№ 418.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ѳ. Кагана.

XXXV-го Семестра № 10-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1906.

XXXV Сем. № 10.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 418.

Матеріалы для учебника космографіи.

Ф. Павлова.

I.

Шарообразность земли.

Обычныя доказательства шарообразности земли, встрѣчающіяся въ учебникахъ космографіи, грѣшатъ чрезмѣрной элементарностью и представляютъ обыкновенно не болѣе какъ пересказъ матеріала, извѣстнаго учащимся изъ начальнаго курса географіи.

Нижеизложенное есть попытка дать болѣе соотвѣтствующее познаніямъ учениковъ выпускныхъ классовъ средней школы изложеніе того же предмета.

Предполагается, что учащіеся уже знакомы съ главными явленіями, сопутствующими суточному движенію свѣтилъ, въ зависимости отъ того или другого положенія мѣста наблюденія; знаютъ, что они знаютъ, такое ось міра и полюсы міра, а также имъ извѣстенъ законъ приращенія высотъ полюсовъ надъ горизонтомъ, пропорціонально приращеніямъ перемѣщеній наблюдателя къ сѣверу или къ югу вдоль линіи меридіана.—Законъ этотъ былъ извѣстенъ уже въ глубокой древности изъ наблюденій надъ в..

сотами полярной звѣзды, и можетъ быть формулированъ слѣдующимъ образомъ: *передвиженіямъ наблюдателя къ сѣверу или къ югу отъ даннаго мѣста соотвѣтствуютъ пропорціональныя имъ, положительныя или отрицательныя приращенія высотъ полярной звѣзды* (точнѣе: *полюсовъ міра*).

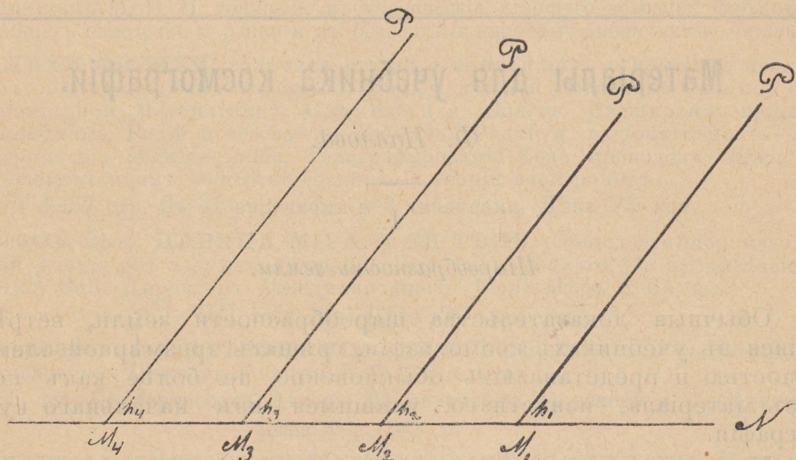
Докажемъ, что формулированный выше законъ не удовлетворяется, ежели предположить поверхность земли *плоскою*, при чемъ возможны, очевидно, двоякаго рода допущенія:

1) что полюсы міра (полярная звѣзда) удалены отъ насъ на безконечно большое, сравнительно съ земными, разстояніе; или—что размѣры вселенной безграничны, и полюсы міра не суть опредѣленныя точки на матеріальномъ сводѣ;

и 2) что вышеупомянутыя разстоянія конечны и легко сравнимы съ земными разстояніями, т. е., иными словами, что полюсы міра—фактически существующія точки на поверхности замкнутой и матеріальной сферы.

Допущеніе первое.

Принимая линію SN (фиг. 1) за сѣченіе поверхности земли плоскостью меридіана, а точки M_1, M_2, M_3, M_4 за послѣдова-



Фиг. 1.

тельныя положенія наблюдателя, получимъ, что всѣ лучи зрѣнія, направленные въ P (полюсъ міра, полярная звѣзда), должны быть параллельны между собой, а, слѣдовательно, высоты h_1. h_2, h_3, h_4 —*равны*, что противорѣчитъ закону измѣняемости высотъ, въ зависимости отъ положенія наблюдателя на линіи SN.

Допущеніе второе.

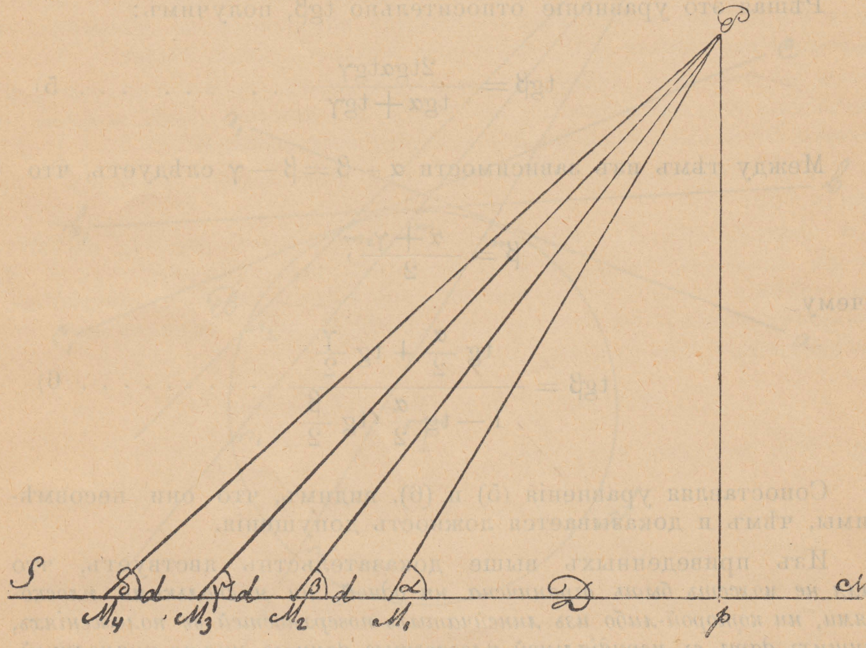
При тѣхъ же, какъ выше, значеніяхъ линіи SN и точекъ M_1, M_2, M_3, M_4 обозначаемъ буквой p недоступную наблюденію проекцію полюса міра P на поверхность земли. Тогда при равныхъ перемѣщеніяхъ

$$M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = d$$

полюса міра α, β, γ, δ (фиг. 2), приращенія высотъ должны быть также равны между собой, т. е.

$$\alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \delta.$$

Покажемъ, что одновременное удовлетвореніе обоихъ вышеписанныхъ условій невозможно.



Фиг. 2.

Называя разстояніе M_1p черезъ D, получимъ:

$$D\operatorname{tg}\alpha = (D+d)\operatorname{tg}\beta = (D+2d)\operatorname{tg}\gamma,$$

откуда:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{D+d}{D} \quad \ldots .1) \text{ и } \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{D+d}{D+2d} \quad \ldots . .2)$$

Умножая обѣ части равенства (2) на 2, получимъ:

$$\frac{2\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{2D+2d}{D+2d},$$

откуда:

$$\frac{2\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{D}{D+2d} \quad \ldots \ldots . .3)$$

Раздѣляя затѣмъ (2) на (3), имѣемъ:

$$\frac{\operatorname{tg}\gamma}{2\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta}=\frac{D+d}{D} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

откуда, сопоставляя (4) и (1), имѣемъ:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{2\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta}.$$

Рѣшая это уравненіе относительно $\operatorname{tg}\beta$, получимъ:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Между тѣмъ изъ зависимости $\alpha-\beta=\beta-\gamma$ слѣдуетъ, что

$$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

почему

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Сопоставляя уравненія (5) и (6), видимъ, что они несовмѣстимы, чѣмъ и доказывается ложность допущенія.

Изъ приведенныхъ выше доказательствъ явствуетъ, что *земля не можетъ быть ограничена ни одной, ни нѣсколькими плоскостями, ни которой-либо изъ линейчатыхъ поверхностей въ положеніяхъ, могущихъ дать съ меридіальной плоскостью даннаго мѣста прямолинейное сѣченіе.*

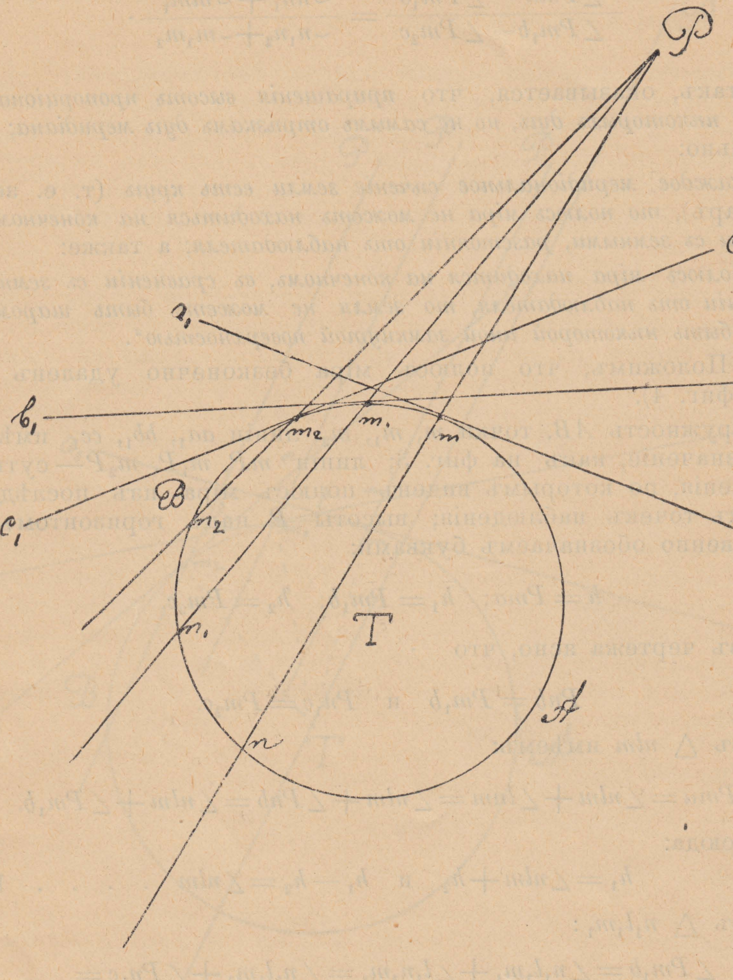
Это сѣченіе во всѣхъ широтахъ и долготахъ должно быть непремѣнно одною изъ плоскихъ и замкнутыхъ кривыхъ. (Сопоставить извѣстныя учащимся доказательства изъ курса географіи о сомкнутой поверхности земли). А такъ какъ изъ замкнутыхъ кривыхъ учениками средней школы изучается только окружность, то разберемъ, не удовлетворяетъ ли именно она наблюденнымъ свойствамъ.

Требуемый разборъ произведемъ опять таки въ двоякомъ направленіи:

1) въ предположеніи, что полюсы міра удалены отъ насъ на разстояніе конечное;

и 2) что разстояніе это безконечно велико.

1) Положимъ, что кругъ на фиг. 3 представляетъ меридіальное сѣченіе земли; P—полюсъ міра; m, m_1, m_2—три мѣста на земной поверхности; линіи aa_1, bb_1, cc_1—касательны къ точкамъ m, m_1, m_2 въ плоскости меридіана. Тогда углы $\angle Pma$, $\angle Pm_1b$ и



Фиг. 3.

$\angle Pm_2c$ представляютъ соотвѣтствующія высоты полюса надъ горизонтомъ. Приращенія высотъ выразятся разностями:

$$\angle Pma - \angle Pm_1b \quad \text{и} \quad \angle Pm_1b - \angle Pm_2c,$$

которымъ будутъ соотвѣтствовать полуразности дугъ

$$\frac{\smile mBn - \smile m_1Bn_1}{2} = \frac{\smile mm_1 + \smile nn_1}{2}$$

и

$$\frac{\smile m_1 B n_1 - \smile m_2 B n_2}{2} = \frac{\smile m_1 m_2 + \smile n_1 n_2}{2},$$

откуда:

$$\frac{\angle Pma - \angle Pm_1 b}{\angle Pm_1 b - \angle Pm_2 c} = \frac{\smile nn_1 + \smile mm_1}{\smile n_1 n_2 + \smile m_1 m_2}.$$

Итакъ, оказывается, что *приращенія высотъ пропорціональны суммамъ нѣкоторыхъ дугъ, но не самымъ отрѣзкамъ дугъ меридіана;* слѣдовательно:

„*если каждое меридіональное сѣченіе земли есть кругъ* (т. е. земля есть шаръ), *то полюсъ міра не можетъ находиться на конечномъ, въ сравненіи съ земными, разстояніи отъ наблюдателя;* а также:

„*если полюсъ міра находится на конечномъ, въ сравненіи съ земными, разстояніи отъ наблюдателя, то земля не можетъ быть шаромъ, а должна быть нѣкоторой иной замкнутой поверхностью*“.

2) Положимъ, что полюсъ міра безконечно удаленъ отъ земли (фиг. 4).

Окружность AB, точки m, m_1, m_2, линіи aa_1, bb_1, cc_1 имѣютъ то же значеніе, какъ на фиг. 3; линіи mP, m_1P, m_2P — суть тѣ направленія, по которымъ виденъ полюсъ міра изъ послѣдовательныхъ точекъ наблюденія; высоты P надъ горизонтомъ соотвѣтственно обозначаемъ буквами:

$$h = Pma; \quad h_1 = Pm_1 b; \quad h_2 = Pm_2 c.$$

Изъ чертежа ясно, что

$$Pnb = Pm_1 b \quad \text{и} \quad Pn_1 c = Pm_2 c.$$

Изъ $\triangle\, nlm$ имѣемъ:

$$\angle Pma = \angle nlm + \angle lnm = \angle nlm + \angle Pnb = \angle nlm + \angle Pm_1 b.$$

Отсюда:

$$h_1 = \angle nlm + h_2 \quad \text{и} \quad h_1 - h_2 = \angle nlm \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Изъ $\triangle\, n_1 l_1 m_1$:

$$\angle Pm_1 b = \angle n_1 l_1 m_1 + \angle l_1 n_1 m_1 = \angle n_1 l_1 m_1 + \angle Pn_1 c =$$
$$= \angle n_1 l_1 m_1 + \angle Pm_2 c.$$

Отсюда:

$$h_1 = \angle n_1 l_1 m_1 + h_2 \quad \text{и} \quad h_1 - h_2 = \angle n_1 l_1 m_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

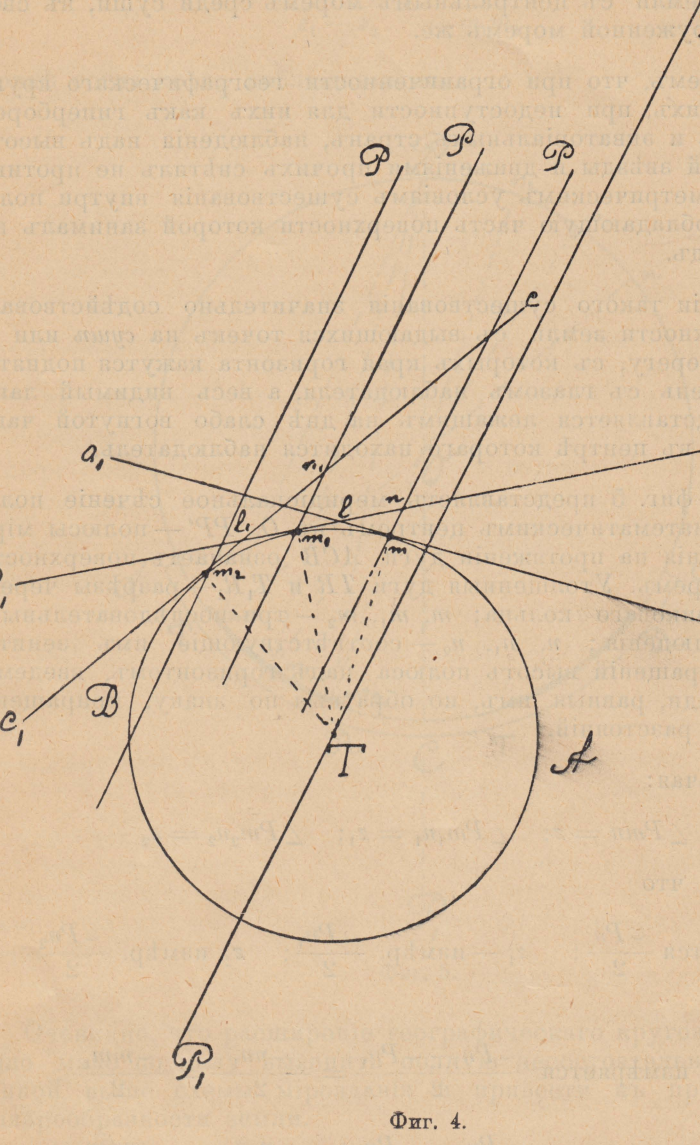
Въ равенствахъ (1) и (2) углы:

$$\angle nlm = \angle mTm_1 \quad \text{и} \quad \angle n_1 l_1 m_1 = \angle m_1 T m_2,$$

откуда видимъ, что „*приращенія высотъ полюса міра надъ горизон-*

томъ дѣйствительно измѣряются дугами земного меридіана, соотвѣтствующими перемѣщеніямъ наблюдателя къ N или S".

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что кругъ вполнѣ удовлетворяетъ



Фиг. 4.

наблюденіямъ надъ измѣненіями высотъ полюса; слѣдовательно земля дѣйствительно есть шаръ, такъ какъ шаръ есть единственное тѣло вращенія, всякое сѣченіе котораго есть кругъ.

Древніе избѣгали вполнѣ ясной и опредѣленной формулировки своихъ воззрѣній на геометрическую форму вселенной; скорѣе всего они склонялись къ представленію о полой сферѣ, небольшую часть внутренней поверхности которой занимала поверхность земли съ центральнымъ моремъ среди суши, въ свою очередь окруженной моремъ же.

Покажемъ, что при ограниченности географическаго кругозора древнихъ, при недоступности для нихъ какъ гиперборейскихъ, такъ и экваторіальныхъ странъ, наблюденія надъ высотами полярной звѣзды и движеніями прочихъ свѣтилъ не противорѣчили геометрическимъ условіямъ существованія внутри полой сферы, преобладающую часть поверхности которой занималъ небесный сводъ.

Иллюзіи такого существованія значительно содѣйствовалъ видъ поверхности земли съ выдающихся точекъ на *сушѣ* или на морскомъ берегу, съ которыхъ края горизонта кажутся поднятыми въ уровень съ глазомъ наблюдателя, а весь видимый ландшафтъ представляется лежащимъ на днѣ слабо вогнутой чаши или блюда, въ центрѣ котораго находится наблюдатель.

Пусть фиг. 5 представляетъ меридіональное сѣченіе полой сферы съ математическимъ центромъ въ O. PP' — полюсы міра. Двойная линія на протяженіи дуги ACB означаетъ поверхность, занятую моремъ. Утолщенныя дуги TR и T_1R_1 — разрѣзы черезъ части материковаго кольца; m, m_1, m_2 — три послѣдовательныхъ мѣста наблюденія; n, n_1, n_2 — соотвѣтствующіе имъ зениты. Вмѣсто приращеній высотъ полюса надъ горизонтомъ, введемъ, удобства ради, равныя имъ, но обратныя по знаку, приращенія зенитовыхъ разстояній.

Обозначая:

$$\angle Pmn = z; \quad \angle Pm_1n_1 = z_1; \quad \angle Pm_2n_2 = z_2$$

и замѣтивъ, что

$$z \text{ имѣряется } \frac{\smile Pn}{2}; \quad z_1 \text{ — измѣр. } \frac{\smile Pn_1}{2}; \quad z_2 \text{ измѣр. } \frac{\smile Pn_2}{2}.$$

получимъ:

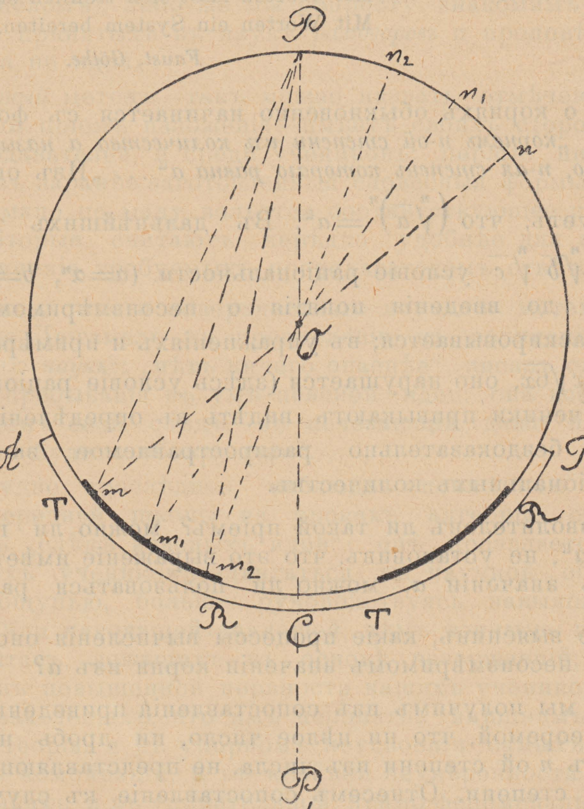
$$z - z_1 \text{ измѣряется } \frac{\smile Pn - \smile Pn_1}{2} = \frac{\smile nn_1}{2} = \frac{\smile mm_1}{2};$$

$$z_1 - z_2 \text{ измѣряется } \frac{\smile Pn_1 - \smile Pn_2}{2} = \frac{\smile n_1n_2}{2} = \frac{\smile m_1m_2}{2}.$$

Такимъ образомъ, хотя угловыя перемѣщенія полюса міра, въ зависимости отъ положенія наблюдателя, оказываются соотвѣтствующими лишь половиннымъ дугамъ земного меридіана, отношеніе этихъ перемѣщеній

$$\frac{z - z_1}{z_1 - z_2} = \frac{\smile mm_1}{\smile m_1 m_2}$$

вполнѣ согласно съ наблюдаемымъ.



Фиг. 5.

Очевидно, что расширеніе географическаго кругозора должно было мало по малу выяснить полную несостоятельность приведенной выше схемы мірозданія и привести къ представленію о шарообразности земли.

Разговорный методъ въ алгебрѣ.

А. Шапошникова.

Da eben, wo die Begriffe fehlen,
Da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein:
Mit Worten lässt sich trefflich streiten,
Mit Worten ein System bereiten.

***Faust*, *Göthe*.**

Ученіе о корняхъ обыкновенно начинается съ формальнаго опредѣленія: „*корнемъ n-ой степени изъ количества a называется такое количество, n-ая степень котораго равна a*“ ... „Изъ опредѣленія корня слѣдуетъ, что $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$“. Въ дальнѣйшихъ теоремахъ: $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}$ условіе раціональности ($a=\alpha^n$, $b=\beta^n$, $c=\gamma^n$), необходимое до введенія понятія о несоизмѣримомъ корнѣ, искусно замаскировывается; въ упражненіяхъ и примѣрахъ, вродѣ $\sqrt{24a^4x^3}=2a^2x\sqrt{6x}$, оно нарушается (здѣсь условіе раціональности: $x=6y^2$). *) Ученики привыкаютъ видѣть въ опредѣленіи научное *утвержденіе*, бездоказательно распространяемое за предѣлы алгебры раціональныхъ количествъ.

Но позволителенъ ли такой пріемъ? можно ли говорить о „корнѣ изъ a“, не установивъ, что это выраженіе имѣетъ смыслъ при данномъ значеніи a, можно ли пользоваться равенствомъ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, не выяснивъ, какіе процессы вычисленія оно символизируетъ при несоизмѣримомъ значеніи корня изъ a?

Отвѣтъ мы получимъ изъ сопоставленія приведеннаго опредѣленія съ теоремой, что ни цѣлое число, ни дробь не могутъ быть корнемъ n ой степени изъ числа, не представляющаго собой полной n-ой степени. Отнесемъ сопоставленіе къ случаю корня квадратнаго изъ трехъ; тогда окажется, что мы предлагаемъ учащимся слѣдующее утвержденіе:

Корень квадратный изъ трехъ есть нѣчто, не похожее ни на цѣлое число, ни на дробь и обладающее тѣмъ свойствомъ, что если мы возведемъ его въ квадратъ (т. е. выполнимъ дѣйствіе, получившее смыслъ лишь относительно цѣлыхъ чиселъ и дробей), *то получимъ число три.*

---

*) Изложеніе заимствовано изъ 9-го изданія алгебры А. Киселева (стр. 116, 117, 119).

Всматриваясь въ это любопытное утвержденіе *), вытекающее изъ сопоставленія теоремы съ опредѣленіемъ, мы должны допустить одно изъ двухъ: либо мы примѣняемъ здѣсь алгебраическую *сверхъ-логику*, опираясь на сомнительную аксіому о возможности совершать дѣйствія, смыслъ которыхъ еще не установленъ, и на не менѣе сомнительный постулатъ о возможности высказывать и комбинировать между собой сужденія о предметѣ, намъ абсолютно неизвѣстномъ (какъ $\sqrt{3}$ до ознакомленія съ ирраціональнымъ числомъ), либо же мы попросту знакомимъ учащихся съ системой принятыхъ въ наукѣ *разговоровъ* и проповѣдуемъ новыя фразы, а не идеи.

Разговорный методъ—такъ можно назвать отмѣченный нами неправильный пріемъ изложенія—имѣетъ своихъ сторонниковъ и среди преподавателей, и среди учениковъ: первые питаютъ надежду, что въ заранѣе заготовленныя словесныя формы, безъ ихъ содѣйствія, мало по малу вольется соотвѣтствующее научное содержаніе; вторые считаютъ нерѣдко удобнѣе для себя чисто внѣшнее изученіе требуемыхъ преподавателемъ отвѣтовъ.

По поводу такого поверхностнаго изученія математики высказался еще Дюгамель въ предисловіи къ сочиненію „*методы умозрительныхъ наукъ*“: „нѣтъ ничего опаснѣе“, писалъ онъ, „долговременнаго пребыванія въ умѣ неясной идеи; она всегда оставляетъ въ немъ свой слѣдъ, не исчезающій даже послѣ того, „какъ истина будетъ обнаружена“.

Не трудно прослѣдить, наблюдая психологію пониманія учениковъ средней школы на урокахъ алгебры, отмѣченный Дюгамелемъ „слѣдъ неясныхъ идей“; онъ проявляется въ привычкѣ нашихъ учениковъ—двигаться въ научной области неувѣренно, ощупью, больше руководствуясь навыкомъ къ вычисленіямъ или наводящей аналогіей, чѣмъ точнымъ представленіемъ о фактахъ, лежащихъ въ основѣ разсужденій; онъ проявляется и въ повышенной нервности нашихъ учениковъ на урокахъ, и въ заявленіяхъ, что имъ непонятна внѣшнимъ образомъ разученная теорія, и въ упорномъ неусвоеніи самыхъ простыхъ логическихъ комбинацій, и въ крайней неувѣренности учениковъ въ своихъ силахъ, и въ удивительной, прямо феноменальной забывчивости... Болѣзни и уродливости пониманія, обнаруживающіяся въ современной школѣ, еще ждутъ всесторонняго изученія; но и теперь можно сказать съ увѣренностью, что извѣстная ихъ часть всецѣло зависитъ отъ допущенныхъ моднымъ преподаваніемъ вопіющихъ экспериментовъ надъ логикой, здравымъ смысломъ и психикой нашихъ учениковъ.

Въ дальнѣйшемъ мы постараемся путемъ разбора изложенія теоріи мнимыхъ чиселъ, заимствованнаго изъ премированной

---

*) Какъ видитъ читатель, наши замѣчанія не относятся къ тѣмъ изложеніямъ, въ которыхъ опредѣленію корня придается смыслъ вопроса, лишь направляющаго аналитическое изслѣдованіе.

Ученымъ Комитетомъ алгебры Н. Билибина, установить существованіе у насъ особаго антинаучнаго направленія въ элементарной алгебрѣ, обнаружить его связь съ пріемомъ изложенія, названнымъ нами разговорнымъ методомъ, и вкратцѣ указать на его вредное вліяніе на учениковъ.

Въ § 380 третьяго изданія алгебры г. Н. Билибина можно прочесть:

Если число $-\frac{c}{a}$ *есть число отрицательное, то уравненіе* „$ax^2 + c = 0$ *не имѣетъ корней*"; къ этому утвержденію г. Билибинъ присоединяетъ *безъ всякихъ объясненій* слѣдующее замѣчаніе, относящееся къ „неимѣющему корней" уравнанію вида $ax^2 + b = 0$: „говорятъ, что оно *имѣетъ два мнимые корня*, представляемые формулами:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Мы такъ привыкли къ антинаучнымъ изложеніямъ алгебры, что требуется нѣкоторое усиліе вниманія, чтобы обнаружить неправильность приведеннаго изложенія; хотя не подлежитъ сомнѣнію, что авторъ, слѣдуя здѣсь *разговорному* методу, сообщаетъ ученикамъ, *какъ* ученые говорятъ, забывая сообщить, *что* именно они выражаютъ своими словами. До ознакомленія учениковъ съ мнимымъ числомъ и съ его теоріей, онъ ознакомляетъ ихъ съ фразеологіей, господствующей въ этой теоріи. Ясно, что онъ ставитъ мышленіе учениковъ въ безусловно критическое положеніе.

Имъ приходится разучивать недостаточное, а потому по существу непонятное изложеніе,—другими словами, приходится усваивать механически книжную премудрость, не разсуждая, не сопоставляя фактовъ, не комментируя выраженій автора, потому что всякая попытка освѣтить вопросъ обдумываніемъ должна роковымъ образомъ привести учениковъ къ абсурднымъ заключеніямъ при томъ запасѣ научныхъ представленій, который, повидимому, считаетъ достаточнымъ авторъ.

Дѣйствительно, рядъ сомнѣній должно возбудить уже формальное заявленіе автора „о существованіи корней у *не имѣющаго корней* уравненія; сомнѣніе еще усиливается отъ того, что корни этого „не имѣющаго корней" уравненія указываются формулами. Что же, спрашивается, считаетъ „формулой" г. Билибинъ? не побочный ли продуктъ заранѣе осужденной на неудачу попытки рѣшенія? Его „формула" не есть ли простой графическій слѣдъ на бумагѣ, причудливое сочетаніе математическихъ знаковъ, изобличающее выполненную до конца попытку найти то, что не можетъ быть найдено? Но въ такомъ случаѣ является вопросъ, слѣдуетъ ли „формулой" считать всякій слѣдъ на бумагѣ, или только слѣдъ, принявшій, такъ сказать, математическія очертанія?

Недоразумѣніе возбуждаетъ и грамматическое значеніе прилагательнаго „мнимый“ въ той фразѣ „есть мнимые корни“, которую по мнѣнію г. Билибина математики произносятъ тогда, когда корней нѣтъ. Если своимъ безусловно неяснымъ оборотомъ рѣчи г. Билибинъ хочетъ сказать, что математики произносятъ эту фразу тогда, когда желаютъ указать именно отсутствіе корней, то онъ считаетъ прилагательное „мнимый“ выраженіемъ, равносильнымъ отрицательному нарѣчію; съ этой точки зрѣнія фраза „число *не* записано“ была бы равносильна фразѣ: „записано *мнимое* число“.

Мы видимъ на приведенныхъ примѣрахъ, что въ стремленіи къ популяризаціи, къ модной „научности и педагогичности“ современные авторы забываютъ про ту очевидную истину, что въ педагогическомъ дѣлѣ совершенно недостаточно изрекать общепризнанныя истины; необходимо еще позаботиться объ ихъ правильномъ логическомъ освѣщеніи. Этимъ популяризаторамъ мозгъ ученика какъ бы представляется въ видѣ губки, способной впитывать научную премудрость въ любомъ концентрированномъ растворѣ. И если при произвольной (въ интересахъ „краткости и ясности“) концентраціи этого раствора изъ ихъ изложенія незамѣтно выпадаютъ самые существенные логическіе элементы, и прямой непосредственный смыслъ заявленій начинаетъ граничить съ безсмыслицей, то на помощь остроумнымъ авторамъ приходитъ принципъ „условности“ въ математикѣ: они „условно“, видите ли, говорятъ, что не имѣющее корней уравненіе имѣетъ корни, „условно“ говорятъ о возведеніи въ квадратъ чего то, что не похоже на знакомое ученикамъ число. Не похожи ли эти условія на безусловное освобожденіе отъ логики? Въ виду сказаннаго станетъ понятнымъ, отчего вдумчивые, анализирующіе ученики нерѣдко приходятъ къ выводу, формулированному моимъ бывшимъ товарищемъ по 6-му классу гимназіи, П. Тулиновымъ въ словахъ: „алгебра есть рядъ какихъ то странныхъ логическихъ фокусовъ“, а ихъ болѣе слабые товарищи, констатируя полное несоотвѣтствіе искусственной логики учебника съ природными свойствами своего ума, отчаиваются, предполагая, что математика создана для умовъ, особымъ образомъ устроенныхъ.

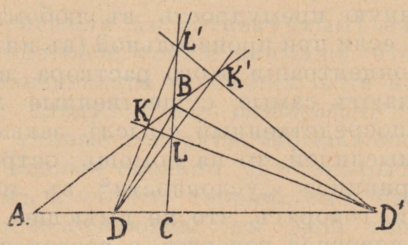
Мы глубоко вѣримъ, что только строгая и обстоятельная критика и послѣдующая разработка всѣхъ пріемовъ научнаго воздѣйствія на учениковъ окончательно выведетъ преподаваніе математики изъ современнаго его кризиса. Наличность же кризиса не требуетъ, надѣемся, доказательства для тѣхъ педагоговъ, которые вкладываютъ свою душу въ дѣло, стараясь передать ученикамъ свой взглядъ и свое пониманіе предмета. Они знаютъ, что при господствѣ современныхъ дидактическихъ и методическихъ пріемовъ, а также общей экзаменаціонной системы преподаванія съ формальнымъ контролемъ, съ тщательной регламентаціей (путемъ произвольно составленныхъ программъ, обязательныхъ инструкцій, искусственнаго отбора учебниковъ) каждаго шага педагогической дѣятельности, весьма трудно добиться мало-мальски сноснаго усвоенія учениками основъ алгебраической науки. И мы не ошибемся вѣроятно, если скажемъ, что въ настоящее время дѣйствительно хорошо обучаютъ алгебрѣ только исключительные по своимъ педагогическимъ талантамъ и знаніямъ учителя.

(Окончаніе слѣдуетъ).

О двухъ гармоническихъ группахъ трансверсалей треугольника.

В. Шлыгина.

1. Пусть имѣемъ треугольникъ ABC (фиг. 1) со сторонами $AB=c$, $BC=a$ и $AC=b$. Пусть биссектрисса внутренняго угла B



Фиг. 1.

пересѣкаетъ линію основанія AC въ точкѣ D, а биссектрисса внѣшняго угла B—въ точкѣ D'. Раздѣлимъ сторону AB точками K и K' такъ, чтобы имѣли мѣсто равенства:

$$\frac{AK}{BK}=\frac{AK'}{BK'}=\frac{b}{am}, \text{ гдѣ } m \text{ заданное число.}$$

Изъ точки D проведемъ трансверсали DK и DK', которыя пересѣкутъ сторону BC соотвѣтственно въ точкахъ L и L'. Такъ какъ по теоремѣ Менелая

$$BK.AD.CL'=AK.CD.BL'$$

и

$$BK'.AD.CL=AK'.CD.BL,$$

то, принимая во вниманіе, что $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{c}{a}$ и $\dfrac{AK}{BK}=\dfrac{AK'}{BK'}=\dfrac{b}{am}$,

находимъ:

$$\frac{CL}{BL}=\frac{CL'}{BL'}=\frac{b}{cm}.$$

2. *Теорема.* Точки D', L и K лежатъ на одной прямой линіи; точки D', K' и L' также лежатъ на одной прямой линіи.

Условимся считать $c>a$. Для доказательства соединимъ точку D' съ точками K и K' и допустимъ, что прямыя $D'K$ и $D'K'$ пересѣкутъ линію BC соотвѣтственно въ точкахъ X и X'. По теоремѣ Менелая имѣемъ:

$$BK.CX.AD' = AK.BX.CD'$$

и

$$BK'.CX'.AD' = AK'.BX'.CD'.$$

Отсюда $\dfrac{CX}{BX} = \dfrac{b}{cm} = \dfrac{CL}{BL}$ и $\dfrac{CX'}{BX'} = \dfrac{b}{cm} = \dfrac{CL'}{BL'}$; а это значитъ, что точка X совпадаетъ съ L, а точка X' совпадаетъ съ L'.

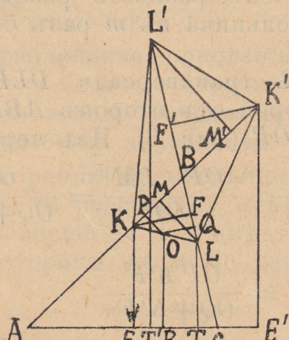
Очевидно, что точка D служитъ центромъ гармоническаго пучка прямыхъ DL', DB, DK' и DD', а точка D' -- центромъ гармоническаго пучка прямыхъ $D'L'$, $D'B$, $D'K$ и $D'D$.

Будемъ называть трансверсали, проходящія черезъ точку D, трансверсалями перваго рода; проходящія черезъ точку D' — трансверсалями второго рода.

При $m = \dfrac{b}{a}$ одна трансверсаль перваго рода и одна второго рода параллельны сторонѣ AB; при $m = \dfrac{b}{c}$ двѣ такія трансверсали параллельны BC. При $m = 0$ трансверсали перваго рода совмѣщаются съ биссектриссой угла B, а трансверсали второго рода—съ биссектриссой угла $\pi - B$; при $m = \infty$ трансверсали обоихъ родовъ совмѣщаются съ линіей основанія.

3. *Теорема.* Части трансверсалей перваго рода, заключенныя внутри вертикальныхъ угловъ $\pi - B$, и части трансверсалей второго рода, заключенныя внутри вертикальныхъ угловъ B, суть геометрическія мѣста точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ боковыхъ сторонъ треугольника AB и BG въ m разъ болѣе разстоянія отъ основанія AC.

Пусть построены, извѣстнымъ намъ способомъ, трансверсали перваго рода KL' и LK', проходящія внутри вертикальныхъ угловъ $\pi - B$, и трансверсали второго рода KL и $L'K'$, проходящія внутри вертикальныхъ угловъ B. (фиг. 2) Покажемъ сначала, что



Фиг. 2.

для перпендикуляровъ KF и KE, LM и LT, $L'M'$ и $L'T'$, $K'F'$ и

$K'E'$ справедливы соотношенія:

$$KF=mKE,\quad LM=mLT,\quad L'M'=mL'T',\quad K'F'=mK'E'.$$

Назовемъ высоты треугольника ABC черезъ h_a, h_b и h_c; имѣемъ:

$$\frac{AK}{KB}=\frac{b}{am}=\frac{KE}{h_b-KE}=\frac{h_a-KF}{KF}.$$

Изъ этихъ равенствъ опредѣлимъ KF и KE, возьмемъ ихъ отношеніе и, замѣчая, что $bh_b=ah_a$, получимъ $KF=mKE$.

Совершенно такъ же докажемъ справедливость и прочихъ соотношеній.

Возьмемъ теперь на отрѣзкѣ KL произвольную точку O, разстоянія которой отъ AB, BC и AC соотвѣтственно суть OP, OQ и OR. Изъ чертежа имѣемъ:

$$\frac{KE-OR}{OR-LT}=\frac{KF-OQ}{OQ}=\frac{OP}{LM-OP}.$$

Отсюда:

$$LM=\frac{OP.KF}{KF-OQ}\qquad(1),$$

$$LT=\frac{KF.OR-KE.OQ}{KF-OQ}\qquad(2).$$

Дѣля (1) на (2) и замѣчая, что $LM=mLT$ и $KF=mKE$, найдемъ:

$$OP+OQ=m.OR,$$

что и требовалось доказать.

Подобнымъ же образомъ убѣждаемся въ справедливости теоремы для каждаго изъ отрѣзковъ KL', $L'K'$ и $K'L$.

4. *Теорема.* Части трансверсалей перваго рода, заключенныя внутри вертикальныхъ угловъ B, и части трансверсалей второго рода, заключенныя внутри вертикальныхъ угловъ $\pi-B$, суть геометрическія мѣста точекъ, разность разстояній которыхъ отъ боковыхъ сторонъ треугольника въ m разъ болѣе разстоянія отъ основанія.

Пусть на части DL трансверсали DLK' взята нѣкоторая точка O, разстоянія которой отъ сторонъ AB, BC и AC соотвѣтственно суть OP. OQ и OR (фиг. 3). Изъ чертежа имѣемъ:

$$\frac{LT-OR}{K'E'-OR}=\frac{OP-LM}{OP}=\frac{OQ}{OQ+K'F'}.$$

Отсюда:

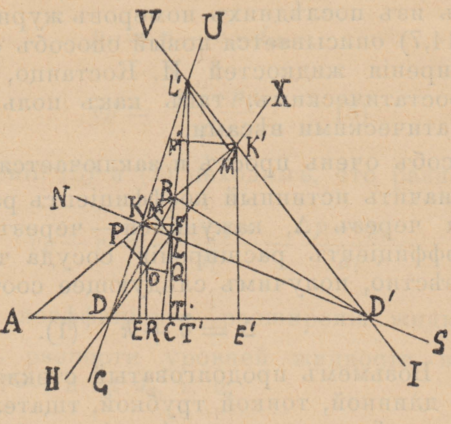
$$LM=\frac{OP.K'F'}{OQ+K'F'}\qquad(1),$$

$$LT=\frac{K'E'.OQ+K'F'.OR}{OQ+K'F'}\qquad(2).$$

Дѣлимъ (1) на (2). Замѣтивъ, что $LM = m.LT$ и $K'F' = mK'E'$, получимъ:

$$OP - OQ = mOR.$$

Легко убѣдиться, что такое же равенство имѣетъ мѣсто для каждой изъ прямыхъ $L'V$, $L'U$, LD', $D'\zeta$ и $D'\xi$. Аналогичное ра-



Фиг. 3.

венство имѣетъ мѣсто и для прямыхъ DH, DK, KN, $K'X$, $K'D'$ и $D'S$ съ тѣмъ только различіемъ, что разность въ лѣвой части равенства имѣетъ знакъ обратный.

5. Слѣдующія задачи могутъ служить иллюстраціями къ доказаннымъ теоремамъ.

1. На прямой MN, лежащей въ плоскости нѣкотораго треугольника ABC, найти точку, сумма (или разность) разстояній которой отъ двухъ сторонъ треугольника въ m разъ болѣе разстоянія отъ третьей стороны.

2. Внутри треугольника ABC опредѣлить геометрическое мѣсто такихъ точекъ m, чтобы изъ перпендикуляровъ mp, mq и mr къ тремъ его сторонамъ BC, AB, AC могъ составиться треугольникъ (задача Буняковскаго *)).

3. Прямая, параллельная основанію равнобедреннаго треугольника, пересѣкаетъ боковыя стороны въ точкахъ E и F. Показать, что сумма разстояній точекъ отрѣзка EF отъ сторонъ треугольника есть величина постоянная.

4. Данъ равносторонній треугольникъ ABC. Построить точку D такъ, чтобы сумма ея разстояній отъ вершинъ B и C равнялась разстоянію отъ вершины A, и вмѣстѣ съ тѣмъ, чтобы сумма ея разстояній отъ сторонъ AC и BC равнялась разстоянію отъ стороны AB.

---

*) См. Математическій Сборникъ. Т. III, стр. 121.

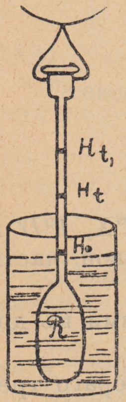
Гидростатическій способъ опредѣленія коэффиціента расширенія жидкостей И. Костанцо.

Н. Малова.

Въ одномъ изъ послѣднихъ номеровъ журнала Physikalische Zeitschrift (№ 14,7) описывается новый способъ опредѣленія коэффиціента расширенія жидкостей И. Костанцо, который авторъ называетъ гидростатическимъ, такъ какъ пользуется въ этомъ случаѣ гидростатическими вѣсами.

Этотъ способъ очень простъ и заключается въ слѣдующемъ.

Если обозначить истинный коэффиціентъ расширенія жидкости черезъ Δ, кажущійся — черезъ δ и объемный коэффиціентъ расширенія сосуда черезъ k, то, какъ извѣстно, получимъ слѣдующее соотношеніе:



$$\Delta = \delta + k \qquad (1).$$

Возьмемъ продолговатый стеклянный сосудъ (R) съ длинной, тонкой трубкой, тщательно прокалиброванной; внутреннее сѣченіе трубки обозначимъ черезъ s. Емкость сосуда до нѣкоторой мѣтки H_0 на трубкѣ при температурѣ 0^0С. обозначимъ черезъ u_0; внѣшній объемъ до той же мѣтки H_0 при 0^0 пусть будетъ v_0.

Наполнивъ сосудъ R испытуемой жидкостью при температурѣ 0^0 до мѣтки H_0, взвѣсимъ его въ воздухѣ; пусть вѣсъ сосуда съ жидкостью будетъ p. Затѣмъ, подвѣсивъ сосудъ съ жидкостью къ чашкѣ чувствительныхъ вѣсовъ, погрузимъ его до мѣтки H_0 въ сосудъ съ водой, температура которой поддерживается постоянной и равной t^0.(С). Жидкость въ сосудѣ R нагрѣется до t^0, вслѣдствіе чего объемъ ея увеличится и, слѣдовательно, уровень ея въ трубкѣ поднимется до нѣкоторой мѣтки H_t. Объемъ погруженной части сосуда тоже увеличится и будетъ, положимъ, v_t. Если плотность воды при температурѣ t^0 будетъ d_t, то сосудъ съ жидкостью въ водѣ потеряетъ въ своемъ вѣсѣ и уже будетъ вѣсить не p, а, положимъ, p_t, при чемъ, какъ извѣстно по закону Архимеда,

$$p_t = p - v_t . d_t .$$

Изъ этого уравненія имѣемъ:

$$v_t = \frac{p - p_t}{d_t} \qquad (2).$$

Измѣнимъ теперь температуру воды; напримѣръ, нагрѣемъ ее до t'^0; тогда, понятно, нагрѣются до t'^0 и сосудъ, погруженный въ нее, и находящаяся въ немъ жидкость. Вслѣдствіе нагрѣванія, уровень жидкости въ трубкѣ еще поднимется, напр. до мѣтки $H_{t'}$, а погруженная до мѣтки H_0 часть сосуда увеличится въ объемѣ и будетъ, положимъ, $v_{t'}$. Если опять черезъ $d_{t'}$ обозначить плотность воды при температурѣ t'^0, то въ водѣ стеклянный сосудъ съ жидкостью будетъ вѣсить $p_{t'}$; при чемъ

$$p_{t'} = p - v_{t'} . d_{t'},$$

откуда

$$v_{t'} = \frac{p - p_{t'}}{d_{t'}} . \qquad (3)$$

Изъ уравненій (3) и (2) находимъ, что разность

$$v_{t'} - v_t = \frac{p - p_{t'}}{d_{t'}} - \frac{p - p_t}{d_t} . \qquad (4)$$

Кажущійся коэффиціентъ расширенія жидкости, очевидно, опредѣлится изъ разности уровней жидкости въ трубкѣ $\overline{H_t H_{t'}}$, раздѣленной на $t' - t$ и на u_0, т. е.

$$\delta = \frac{s.\overline{H_t H_{t'}}}{u_0(t' - t)} . \qquad (5)$$

Объемный коэффиціентъ расширенія сосуда k опредѣлится изъ соотношенія:

$$k = \frac{v_{t'} - v_t}{v_0(t' - t)} \qquad (6)$$

или, замѣняя v_t и $v_{t'}$ ихъ значеніями изъ уравненій (3) и (2), находимъ:

$$k = \frac{1}{v_0(t' - t)} \left(\frac{p - p_{t'}}{d_{t'}} - \frac{p - p_t}{d_t} \right) . \qquad (7)$$

И, слѣдовательно, истинный коэффиціентъ расширенія жидкости Δ, равный $\delta + k$, будетъ выражаться такъ:

$$\Delta = \frac{1}{t' - t} \left[\frac{s.\overline{H_t H_{t'}}}{u_0} + \frac{1}{v_0} \left(\frac{p - p_{t'}}{d_{t'}} - \frac{p - p_t}{d_t} \right) \right] . \qquad (8)$$

Въ формулѣ (8) u_0, v_0, какъ постоянныя для даннаго прибора, могутъ быть опредѣлены разъ навсегда; d_t и $d_{t'}$ (плотность воды при различныхъ температурахъ) извѣстны по таблицамъ, и, слѣдовательно, въ каждомъ частномъ случаѣ придется опредѣлять температуру t и t', длину $\overline{H_t H_{t'}}$ и вѣсъ p, p_t и $p_{t'}$, что, очевидно, не представляетъ затрудненій.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новый способъ фотографическаго регистрированія показаній физическихъ приборовъ. Въ третьемъ выпускѣ Annalen der Physik 1906 г. Nimführ описываетъ весьма практичный способъ регистрированія показаній метеорографовъ, который можно съ удобствомъ примѣнять и ко всевозможнымъ физическимъ приборамъ. Употреблявшіеся до сихъ поръ обыкновенная бумага или аллюминіевый листъ авторъ замѣняетъ фотографической бумагой, тщательно навернутой на барабанъ и покрытой равномѣрнымъ слоемъ сажи. Отпечатки, нанесенные на эту бумагу заостренным карандашомъ, получаютъ подъ дѣйствіемъ свѣта темную окраску, которая фиксируется помощью виража, тогда какъ мѣста, покрытыя сажей, будучи почти нечувствительны къ свѣту, сохраняютъ бѣловатый оттѣнокъ, который они получаютъ послѣ того, какъ сажа смывается водой.

Этотъ способъ даетъ весьма точные результаты вплоть до мельчайшихъ деталей.

РЕЦЕНЗІИ.

Элементарная математика. Сост. **Н. Л. Орлицкій**. Изд. Іогансона, Кіевъ. 1906 г. Ц. 35 к.

Книжка эта, не смотря на свой малый объемъ [92 стр. мал. 8°], содержитъ въ себѣ помимо главнѣйшихъ формулъ алгебры, геометріи и тригонометріи, сопровождаемыхъ въ наиболѣе важныхъ случаяхъ выводомъ ихъ и чертежами, также типичныя задачи съ ихъ рѣшеніемъ. Въ приложеніи даются формулы (простѣйшія) аналитической геометріи, дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій и двѣ таблицы.

Книжка составлена умѣло, со знаніемъ и любовью къ предмету, и должна быть очень полезной для учащихся среднихъ учебныхъ заведеній.

Совѣтуемъ составителю въ слѣдующихъ изданіяхъ ввести главу о степеняхъ и переработать приложенныя формулы анализа, сдѣлавъ ихъ болѣе доступными для начинающаго, присоединивъ краткіе выводы ихъ.

И. Држевецкій.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 755 (4 сер.). Опредѣлить безъ помощи тригонометріи углы треугольника ABC, въ которомъ уголъ A вдвое больше угла B, если извѣстно, что внутренній биссекторъ AD, медіана BM и высота CH пересѣкаются въ одной точкѣ.

Е. Григорьевъ (Ташкентъ).

№ 756 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4+x^3+(3+a)x^2+(1+2a)x+2+a=0.$$

Г. Оганянцъ (Ялта).

№ 757 (4 сер.). Доказать, что число

$$\left(\frac{n-k(k-1)}{d^2}\right)^{2n}-1$$

дѣлится на $4n+1$, если $4n+1$—простое число, которое не есть дѣлитель $2k-1$, и если $n-k(k-1)$ дѣлится на d^2.

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 758 (4 сер.). Найти сумму n членовъ ряда

$$\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{5}{(2.3)^2}+\frac{7}{(3.4)^2}+\ldots+\frac{2k+1}{[k(k+1)]^2}+\ldots$$

и найти предѣлъ этой суммы при безконечномъ возрастаніи n.

Э. Лейнъкъ (Рига).

№ 759 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC, зная разстоянія $AO_a=d_a$, $BO_b=d_b$, $CO_c=d_c$ вершинъ треугольника отъ центровъ O_a, O_b, O_c внѣвписанныхъ круговъ, лежащихъ соотвѣтственно внутри угловъ A, B, C.

Н. С. (Одесса).

№ 760 (4 сер.). Въ ванну, наполненную ртутью, помѣщаютъ сплошной однородный желѣзный цилиндръ и приливаютъ столько воды, чтобы послѣдняя совершенно покрыла цилиндръ. Опредѣлить отношеніе объемовъ частей цилиндра, погруженныхъ въ воду и въ ртуть. Плотности желѣза, изъ котораго сдѣланъ цилиндръ, и ртути равны соотвѣтственно 7,8 и 13,6.

Л. Ямпольскій (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ

№ 650 (4 сер.) *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$2^{4x}+2^{y+1}.3^{2y+2}=17z.$$

Представимъ данное уравненіе въ видѣ

$$2^{4x}+2^{y+1}.3^{2y+2}=(2^4)^x+(2.3^2)^{y+1}=16^x+18^{y+1}=17z \quad (1),$$

легко заключить, что ни одинъ изъ показателей x или $y+1$ въ равенствѣ $16^x+18^{y+1}=17z$ не можетъ получать цѣлыхъ отрицательныхъ значеній. Дѣйствительно, если бы одинъ изъ показателей x или $y+1$ равнялся соотвѣтственно цѣлому отрицательному числу $(-m)$ или $(-n)$, то данное уравненіе можно было бы представить (см. (1)) въ одномъ изъ видовъ $\frac{1}{16^m}+18^{y+1}=$ $=17z$ (2), $16^x+\frac{1}{18^n}=17z$ (3), $\frac{1}{16^m}+\frac{1}{18^n}=17z$ (4), гдѣ m, n и z имѣютъ цѣлыя положительныя, $y+1$ и x цѣлыя и не отрицательныя значенія. Но изъ равенствъ (2) и (3) вытекаетъ, что дробныя числа $\frac{1}{16^m}$ и $\frac{1}{18^n}$ равны соотвѣтственно цѣлымъ числамъ $17z-18^{y+1}$ и $17z-16^x$; изъ равенства же (4) вытекало бы, что число $\frac{1}{16^m}+\frac{1}{18^n}$, представляющее собой правильную дробь,—такъ какъ $\frac{1}{16^m}<\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{18^n}<\frac{1}{2}$, а потому $\frac{1}{16^m}=\frac{1}{18^n}<1$,—равно цѣлому числу $17z$. Такъ какъ каждое изъ этихъ заключеній невѣрно, то

$$x\geqslant 0, \quad y+1\geqslant 0 \quad (5).$$

Поэтому (см. (5)) къ выраженіямъ $16^x=(17-1)^x$ и $18^{y+1}=(17+1)^{y+1}$ можно примѣнить формулу бинома, а потому равенство (1) можно записать въ видѣ

$$2^{4x}+2^{y+1}.3^{2y+2}=(17-1)^x+(17+1)^{y+1}=$$

$$=17^x-x.17^{x-1}+\ldots+x.17.(-1)^{x-1}+(-1)^x+17^{y+1}+\ldots+(y+1).17+1=$$

$$=\left[17^x-x.17^{x-1}+\ldots+x.17.(-1)^{x-1}+17^{y+1}+\ldots+(y+1).17\right]+$$

$$+\left[(-1)^{x-1}+1^y\right]=17z \quad (6).$$

Такъ какъ число $\left[17^x-x.17^{x-1}+\ldots+17^{y+1}+\ldots+(y+1).17\right]$ кратно 17, то (см. (6)) выраженіе $2^{4x}+2^{y+1}.3^{2y+2}$ кратно 17 тогда и только тогда, если число $(-1)^{x-1}+1^{y+1}$ кратно 17; но это число равно 2 при четномъ значеніи x и равно 0 при нечетномъ значеніи x; поэтому число $2^{4x}+2^{y+1}.3^{2y+2}$ кратно 17 при всякомъ цѣломъ положительномъ нечетномъ значеніи x и при любомъ цѣломъ, но не меньшемъ (-1) значеніи y (см. (5)) Такимъ образомъ рѣшенія даннаго уравненія можно выразить формулами

$$x=2t+1, \quad y=t', \quad z=\frac{2^{8t+2}+2^{t'+1}.3^{t'+2}}{17},$$

гдѣ t и t' любыя цѣлыя числа, удовлетворяющія неравенствамъ

$$t \geqslant 0, \quad t' \geqslant -1.$$

Г. Лебедевъ (Харьковъ); *Э. Лейнпкъ* (Рига).

№ 651 (4 сер.). *Дано, что шесть цѣлыхъ чиселъ* a, b, α, β, m, n *удовлетворяютъ равенству*

$$a^2[1-2\alpha m+m^2(\alpha^2+\beta^2)]+b^2[1-2\beta n+n^2(\alpha^2+\beta^2)]-2ab[m\beta+n\alpha-mn(\alpha^2+\beta^2)]=0.$$

Вычислить числовую величину выраженія

$$m^2\alpha^2+2mn\alpha\beta+n^2\beta^2.$$

Представивъ данное въ условіи равенство въ видѣ

$$a^2[1-2\alpha m+m^2(\alpha^2+\beta^2)]+b^2[1-2\beta n+n^2(\alpha^2+\beta^2)]-2ab[m\beta+n\alpha-mn(\alpha^2+\beta^2)]=$$

$$=(\alpha^2+\beta^2)(a^2m^2+2abmn+b^2n^2)+a^2+b^2-2a\alpha(am+bn)-2b\beta(am+bn)=$$

$$=(\alpha^2+\beta^2)(am+bn)^2+a^2+b^2-2(am+bn)(a\alpha+b\beta)=\alpha^2(am+bn)^2-2\alpha(am+bn)a+a^2+$$

$$+\beta^2(am+bn)^2-2\beta(am+bn)b+b^2=[\alpha(am+bn)-a]^2+[\beta(am+bn)-b]=0 \quad (1).$$

Такъ какъ, по условію, a, b, α, β, m и n суть вещественныя цѣлыя числа, то (см. (1)) $[\alpha(am+bn)-a]^2=0$ и $[\beta(am+bn)-b]^2=0$, а потому

$$\alpha(am+bn)=a \quad (2), \qquad \beta(am+bn)=b \quad (3).$$

Помноживъ равенства (2) и (3) соотвѣтственно на m и n и затѣмъ сложивъ ихъ, находимъ

$$(m\alpha+n\beta)(am+bn)=am+bn \quad (4).$$

Предположимъ, что хоть одно изъ двухъ чиселъ a и b не равно нулю; тогда и $am+bn \neq 0$, такъ какъ въ противномъ случаѣ мы имѣли бы (см. (2), (3) $a=0$ и $b=0$. Въ этомъ случаѣ равенство (4) можно сократить на $am+bn$, откуда находимъ $m\alpha+n\beta=1$, а потому

$$m^2\alpha^2+2mn\alpha\beta+n^2\beta^2=(m\alpha+n\beta)^2=1.$$

Если же $a=b=0$, то равенство (1) обращается въ тожество, и числовая величина выраженія $m^2\alpha^2+2mn\alpha\beta+n^2\beta^2=(m\alpha+n\beta)^2$ можетъ равняться любому точному квадрату.

Н. Доброгаевъ (Немировъ); *Е. Г.* (Одесса).

№ 652 (4 сер.). *Черезъ блокъ проходитъ нить незначительной массы, на концахъ которой подвѣшены:* 1) *мѣдный цилиндръ плотности* 8,8, *длиною въ* 20 *сантиметровъ;* 2) *желѣзный цилиндръ плотности* 7,8, *длиною въ* 15 *сантиметровъ. Мѣдный цилиндръ совершенно погруженъ въ воду, а желѣзный цилиндръ совершенно погруженъ въ алкоголь, плотность котораго равна* 0,8. *При этихъ условіяхъ приборъ находится въ равновѣсіи. Пренебрегая массой нити и потерей вѣса тѣла въ воздухѣ, а также принимая плотность воды равной* 1, *найти до какой высоты погрузится въ воду мѣдный цилиндръ, когда будетъ удаленъ сосудъ съ алкоголемъ и когда снова наступитъ равновѣсіе.*

Заимств. изъ *L'Éducation Mathématique.*

Называя площади основаній мѣднаго и желѣзнаго цилиндровъ, выраженныя въ квадратныхъ сантиметрахъ, соотвѣтственно черезъ a и b, находимъ, что въ пустотѣ эти цилиндры вѣсятъ соотвѣтственно $20.a.8{,}8$ и $15.b.7{,}8$ граммовъ, а вытѣсняемые ими при полномъ погруженіи объемы жидкостей, воды и алкоголя, вѣсятъ соотвѣтственно $20.a$ и $15.b.0{,}8$ граммовъ; такимъ образомъ мѣдный цилиндръ, при полномъ погруженіи въ воду, вѣситъ

$20a.8{,}8-20.a$ граммовъ, а желѣзный, при полномъ погруженіи въ алкоголь, $15.b.7{,}8-15.b.0{,}8$ граммовъ. Такъ какъ приборъ находится при этихъ условіяхъ въ равновѣсіи, то

$$20a.8{,}8-20.a=15.b.7{,}8-15.b.0{,}8, \text{ или } (20.8{,}8-20)a=(15.7{,}8-15.0{,}8)b \qquad (1).$$

Предположимъ, что по удаленіи сосуда съ алкоголемъ мѣдный цилиндръ, когда снова возстановилось равновѣсіе, оказался погруженнымъ въ воду на x сантиметровъ. Тогда вѣсъ мѣднаго цилиндра выразится черезъ $20.a.8{,}8-x.a$, а желѣзнаго (пренебрегая потерей вѣса въ воздухѣ) черезъ $15.b.7{,}8$ граммовъ; такъ какъ, по условію, при этомъ снова наступило равновѣсіе, то

$$20.a.8{,}8-x.a=15b.7{,}8, \text{ или } (20.8{,}8-x).a=15.7{,}8b \qquad (2).$$

Дѣля равенство (2) на равенство (1), находимъ

$$\frac{20.8{,}8-x}{20.8{,}8-20}=\frac{15.7{,}8}{15.7{,}8-15.0{,}8}=\frac{7{,}8-0{,}8}{7{,}8}=\frac{7}{7{,}8},$$

откуда

$$x=2\frac{6}{35} \text{ сантиметра.}$$

А. Варенцовъ (Ростовъ н/Д); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ).

Поправки.

1) Въ задачѣ № 564 въ № 383 „Вѣстника" вмѣсто

$$(\cot BAD+\cot DAE(\cot CAE+\cot EAD)=\operatorname{cosec}^2 DAE$$ слѣдуетъ

читать $$(\cot BAD+\cot DAE)(\cot CAE+\cot EAD)=4\operatorname{cosec}^2 DAE.$$

2) Въ задачѣ № 624 въ № 393 „Вѣстника" вмѣсто

$$s=\frac{2m_a m_b m_c\sqrt{2}}{-3\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2}}$$ слѣдуетъ читать $$s=\frac{2m_a m_b m_c\sqrt{2}}{3\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2}}.$$

3) Въ задачѣ № 680 въ № 402 „Вѣстника" въ лѣвой части предложеннаго для доказательства равенства вмѣсто

$$\frac{1}{a_1}+\frac{a_1+r}{a_1a_2}+\frac{(a_1+r)(a_2+r)r}{a_1a_2a_3}+\ldots+\frac{(a_1+r)(a_2+r)\ldots(a_{n-1}+r)}{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n}$$

слѣдуетъ читать

$$\frac{1}{a_1}+\frac{a_1+r}{a_1a_2}+\frac{(a_1+r)(a_2+r)}{a_1a_2a_3}+\ldots+\frac{(a_1+r)(a_2+r)\ldots(a_{n-1}+r)}{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n}.$$

4) Въ задачѣ № 711 въ № 409 „Вѣстника" вмѣсто

$$\frac{4(1+\sqrt{x})+x}{\sqrt[3]{2(3x+4)+(x+2)\sqrt{x}}}$$

слѣдуетъ читать

$$\frac{4(1+\sqrt{x})+x}{\sqrt[3]{2(3x+4)+(x+12)\sqrt{x}}}.$$

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66.