ, представляетъ въ послѣднее время, при чрезвычайно быстромъ развитіи науки, особый интересъ. Запасъ накопляющихся ежегодно новыхъ фактовъ настолько великъ и разнообразенъ, что распредѣлить его надлежащимъ образомъ представляетъ значительныя трудности. Въ курсѣ изъ огромнаго запаса научнаго матеріала должно быть выдѣлено и освѣщено то, что при господствующемъ міровоззрѣніи можетъ считаться болѣе существеннымъ.

То новое, что внесено въ свой курсъ проф. Н. Д. Пильчиковымъ, заключается, прежде всего, въ стремленіи обосновать изложеніе тепловыхъ явленій на началахъ энергетики. Во вступленіи (слишкомъ, по моему мнѣнію, краткомъ) дается понятіе объ основахъ энергетики, этого новаго плодотворнаго, обобщающаго всѣ явленія природы ученія, созданнаго постепенно трудами

Р. Майера, Гельмгольца, Ранкина, Гельма, Оствальда и др. Раздѣляется курсъ проф. Пильчикова на 5 отдѣловъ: 1) *Термометрія.* (Здѣсь, между прочимъ, вводятся понятія о температурѣ, какъ напряженіи тепловой энергіи, и о термическомъ градіентѣ, обусловливающемъ тепловыя перемѣщенія).—2) *Калориметрія* (Методъ опредѣленія количества тепловой энергіи). — 3) Переходъ тѣлъ изъ одного физическаго состоянія въ другое. (Понятіе о кинетической теоріи строенія вещества). — 4) *Механическій эквивалентъ теплоты.* (Эквивалентность теплоты съ другими формами энергіи. Первый принципъ энергетики). — 5) *Теплопроводность.*

Обращается вниманіе въ книгѣ, между прочимъ, на новую теорію растворовъ, на сплавъ, на основные законы термохиміи, на свободную энергію и т. п.

Разсмотрѣнный курсъ, составляющій какъ бы введеніе въ термодинамику, заканчивается слѣдующими разсужденіями: „Такъ какъ всякія стройныя движенія, въ концѣ концовъ, благодаря различнаго рода пертурбирующимъ причинамъ, переходятъ въ движенія нестройныя, безпорядочныя, то становится понятнымъ основное положеніе энергетики: всѣ формы энергіи переходятъ сами собою въ тепловую форму. Легко также сообразить, что для того, чтобы нестройное движеніе привесть въ порядокъ — сдѣлать стройнымъ—надо затратить нѣкоторую часть энергіи на преодолѣніе тѣхъ движеній, которыя не совпадаютъ со стройными. Отсюда вытекаетъ другое основное положеніе энергетики: нѣкоторый запасъ теплоты можетъ перейти самъ собою нацѣло въ какую-нибудь другую форму энергіи“.

Проф. Н. Гезехусъ.

Б. П. Вейнбергъ. *Физика частичныхъ силъ.* (Публичныя лекціи съ математическими приложеніями). Одесса. 1903.

Авторъ считалъ небезполезнымъ напечатать эти лекціи, такъ какъ въ нашей популярной научной литературѣ нѣтъ книгъ, въ которыхъ систематически излагался бы отдѣлъ физики частичныхъ силъ. Чтобы сдѣлать книгу пригодною для студентовъ высшихъ учебныхъ заведеній, авторъ дополнилъ ее математическими приложеніями. Въ 22 лекціяхъ авторомъ разсмотрѣны достаточно подробно всѣ главнѣйшіе вопросы, касающіеся трехъ состояній тѣлъ. Изложено все очень хорошо, ясно и просто, какъ и вообще все, что исходитъ изъ-подъ пера автора, написавшаго уже не мало популярныхъ статей по физикѣ въ различныхъ журналахъ и выпустившаго, кромѣ того, отдѣльной брошюрой свои четыре общедоступныя бесѣды подъ заглавіемъ „Работа и Энергія“.

Проф. Н. Гезехусъ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 358 (4 сер.). Найти наименьшее цѣлое число, которое при дѣленіи на n даетъ въ остаткѣ r, при дѣленіи на $n+1$ даетъ остатокъ $r+1$, при дѣленіи на $n+2$ — остатокъ $r+2$ и т. д., наконецъ, при дѣленіи на $n+m$ даетъ остатокъ $r+m$.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 359 (4 сер.) На сторонѣ AB треугольника ABC взята точка C_1 такъ, что $AC_1=m.AB$, причемъ $1>m>0$; точно такъ же на сторонахъ AC и BC взяты точки B_1 и A_1 такъ, что $CB_1=m.AC$, $BA_1=m.BC$ Называя черезъ S площадь треугольника ABC, вычислить въ зависимости отъ S и m: 1) площадь треугольника $A_1B_1C_1$; 2) предѣлъ суммы площадей треугольниковъ $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2, \ldots$, $A_nB_nC_n$, получаемыхъ другъ изъ друга такъ же, какъ получается $A_1B_1C_1$ изъ ABC; 3) прослѣдить измѣненіе этого предѣла при измѣненіи m отъ 0 до 1 и показать, что предѣлъ этотъ достигаетъ minimum'а при извѣстномъ значеніи m, полагая S постояннымъ; 4) показать, что всѣ треугольники ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2, \ldots$ и т. д. имѣютъ общій центръ тяжести.

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 360 (4 сер.). Дано. что квадраты сторонъ AB и BC треугольника ABC пропорціональны длинамъ проэкцій этихъ сторонъ на прямую BC. 1) Предполагая, что углы B и C оба острые, показать, что треугольникъ ABC или равнобедренный, или прямоугольный. 2) Предполагая, что одинъ изъ угловъ B или C тупой, опредѣлить зависимость между углами B и C.

X. Вовси (Двинскъ).

№ 361 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^2-x^2y+y=41,$$
$$x^2+xy-y^2=29.$$

I. Ѳеодоровъ (Спб.).

№ 362 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$xy+yz+zx=11,$$
$$x^2+y^2+z^2=14,$$
$$xyz=6.$$

I. Ѳеодоровъ (Спб.).

№ 363 (4 сер.). При смѣшеніи абсолютнаго алкоголя, плотность котораго 0,79, съ равнымъ объемомъ воды происходитъ сокращеніе объема на $\frac{1}{20}$. 1) Опредѣлить показаніе въ такой смѣси обыкновеннаго спиртомѣра. 2) Сколько градусовъ покажетъ въ этой же смѣси ареометръ Боме, показывающій 10^0 въ водѣ и 0^0 въ соляномъ растворѣ плотности 1,075?

М. Гербановскій (Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 224 (4 сер.). *По данному основанію построить равнобедренный треугольникъ, въ которомъ сумма высотъ равняется половинѣ периметра.*

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Пусть a—боковая сторона, b — основаніе, B — уголъ при вершинѣ и A—уголъ при основаніи равнобедреннаго треугольника, AD, A_1D_1 и BM — высоты треугольника.

Такъ какъ $b=2a\cos A$, $AD=A_1D_1=a\sin B=a\sin(180^0-2A)=a\sin 2A$, то, согласно съ условіемъ, $\frac{a+a+a\cos A}{2}=a\sin A+a\sin 2A+a\sin 2A$ (1), или $a(1+\cos A)=a(\sin A+2\sin 2A)$, откуда

$$1+\cos A=\sin A+4\sin A\cos A \qquad (2).$$

Представляя уравненіе въ видѣ $1+\cos A=\sin A(1+4\cos A)$, возвысимъ обѣ части въ квадратъ, замѣнимъ во второй части $\sin^2 A$ черезъ $1-\cos^2 A$ и затѣмъ раздѣлимъ обѣ части на $1+\cos A$, что можно сдѣлать, такъ какъ $1+\cos A \neq 0$; тогда получимъ:

$$1+\cos A=(1-\cos A)(1+4\cos A)^2,$$

или,—послѣ раскрытія скобокъ, перенесенія всѣхъ членовъ въ первую часть и приведенія и дѣленія обѣихъ частей на 2,—

$$8\cos^2 A-4\cos A-3=0,$$

откуда, удерживая лишь положительный корень, такъ какъ уголъ A острый,

$$\cos A=\frac{1+\sqrt{7}}{4} \qquad (3).$$

Подставляя это значеніе $\cos A$ и соотвѣтствующее *положительное* значеніе $\sin A$ въ уравненіе (2), мы увидимъ, что найденное значеніе угла A дѣйствительно ему удовлетворяетъ (повѣрка эта вызвана тѣмъ, что при рѣшеніи уравненія (2) обѣ части его были возвышаемы въ квадратъ). Формулѣ (3) даемъ видъ $(m+\sqrt{m.7m}):4m$, откуда вытекаетъ слѣдующее построеніе: строимъ среднюю пропорціональную между произвольнымъ отрѣзкомъ m и отрѣзкомъ въ 7 разъ большимъ, прибавляемъ сюда отрѣзокъ m, и, принявъ полученную сумму за катетъ, а $4m$ за гипотенузу, строимъ прямоугольный треугольникъ. Острый уголъ, прилежащій къ катету $m+\sqrt{7m^2}$ есть искомый уголъ A; остается построить равнобедренный треугольникъ по данному основанію и углу A.

Примѣчаніе. Нѣкоторые изъ сотрудниковъ, рѣшившихъ эту задачу, подъ словами *сумма высотъ* поняли сумму *двухъ различныхъ высотъ*. Въ такомъ случаѣ во второй части уравненія (1) послѣдній членъ отпадаетъ, и уравненіе (2) замѣнится такимъ:

$$1+\cos A=\sin A+2\sin A,$$

или $2\cos^2\frac{A}{2}=2\sin\frac{3A}{2}\cos\frac{A}{2}$; дѣля обѣ части этого уравненія на $2\cos\frac{A}{2}$, что можно сдѣлать, такъ какъ $\cos\frac{A}{2}\neq 0$, имѣемъ:

$$\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{3A}{2}, \qquad \cos\frac{A}{2}=\cos\left(90-\frac{3A}{2}\right),$$

откуда, называя черезъ n произвольное цѣлое число, находимъ:

$$\frac{A}{2}=n.360^0+90^0-\frac{3A}{2} \text{ или } \frac{A}{2}=n.360^0-90^0+\frac{3A}{2}.$$

Рѣшая эти уравненія, находимъ: $A=45^0+n.180^0$, $A=90^0-n.360^0$ (4).

Такъ какъ A—острый уголъ, то (см. (4)) $A = 45^0$, такъ что искомый треугольникъ есть прямоугольный равнобедренный.

Л. Ямпольскій (Одесса); *Г. Огановъ* (Эривань); *Г. Бубликъ* (Сумы); *И. Плотникъ* (Одесса).

№ 278 (4 сер.). *Три различныхъ числа* α, β *и* γ *удовлетворяютъ соотношеніямъ*

$$\alpha^3 + p\alpha + q = 0,$$

$$\beta^3 + p\beta + q = 0,$$

$$\gamma^3 + p\gamma + q = 0.$$

Доказать, что

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma.$$

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Изъ условія задачи слѣдуетъ, что числа α, β и γ суть различные корни уравненія $x^3+px+q=0$, откуда, какъ это извѣстно изъ основъ теоріи уравненій, на основаніи теоремы Безу, вытекаетъ тожество: $x^3+px+q = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. Приравнивая, по раскрытіи скобокъ во второй части, коэффиціенты при x^2 въ обѣихъ частяхъ этого тожества, находимъ: $\alpha+\beta+\gamma=0$ (1). Изъ равенства (1) выводимъ: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = \alpha^3+\beta^3-(\alpha+\beta)^3 = -3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = -3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 3\alpha\beta\gamma$. Если три числа α, β и γ равны между собой, то предложенное для доказательства равенство обращается въ тожество; если же $\alpha=\beta$, но $\alpha \neq \gamma$, то три равенства, данныя въ условіи, приводятся лишь къ двумъ различнымъ. Въ этомъ случаѣ равенство $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ можетъ и не имѣть мѣста (напр., оно не имѣетъ мѣста при $p=-4$, $q=0$, $\alpha=\beta=0$, $\gamma=2$).

Г. Огановъ (Эривань); *В. Винокуровъ* (Москва); *Я. Дубновъ* (Одесса).

№ 282 (4 сер.). *Въ треугольникѣ* ABC *уголъ* C *вдвое больше угла* B. *Перпендикуляръ, возставленный въ точкѣ* A *къ прямой* AB, *встрѣчаетъ прямую* CB *въ точкѣ* D. *Доказать, что* BD = 2AC.

Пусть O—средина гипотенузы BD прямоугольнаго треугольника BDA. По извѣстному свойству прямоугольнаго треугольника, имѣемъ: $OA = OB = OD$ (1), а потому $\angle DOA = \angle B + \angle BAO = 2\angle B = \angle ACB$ (2). Если уголъ ACB острый, то углы DOA и ACB оба суть внутренніе углы треугольника AOC; дѣйствительно, если бы оба эти угла были внѣшними по отношенію къ треугольнику AOC, то углы, прилежащіе къ сторонѣ его OC, были бы оба тупые, что невозможно; если бы одинъ изъ угловъ DOA и ACB былъ внѣшнимъ, а другой внутреннимъ по отношенію къ треугольнику AOC, то одинъ изъ нихъ былъ бы болѣе другого, что невозможно, такъ какъ, по доказанному, углы эти равны. Итакъ, внутренніе углы (см. (2)) при основаніи OC треугольника AOC равны; поэтому $AC = AO$ (3). Подобными же разсужденіями доказывается равенство (3), если уголъ ACB тупой или прямой (въ послѣднемъ случаѣ точки O и C совпадаютъ). Изъ равенствъ (1) и (2) выводимъ: $BD = 2AO = 2AC$.

В. Копяткевичъ (Олонецкъ); *Н. Куницынъ* (Усть-Медвѣдица); *Д. Правдинъ* (Петрозаводскъ); *Я. Дубновъ* (Одесса).

№ 286 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$(x-y)(x+y+z) = a,$$

$$(y-z)(x+y+z) = b,$$

$$x^2+y^2+z^2+2^{-1}(xy+yz+zx) = c.$$

Введемъ слѣдующія обозначенія:

$$x+y+z=t \qquad (1),$$
$$x^2+y^2+z^2=u \qquad (2),$$
$$xy+yz+zx=v \qquad (3).$$

Возвышая въ квадратъ равенство (1) и пользуясь равенствами (2) и (3), находимъ:

$$t^2=u+2v \qquad (4).$$

Третье изъ предложенныхъ уравненій можно представить въ видѣ

$$2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx=2c, \text{ т. е.}$$
$$2u+v=2c \qquad (5).$$

Предполагая, что $x+y+z \neq 0$, находимъ изъ перваго и второго изъ данныхъ уравненій

$$x-y=\frac{a}{t},\quad y-z=\frac{b}{t} \qquad (6),$$

откуда,—складывая равенства (6) —

$$x-z=\frac{a+b}{t} \qquad (7).$$

Возвышая въ квадратъ равенства (6), (7), затѣмъ складывая ихъ и сокращая на 2, получимъ (см. (2), (3)):

$$u-v=\frac{a^2+ab+b^2}{t^2} \qquad (8).$$

Теперь изъ равенствъ (4), (5) и (8) исключимъ u и v, для чего достаточно сложить уравненія (4) и (5) и изъ полученнаго равенства вычесть равенство (8). Тогда находимъ:

$$t^2=2c-\frac{a^2+ab+b^2}{t^2},\quad t^4-2ct^2+(a^2+ab+b^2)=0,$$

откуда

$$t=\pm\sqrt{c\pm\sqrt{a^2+ab+b^2}}=\pm\sqrt{c\pm q} \qquad (9)$$

гдѣ $q=\sqrt{a^2+ab+b^2}$. Теперь остается рѣшить уравненія (1) и (6) относительно x, y и z. Такъ, напримѣръ, для нахожденія x, достаточно сложить удвоенное первое изъ равенствъ (6) со вторымъ и съ равенствомъ (1). Тогда находимъ (9):

$$x=\frac{t^2+2a+b}{3t}=\frac{2a+b+c\pm q}{\pm c\sqrt{c\pm q}}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$y=\frac{t^2-a+b}{3t},\quad z=\frac{t^2-a-2b}{3t}.$$

Предположеніе $t=x+y+z=0$, какъ это видно изъ перваго и второго уравненія данной системы, возможно лишь тогда, если $a=b=0$. Въ этомъ случаѣ изъ уравненій (4) и (5) находимъ: $u=x^2+y^2+z^2=\frac{4c}{3}$. Полагая одно изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ, z равнымъ произвольному числу, опредѣлимъ x и y безъ труда изъ уравненій: $x^2+y^2=\frac{4c}{3}-z^2$, $x+y=-z$.

Я. Сыченковъ (Орелъ); *А. Коротневъ* (Казань); *Н. С.* (Одесса); *Г. Огановъ* (Эривань).

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 24-го Іюля 1903 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 61.

Обложка
пщется

Обложка
ищется