№ 513.

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

# ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XLIII-го Семестра № 9-й.



ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1910.

XLIII Сем. № 9.

# Вѣстникъ Опытной Физики

и

# ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 513.



## Понятіе объ ирраціональномъ числѣ въ курсѣ средней школы.

(По поводу статьи Е. И. Смирнова въ № 511 „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики").

Въ настоящее время многіе педагоги-математики задумываются надъ вопросомъ, какъ всего проще, цѣлесообразнѣе и доступнѣе ознакомить учащихся средней школы съ понятіемъ объ ирраціональномъ числѣ. Вопросъ этотъ серьезный и важный и заслуживаетъ вниманія, такъ какъ принятые нынѣ методы ознакомленія, большею частью, грѣшатъ существенными недостатками: одни изъ нихъ построены на большихъ логическихъ натяжкахъ, другіе крайне отвлеченны и потому непедагогичны.

Поэтому попытка г. Смирнова предложить новый способъ кажется мнѣ вполнѣ цѣлесообразной и умѣстной. Но предлагаемый имъ методъ вызываетъ самыя серьезныя возраженія.

Сущность метода г. Смирнова сводится къ слѣдующему. Установивъ предварительно понятіе о предѣлѣ (ранѣе изученія вопроса о квадратныхъ корняхъ), онъ показываетъ учащимся, что для всякаго положительнаго числа $A$, не являющагося полнымъ квадратомъ, можно подобрать два числа вида $\frac{x+1}{n}$ и $\frac{x}{n}$ ($x$ и $n$ — числа цѣлыя и положительныя, разность которыхъ $\frac{1}{n}$ безгранично мала и которыя притомъ удовлетворяютъ неравенству $\left(\frac{x}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$. Показавъ это, онъ обнаруживаетъ, что разность чиселъ $\left(\frac{x+1}{n}\right)^2$ и $\left(\frac{x}{n}\right)^2$ при данныхъ условіяхъ также безгранично мала, а отсюда дѣлаетъ выводъ, что число $A$ есть общій предѣлъ перемѣнныхъ чиселъ $\left(\frac{x}{n}\right)^2$ и $\left(\frac{x+1}{n}\right)^2$. Послѣ этого онъ доказываетъ, что среди чиселъ, до той поры извѣстныхъ учащимся (цѣлыхъ и дробныхъ), нѣтъ такого, которое могло бы служить предѣломъ для чиселъ $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, и наряду съ этимъ выясняетъ (на основаніи геометрическихъ соображеній) необходимость созданія новаго числа, которое и являлось бы указаннымъ предѣломъ. Это новое (ирраціональное) число $z$ и опредѣляется, какъ такое, которое служитъ общимъ предѣломъ чиселъ $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$ при безграничномъ возрастаніи $n$.

Разсмотримъ, насколько подобное опредѣленіе допустимо съ логической точки зрѣнія. Авторъ статьи не указываетъ, что онъ разумѣетъ подъ словомъ „предѣлъ"; поэтому можно заключить, что онъ понимаетъ этотъ терминъ въ его общепринятомъ значеніи, т. е. предѣломъ перемѣннаго количества $\left(\frac{x}{n}\right)$ и $\left(\frac{x+1}{n}\right)$ называетъ постоянное, обладающее тѣмъ свойствомъ, что разность между нимъ и даннымъ перемѣннымъ $\left(z - \frac{x}{n}, \frac{x+1}{n} - z\right)$ безгранично мала. Такимъ образомъ, по его методу понятіе объ ирраціональномъ числѣ $z$, неизвѣстномъ еще ученикамъ, выясняется при помощи понятія о разности между этимъ самымъ неизвѣстнымъ $z$ и перемѣннымъ раціональнымъ числомъ $\frac{x}{n}$ $\left(\text{или } \frac{x+1}{n}\right)$. Неужели авторъ не замѣчаетъ, что онъ попалъ здѣсь въ логическій кругъ?

Съ подобнымъ же логическимъ кругомъ мы встрѣчаемся и въ дальнѣйшемъ изложеніи, когда авторъ, не выяснивъ предварительно смысла дѣйствій надъ ирраціональными числами и, въ частности, понятія объ ихъ умноженіи, приходитъ къ выводу, что квадратъ разсматриваемаго имъ ирраціональнаго числа $z$ долженъ быть равенъ $A$. На этотъ разъ авторъ дѣлаетъ оговорку, что предлагаемое имъ объясненіе содержитъ логическій недочетъ, но считаетъ такой пріемъ вполнѣ допустимымъ въ V классѣ, такъ какъ правильное разсужденіе „слишкомъ удлинило бы и безъ того уже длинную теорію".

Попадаются въ статьѣ другіе, второстепенные промахи (напримѣръ, слѣдующія сужденія, несовмѣстимыя съ понятіемъ о предѣлѣ: стр. 167 — „концы этихъ отрѣзковъ стремятся къ нѣкоторому общему предѣлу — къ точкѣ $M$"; стр. 170 — перемѣнныя числа $\frac{x}{n}$, $\frac{x+1}{n}$ и др. „достигаютъ своего предѣла"); но они въ данномъ случаѣ существеннаго значенія не имѣютъ, и могутъ быть безъ труда исправлены. Можетъ быть устраненъ и тотъ логическій недочетъ, на который указываетъ самъ авторъ; для этой цѣли достаточно ввести обозначеніе $z=\sqrt{A}$, не приписывая этому радикалу полностью того значенія, которое онъ имѣлъ для случая извлеченія корня изъ полнаго квадрата, и отложить доказательство равенства $z^2=A$ до того времени, когда будетъ пройдена теорія дѣйствій надъ ирраціональными числами. Но можетъ ли быть устраненъ тотъ основной промахъ, который былъ отмѣченъ выше? Я это отрицаю.

Этотъ логическій кругъ, въ который незамѣтно для самого себя впадаетъ авторъ, проистекаетъ изъ самой сущности его метода. Въ самомъ началѣ статьи онъ говоритъ, что „установленіе понятія объ ирраціональныхъ числахъ необходимо должно опираться на понятіе о предѣлѣ", и, развивая эту основную мысль, приходитъ къ необходимости опредѣлять понятіе объ ирраціональномъ числѣ при помощи понятія о разности между этимъ самымъ опредѣляемымъ числомъ и другимъ, извѣстнымъ. Поэтому разсужденія г. Смирнова опровергаютъ его собственный основной тезисъ, и вполнѣ правильный выводъ изъ его статьи таковъ: установленіе понятія объ ирраціональномъ числѣ ни въ какомъ случаѣ не должно опираться на понятіе о предѣлѣ, такъ какъ этотъ путь ведетъ къ логическому кругу въ самомъ опредѣленіи.

Но, быть можетъ, необходимо примириться съ логической ошибкой въ исходномъ пунктѣ, въ цѣляхъ педагогическихъ? Сомнѣваюсь, чтобы кто-либо изъ педагоговъ нашелъ такой пріемъ цѣлесообразнымъ. Можно (и должно) предлагать учащимся безъ доказательства такія истины, выводъ которыхъ для нихъ въ данное время недоступенъ; но при этомъ необходимо заставить ихъ убѣдиться въ справедливости данной истины на частныхъ примѣрахъ и лишь доказательство общности данной истины отложить до болѣе зрѣлаго возраста; такъ, напримѣръ, поступаютъ при ознакомленіи учащихся съ перемѣстительными и другими законами умноженія. Можно (и должно) сообщить учащимся неполныя опредѣленія съ тѣмъ, чтобы пополнять ихъ по мѣрѣ расширенія даннаго понятія; такъ дѣлаютъ, напримѣръ, при изученіи умноженія на цѣлое число, на дробное и т. д. Но давать завѣдомо неправильныя опредѣленія — не значитъ ли поступаться тѣми цѣлями, ради которыхъ изучается математика, да и другіе предметы, въ средней школѣ?

Какъ же въ такомъ случаѣ вести ознакомленіе учащихся съ понятіемъ объ ирраціональномъ числѣ? Я постараюсь вкратцѣ изложить свою точку зрѣнія на этотъ вопросъ.

Основное методическое затрудненіе, которое представляется преподавателю при всякомъ расширеніи понятія о числѣ, заключается въ томъ, что для учащихся можетъ быть неясна необходимость введенія новыхъ чиселъ и неизвѣстна та категорія величинъ, значенія которыхъ могутъ быть этими числами выражены. То и другое лучше всего выясняется на конкретномъ, незамысловатомъ примѣрѣ. Пусть, напримѣръ, преподаватель предложитъ учащимся для рѣшенія такую задачу: „по сторонѣ даннаго квадрата, принимаемой за единицу, найти сторону квадрата, имѣющаго вдвое большую площадь". Учащіеся (которые уже должны быть знакомы съ извлеченіемъ квадратнаго корня изъ полнаго квадрата, а также съ существованіемъ неполныхъ квадратовъ и съ нахожденіемъ наибольшаго цѣлаго числа, квадратъ котораго не превышаетъ даннаго неполнаго квадрата) безъ труда найдутъ, что данная задача вычисленіемъ не рѣшается, такъ какъ не существуетъ такого цѣлаго или дробнаго числа, квадратъ котораго былъ бы равенъ 2; тогда преподаватель предложитъ имъ рѣшить эту задачу построеніемъ; такое построеніе весьма просто, и оказывается, что искомой стороной является діагональ даннаго квадрата.

Изъ предыдущихъ разсужденій учащимся ясно, что длина этой діагонали не можетъ быть выражена никакимъ цѣлымъ или дробнымъ числомъ; поэтому очевидно, что необходимо ввести какой-либо новый числовой символъ для ея обозначенія. Естественно ввести условіе, чтобы эта длина была выражена числомъ $\sqrt{2}$, при чемъ основныя свойства этого символа остаются еще не опредѣленными.

Чтобы учащіеся могли составить себѣ полное представленіе о новомъ символѣ, необходимо указать, какимъ условіемъ опредѣляется мѣсто послѣдняго въ ряду раціональныхъ чиселъ. Это проще всего сдѣлать такъ.

Прежде всего преподаватель обнаруживаетъ, что вышеупомянутая діагональ квадрата можетъ быть измѣрена приблизительно при помощи любой доли принятой единицы длины. Напримѣръ, пусть нужно измѣрить ее въ десятыхъ доляхъ указанной единицы, и пусть наибольшее число этихъ десятыхъ долей, укладывающихся на данной діагонали, будетъ $a$; построивъ квадраты на отрѣзкахъ, составленныхъ соотвѣтственно изъ $a$ и $a+1$ десятой доли единицы, и сравнивая ихъ съ квадратомъ, построеннымъ на діагонали, учащіеся легко убѣждаются, что площадь послѣдняго должна заключаться между площадями первыхъ двухъ, т. е. что число $a$ подчиняется неравенству $\left(\frac{a}{10}\right)^2 < 2 < \left(\frac{a+1}{10}\right)^2$, откуда слѣдуетъ, что $a^2 < 200 < (a+1)^2$; иными словами, $a$ есть наибольшее цѣлое число, квадратъ котораго не превосходитъ 200. Такое число они уже умѣютъ находить и получаютъ послѣ вычисленія, что $a = 14$, а слѣдовательно искомая діагональ содержится между двумя отрѣзками, равными 1,4 и 1,5 принятой единицы.

Теперь преподаватель вводитъ второе условіе относительно символа $\sqrt{2}$, а именно: если какое-либо число выражаетъ длину отрѣзка, меньшаго, чѣмъ данная діагональ, то оно считается меньше числа $\sqrt{2}$, а если оно выражаетъ длину отрѣзка, большаго, чѣмъ данная діагональ, то оно считается болѣе $\sqrt{2}$. Примѣняя это условіе къ данному случаю, учащіеся сейчасъ же получаютъ неравенство: $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$. Разсуждая подобнымъ же образомъ, они найдутъ, что $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, и т. д.

Послѣ этого преподаватель обращаетъ вниманіе учащихся на то, что принятое ими условіе относительно величины числа $\sqrt{2}$ можетъ быть выражено въ такой формѣ: „число $\sqrt{2}$ считается болѣе всякаго положительнаго числа, квадратъ котораго менѣе 2, и менѣе всякаго положительнаго числа, квадратъ котораго болѣе 2"; и наконецъ можетъ прибавить, что новый символъ $\sqrt{2}$ принято называть ирраціональнымъ числомъ.

Сдѣланныя условія легко обобщить на случай квадратнаго корня изъ любого неполнаго квадрата, а именно, число $\sqrt{A}$, гдѣ $A$ есть неполный квадратъ, опредѣляется, какъ число, большее всякаго положительнаго числа, квадратъ котораго менѣе $A$, и меньшее всякаго положительнаго числа, квадратъ котораго болѣе $A$. Можно даже, при данной единицѣ длины и при всякомъ данномъ значеніи $A$, показать возможность построенія отрѣзка, длина котораго выражается числомъ $\sqrt{A}$ (если только ученикамъ извѣстно доказательство пиѳагоровой теоремы, основанное на способѣ наложенія, а не на измѣреніи сторонъ).

Далѣе, всѣ предыдущія условія могутъ быть обобщены на случай $\sqrt[n]{A}$ (гдѣ $n$ — число цѣлое и положительное, $A$ — неполная $n$-ая степень); такимъ образомъ учащіеся будутъ имѣть законченное представленіе о корнѣ изъ неполной степени, какъ объ ирраціональномъ числѣ *).

Если преподаватель желаетъ дать ученикамъ только это послѣднее понятіе, то онъ можетъ ограничиться вышеуказаннымъ изложеніемъ. Установленное опредѣленіе несоизмѣримаго корня будетъ совершенно правильнымъ съ точки зрѣнія логики, и въ то же время способъ его установленія является достаточно конкретнымъ, чтобы оно оказалось посильнымъ для сознательнаго усвоенія въ V-мъ классѣ. Если же у кого-либо изъ учащихся возникнетъ вопросъ, остаются ли въ данномъ случаѣ справедливыми равенства $(\sqrt{A})^2 = A$, $(\sqrt[3]{A})^3 = A$, ..., $(\sqrt[n]{A})^n = A$, то на этотъ вопросъ можетъ послѣдовать вполнѣ педагогичный отвѣтъ учителя: да, остаются, но доказать это можно только тогда, когда будутъ изучены дѣйствія надъ ирраціональными числами, въ частности — ихъ умноженіе.

*) Интересующіеся болѣе подробнымъ изложеніемъ этого вопроса съ указанной точки зрѣнія могутъ найти его въ моемъ „Курсѣ алгебры для среднихъ учебныхъ заведеній", во 2-й части.

Когда преподавателю понадобится впослѣдствіи дать общее понятіе объ ирраціональномъ числѣ, то онъ сможетъ достигнуть и этого, опираясь на изученный матеріалъ. Ему придется тогда послѣдовательно остановиться на такихъ пунктахъ: во 1-хъ, выяснить ученикамъ, что опредѣленіе каждаго изучаемаго ими ирраціональнаго числа связано съ распредѣленіемъ всѣхъ раціональныхъ чиселъ на двѣ группы, одна изъ которыхъ содержитъ числа, меньшія даннаго, а другая — числа, большія его; во 2-хъ, выяснить, что въ первой группѣ нѣтъ наибольшаго числа, во второй — нѣтъ наименьшаго. Послѣ этого онъ можетъ указать, что перечисленные признаки и являются существенными для понятія объ ирраціональномъ числѣ, и показать примѣры ирраціональныхъ чиселъ, составляемыхъ помимо извлеченія корней (такъ называемыя безконечныя неперіодическія десятичныя дроби).

Понятіе объ ирраціональномъ числѣ, какъ въ болѣе узкомъ, такъ и въ болѣе широкомъ смыслѣ, оказывается установленымъ независимо отъ понятія о предѣлѣ. Само собою разумѣется, при изученіи вопроса о предѣлахъ можно (и должно) показать, что всякое ирраціональное число можетъ быть разсматриваемо, какъ предѣлъ ряда своихъ десятичныхъ или иныхъ приближеній; но показать это можно тогда, когда установлены понятія о дѣйствіяхъ надъ ирраціональными числами, въ частности объ ихъ вычитаніи. Исходить же изъ понятія о предѣлѣ для выясненія понятія объ ирраціональномъ числѣ — излишне, съ точки зрѣнія педагогической, и невозможно — съ логической.

*К. Лебединцевъ.*

---

# Происхожденіе и природа кометъ.

*Эндрью Кроммелина.*

Я не думаю, чтобы наступилъ уже моментъ, когда мы были бы въ состояніи дать полное рѣшеніе вопросовъ о природѣ и происхожденіи кометъ. Нельзя, однако, отрицать, что въ теченіе послѣднихъ пятидесяти лѣтъ въ этомъ направленіи были достигнуты значительные успѣхи; поэтому своевременно будетъ собрать и привести въ порядокъ нѣкоторыя соображенія, ограничивающія, по меньшей мѣрѣ, область, внутри которой должно заключаться рѣшеніе этого вопроса. Это ограниченіе окажетъ намъ помощь при построеніи гипотезъ, такъ какъ оно дастъ намъ возможность исключить тѣ гипотезы, которыя имѣютъ мало шансовъ на успѣхъ.

Около 15 лѣтъ прошло съ тѣхъ поръ, какъ Фабри (M. Fabry) опубликовалъ работу объ истинномъ значеніи параболической формы въ орбитахъ кометъ. Этотъ трудъ не нашелъ, повидимому, широкой извѣстности; это видно изъ того факта, что проф. Пуръ (C. L. Poor) въ книгѣ „The Solar System“ на стр. 281 выводитъ изъ факта преобладанія параболическихъ орбитъ заключеніе, что большинство кометъ приходитъ въ солнечную систему извнѣ. На самомъ же дѣлѣ, какъ показываетъ Фабри, если бы кометы дѣйствительно приходили въ нашу систему извнѣ, то очень многія изъ нихъ имѣли бы ясно выраженныя гиперболическія орбиты. Въ справедливости этого легко убѣдиться, если принять во вниманіе, что скорость въ какой-либо точкѣ параболической орбиты такова же, какую имѣло бы тѣло, падая изъ безконечности (или, практически, съ разстоянія, которое безконечно велико въ сравненіи съ дѣйствительнымъ разстояніемъ тѣла отъ солнца) подъ дѣйствіемъ солнечнаго притяженія; въ случаѣ же гиперболической орбиты скорость тѣла больше вышеуказанной, а въ эллиптической меньше. Поэтому утверждать, что комета, движущаяся по параболической орбитѣ, пришла въ нашу систему извнѣ, значитъ сказать, что она вошла въ сферу вліянія солнца (такъ мы называемъ область, въ которой вліяніе солнца гораздо больше вліянія всѣхъ другихъ звѣздъ; такой области мы можемъ условно приписать нѣкоторый радіусъ, напримѣръ, въ тысячу разъ превышающій радіусъ орбиты Нептуна) съ относительной скоростью, равной нулю, или, другими словами, что комета передъ тѣмъ совершала въ пространствѣ движеніе, тождественное переносному движенію солнечной системы. Вѣроятность этого мала хотя бы даже въ одномъ единственномъ случаѣ, и представляется совершенно невозможнымъ, чтобы значительное число кометъ, имѣющихъ замѣтно выраженную параболическую орбиту, пришло въ нашу систему извнѣ. Относительныя скорости звѣздъ составляютъ, въ смыслѣ порядка величины, нѣсколько километровъ въ секунду; этой величины было вполнѣ достаточно для того, чтобы комета, приходящая къ намъ изъ другой системы, имѣла орбиту съ весьма ясно выраженнымъ гиперболическимъ характеромъ.

Ясно поэтому, что происхожденіе кометъ съ явно параболическими путями мы должны искать въ нашей собственной системѣ; въ еще болѣе сильной степени это относится къ кометамъ съ орбитами эллиптическаго характера. Въ предѣлахъ нашей системы происхожденіе кометъ объясняютъ тремя различными способами: 1) одни принимаютъ, что кометы представляютъ собой продукты изверженій, происходящихъ на солнцѣ; 2) другіе считаютъ ихъ продуктами изверженій въ большихъ планетахъ, находящихся въ состояніи, аналогичномъ тому, въ какомъ находится солнце; 3) наконецъ, предполагаютъ также, что кометы суть блуждающіе обломки туманности, отъ которой произошла, какъ думаютъ, наша система, что они остались несвязанными ни съ одной изъ большихъ массъ, которыя образовались изъ туманности.

Въ пользу солнечнаго происхожденія говорятъ два обстоятельства. Во-первыхъ, мы дѣйствительно наблюдаемъ въ солнечныхъ выступахъ изверженія газовъ со скоростями, достаточными для того, чтобы отнести нѣкоторое количество выброшеннаго вещества далеко отъ солнца. Во-вторыхъ, спектръ кометъ и дѣйствительный анализъ метеоритовъ обнаруживаютъ присутствіе значительныхъ количествъ водорода и его соединеній, что доказываетъ происхожденіе ихъ въ атмосферѣ, подобной солнечной. Очевидная слабая сторона этой теоріи заключается въ томъ обстоятельствѣ, что всѣ вещества, изверженныя солнцемъ, должны были бы перемѣщаться по орбитамъ, пересѣкающимъ его шаръ, такъ что въ томъ случаѣ, если бы скорость изверженія была меньше 383 миль въ секунду (параболическая скорость), они должны были бы при своемъ возвращеніи упасть обратно на солнце. Отклоняющее дѣйствіе планетъ можетъ это предотвратить и породить орбиту, проходящую внѣ поверхности солнца. Примѣры такихъ орбитъ мы имѣемъ въ замѣчательной группѣ кометъ 1680, 1843, 1880, 1882 и 1887 годовъ, и солнечное происхожденіе ихъ не представляется лишеннымъ возможности. Извѣстны, однако, нѣкоторыя другія кометы, разстояніе которыхъ въ перигеліи равно или даже значительно превышаетъ разстояніе земли отъ солнца, и трудно предположить, чтобы разсматриваемыя измѣненія орбитъ были порождены исключительно пертурбаціями. Гипотеза солнечнаго происхожденія сопряжена еще и съ другой трудностью: изверженное вещество оставило бы солнце въ парообразномъ состояніи и сгустилось бы въ жидкость или твердое тѣло не раньше, чѣмъ достигло бы внѣшняго пространства. Оно отвердѣло бы, вѣроятно, въ видѣ чрезвычайно малыхъ частицъ, гораздо меньшихъ, чѣмъ метеоритныя массы, которыя проникаютъ въ нашу атмосферу, и изъ которыхъ иныя, какъ извѣстно, имѣютъ связь съ кометами.

Посмотримъ теперь, можно ли на исполинскія планеты смотрѣть, какъ на вѣроятный источникъ кометъ. Покойный Прокторъ (R. A. Proctor) былъ горячимъ сторонникомъ взгляда, согласно которому исполинскія планеты являются дѣйствительными источниками тѣхъ семействъ кометъ, которыя къ нимъ примыкаютъ. Юпитеръ имѣетъ большую и постоянно растущую семью кометъ, которыя, очевидно, подчинены его власти, такъ какъ въ случаѣ кометъ Лекселля (Lexell) и Брукса (Brooks) было обнаружено, что онъ вызывалъ глубокія измѣненія въ ихъ орбитахъ; Сатурнъ имѣетъ двѣ кометы, изъ которыхъ комета Тёттль (Tuttle) наблюдалась много разъ. Уранъ имѣетъ двѣ кометы, одна изъ которыхъ есть комета ноябрьскихъ метеоритовъ; существуетъ шесть кометъ, орбиты которыхъ находятся въ такой зависимости отъ орбиты Нептуна, которая наводитъ на мысль о существующей между ними связи. Три изъ нихъ наблюдались въ двухъ или нѣсколькихъ обращеніяхъ, а одна есть знаменитая комета Галлея, которая прослѣжена съ достаточной достовѣрностью до 240 г. до Р. Х. и съ нѣкоторой степенью вѣроятности до 467 г. и 625 г. до Р. Х. Чтобы добраться до того времени, когда Нептунъ могъ оказывать значительное вліяніе на комету Галлея, мы должны обратиться къ глубокой древности; въ настоящее же время орбиты ихъ не находятся достаточно близко одна отъ другой, и вліяніе Нептуна сравнительно ничтожно.

Прокторъ доказывалъ, (1) что требуется весьма большое приближеніе кометъ къ исполинскимъ планетамъ для того, чтобы орбиты ихъ измѣнили свою приблизительную параболическую форму на эллиптическую съ періодомъ, равнымъ половинѣ періода планеты, и (2) что число увлеченныхъ кометъ составляетъ лишь малую часть числа всѣхъ кометъ, которыя приближаются къ солнцу. Для образованія подобнаго числа кометъ, связанныхъ съ различными группами, необходимъ огромный періодъ времени. Высказывалось мнѣніе, что это число можетъ быть значительно увеличено благодаря тому обстоятельству, что кометы, орбиты которыхъ превратились въ эллипсы, даже съ длиннымъ періодомъ, раньше или позже подходили бы къ планетѣ на иныя разстоянія и такимъ образомъ подверглись бы дальнѣйшему раздробленію. Но это соображеніе кажется мнѣ не очень вѣскимъ, такъ какъ дѣйствіе Юпитера, повидимому, усиливается одновременно съ тѣмъ, какъ оно уменьшаетъ періодъ кометы, и лишь въ немногихъ случаяхъ послѣдовательныя пертурбаціи совершаются всѣ въ одномъ и томъ же направленіи.

Съ другой стороны, если мы будемъ разсматривать самыя планеты, какъ родительницъ этихъ кометъ, то орбиты ихъ должны были бы непремѣнно проходить черезъ точку изверженія, и трудность, указанная въ пунктѣ (2), исчезла бы. Единственное затрудненіе заключается въ вопросѣ, находятся ли въ настоящее время гигантскія планеты въ такомъ физическомъ состояніи, въ которомъ онѣ могли бы выбрасывать вещество со скоростью нѣсколькихъ миль въ секунду. Я не думаю, чтобы мы могли отнести изверженія къ эпохѣ за нѣсколько милліоновъ лѣтъ до насъ, когда гигантскія планеты могли быть въ приблизительно солнцеобразномъ состояніи: жизнь кометъ съ короткимъ періодомъ измѣряется вѣдь столѣтіями, а не милліонами лѣтъ. Въ послѣднія 130 лѣтъ кометы Лекселля и Брукса значительно измѣнили свои орбиты двѣ другія,—Біелы и Брорсена—исчезли окончательно, тогда какъ комета Энке была чрезвычайно слаба въ 1908 г., что можетъ служить указаніемъ на ея приближающійся распадъ; къ этимъ мы должны, можетъ быть, прибавить многочисленныя кометы, которыхъ никогда не видѣли вторично, хотя для нихъ найдены были короткіе періоды.

Отсюда естественно вывести заключеніе, что исполинскія планеты, если онѣ дѣйствительно являются производителями своихъ кометныхъ семействъ, должны въ настоящее время быть въ состояніи извергать ихъ. Какъ мнѣ кажется, отвергнуть возможность подобнаго изверженія безъ изслѣдованія нельзя. Мы имѣемъ примѣръ возмущеній чрезвычайной силы въ атмосферѣ Юпитера: большое красное пятно свидѣтельствуетъ о мощныхъ катаклизмахъ. Точно такъ же длинные ряды бѣлыхъ пятенъ на Юпитерѣ указываютъ, повидимому, на рядъ изверженій, совершающихся значительно глубже; временами происходятъ также взрывы бѣлыхъ пятенъ на Сатурнѣ. Кромѣ того, нѣтъ основанія предполагать, что изверженіе кометъ есть явленіе обычное: одного изверженія въ столѣтіе было бы достаточно, чтобы уравновѣсить потерю отъ разсѣянія и пертурбацій. Даже на землѣ мы временами имѣемъ вулканическіе взрывы чрезвычайной силы, каковы изверженія Скаптаръ Іокулъ (Skaptar Iokull) въ 1783 г., Кракатау въ 1883 г. и т. д.; на гигантскихъ планетахъ мы вправѣ ожидать пароксизматическихъ взрывовъ въ несравненно бо́льшемъ масштабѣ. Вычислено было что, въ 1883 г. изверженіемъ было выброшено болѣе одной кубической мили твердаго вещества на высоту нѣсколькихъ миль. Это количество сравнимо, вѣроятно, съ полной массой меньшихъ кометъ. На это возражали, что изверженіе матеріи продолжалось бы нѣсколько часовъ и потому вращеніе планеты значительно измѣнило бы направленіе верженія. Я не приписываю особеннаго значенія этому возраженію: въ самомъ дѣлѣ, если бы вся масса малой кометы была сконцентрирована въ компактной формѣ, она занимала бы немного кубическихъ миль, и изверженіе ея фактически могло бы быть мгновеннымъ. Дѣйствительно, гораздо легче согласиться съ этимъ допущеніемъ, чѣмъ съ тѣмъ, къ которому приводитъ гипотеза, что комета пришла изъ областей, лежащихъ внѣ планетной системы, и была лишь увлечена планетой; чтобы это могло имѣть мѣсто, комета должна была бы быть достаточно мала и компактна, чтобы всѣ части ея претерпѣли одинаковыя пертурбаціи: для того, чтобы комета была увлечена, требуется чрезвычайно тѣсное приближеніе, и если бы комета имѣла нѣсколько тысячъ миль въ діаметрѣ, то пертурбаціи въ различныхъ частяхъ чувствительно различались бы между собой.

При разсмотрѣніи гипотезы солнечнаго происхожденія кометъ мы указали, что трудно понять, какимъ образомъ изверженная матерія могла образовать такія большія массы желѣза, какія мы находимъ въ метеоритахъ. Эта трудность не столь велика въ случаѣ планетъ, такъ какъ здѣсь температура, вѣроятно, достаточно низка для того, чтобы желѣзо могло непосредственно вблизи ихъ поверхности перейти въ твердое состояніе.

Изъ всего этого я заключаю, что гипотеза планетнаго происхожденія кометъ съ короткимъ періодомъ заслуживаетъ вниманія и не заслуживаетъ того пренебрежнія, съ которымъ относятся къ ней нѣкоторые астрономы.

Другую гипотезу о происхожденіи кометъ съ короткимъ періодомъ далъ Бредихинъ въ своей статьѣ „Sur l'origine des comètes périodiques“ (Москва, 1889). Онъ предполагаетъ, что эти кометы возникли путемъ отщепленія отъ болѣе крупныхъ кометъ по аналогіи съ кометой Біелы (Biela), съ кометой Ліэ (Liais) въ 1860 г., съ большой кометой 1882 г. и съ кометой Брукса въ 1889 г. Но ни въ одномъ изъ этихъ случаевъ не доказано замѣтнаго измѣненія періода, и, кромѣ того, теорія не даетъ никакого объясненія для соотношеній между орбитами этихъ кометъ и четырехъ большихъ планетъ.

Третья гипотеза происхожденія кометъ разсматриваетъ ихъ, какъ отколовшіеся изолированные обломки туманности, которая считается родительницей солнечной системы. Я полагаю, что фактически одна лишь эта теорія примѣнима къ тѣмъ кометамъ, разстояніе которыхъ въ перигеліи велико и которыя не принадлежатъ къ планетнымъ семействамъ. Принимая во вниманіе, что кометы заключаютъ въ себѣ значительную массу метеоритнаго вещества, соединеннаго съ ними, мы должны допустить, что наша туманность была скорѣе метеоритнаго, чѣмъ чисто газоваго состава.

Метеориты представляютъ собой тѣла, столь сложныя какъ по своему составу, такъ и по строенію, что трудно считать ихъ первоначальной формой вещества; скорѣе они являются остатками прежнихъ міровъ. Это представленіе естественно приводитъ насъ къ планетезимальной гипотезѣ, недавно предложенной профессорами Мультономъ (Moulton) и Чемберленомъ (Chamberlin). Согласно этому взгляду солнце въ прошлыя времена существовало одиноко безъ міровъ-спутниковъ; въ нѣкоторую весьма отдаленную эпоху другое солнце прошло, по этой гипотезѣ, чрезвычайно близко отъ нашего и, хотя не столкнулось съ нимъ, но вызвало въ немъ чрезвычайно сильныя приливныя волненія, благодаря которымъ отъ нашего солнца оторвалась значительная часть массы; $^1/_{700}$ ея вошла въ составъ извѣстныхъ планетъ, гораздо большая часть перешла обратно къ солнцу, а нѣкоторое количество осталось обособленнымъ и образовало наши кометы и рои метеоритовъ. Возмущающее дѣйствіе второго солнца сообщило изверженной массѣ импульсъ и такимъ образомъ воспрепятствовало ея обратному паденію на солнце. Если мы предположимъ, что до катаклизма наше солнце охладилось уже настолько, что могла образоваться твердая кора, которая поглотила бы часть водорода и другихъ газовъ въ атмосферѣ, то мы получимъ, повидимому, объясненіе большихъ твердыхъ метеоритныхъ массъ, которыя часто падаютъ на землю и содержатъ значительное количество газовыхъ включеній. По этой теоріи предполагается, конечно, что температура солнца повысилась вновь благодаря удару, вызванному либо дѣйствительнымъ столкновеніемъ, либо ударомъ возвратившейся части изверженнаго вещества.

Главнымъ препятствіемъ къ принятію планетезимальной гипотезы является, какъ мнѣ кажется, крайняя невѣроятность такого тѣснаго приближенія двухъ солнцъ другъ къ другу. Междузвѣздныя разстоянія столь неизмѣримо велики въ сравненіи съ размѣрами каждаго солнца, что такія встрѣчи должны отличаться исключительной рѣдкостью. Иногда приводятъ частое появленіе новыхъ звѣздъ, какъ доказательство въ пользу такихъ приближеній; но эти взрывы происходятъ почти всѣ безъ исключенія въ области млечнаго пути, гдѣ звѣздная плотность, какъ мы имѣемъ вѣское основаніе предполагать, больше, чѣмъ гдѣ бы то ни было; кромѣ того, быстрое уменьшеніе яркости новыхъ звѣздъ заставляетъ насъ предполагать, что это не звѣзды въ поздней стадіи сгущенія, а свѣтила, находящіяся въ разсѣянномъ и разрѣженномъ состояніи. Принимая во вниманіе всѣ эти трудности, я полагаю, что мы должны разсматривать планетезимальную гипотезу, лишь какъ возможное предположеніе, но не какъ установленное заключеніе.

Переходя теперь къ вопросу о природѣ кометъ, я считаю установленнымъ фактъ, что ядромъ всѣхъ ихъ служитъ болѣе или менѣе густой рой метеоритовъ. Это заключеніе основывается частью на ясно доказанной связи системъ Леонидъ, Персеидъ и Андромедидъ съ кометами 1866 и 1862 г. и Біэлы, частью на невозможности понять, какимъ образомъ могли бы такія кометы, какъ Галлеева, существовать въ теченіе такого ряда появленій, если бы онѣ представляли собой простое скопленіе пара. Согласно общепринятымъ взглядамъ д-ра Джонстона Стоней (Johnston Stoney), даже луна и малыя планеты не въ состоянiи перманентно удерживать при себѣ атмосферы вслѣдствiе быстраго движенiя газовыхъ молекулъ. Такъ какъ мы знаемъ съ несомнѣнностью, что масса Галлеевой кометы гораздо меньше массы луны, то очевидно, что сила ея притяженiя была бы слишкомъ мала, чтобы держать ея массу, какъ одно цѣлое, если бы она состояла исключительно изъ газовъ. Представляется вѣроятнымъ, что метеориты безпрерывно выдѣляютъ небольшiя количества газовъ (по крайней мѣрѣ, въ то время, когда они находятся по сосѣдству съ солнцемъ), такъ какъ иначе мы должны были бы ожидать, что парообразная оболочка разсѣялась бы съ большой скоростью. Тотъ фактъ, что комета Галлея при каждомъ своемъ появленiи, и при томъ, по меньшей мѣрѣ, въ теченiе 2000 лѣтъ, испускала такiе длинные хвосты, дѣлаетъ вѣроятнымъ, что здѣсь метеоритныя массы имѣютъ значительные размѣры, превышающiе, можетъ быть, большiя массы, хранящiяся въ нашихъ музеяхъ, такъ какъ при своемъ прохожденiи черезъ воздухъ метеориты должны были потерпѣть потери. Въ самомъ дѣлѣ, естественно предположить, что небольшiя глыбы, имѣющiя меньше одного фута въ дiаметрѣ, отдаютъ весь свой запасъ газовъ за время одного лишь появленiя. Я долженъ здѣсь подчеркнуть, что продолжительный перiодъ, повидимому, благопрiятенъ для долговѣчности кометъ, такъ какъ указанная потеря газа происходитъ лишь вблизи перигелiя; поэтому преобладанiе приблизительно параболическихъ орбитъ можетъ являться причиной „переживанiя наиболѣе приспособленныхъ индивидуумовъ“, такъ какъ кометы съ болѣе короткими перiодами уже исчерпали свой запасъ газа и потому перестали существовать въ качествѣ видимыхъ кометъ. Исчезновенiе кометы Бiела означаетъ, вѣроятно, лишь потерю газа, содержащагося въ ея метеорахъ; послѣднiе продолжаютъ еще двигаться по той же орбитѣ, какъ доказываютъ нѣсколько роевъ Андромедидъ, которые наблюдались со времени исчезновенiя кометы.

Перехожу теперь къ независимому доказательству метеоритнаго состава ядра кометы. Оно основано на чрезвычайно близкомъ совпаденiи между теорiей и наблюденiемъ въ вопросѣ о времени возвращенiя кометы Галлея къ перигелiю. Вычисленiе было основано на предположенiи, что единственной дѣйствующей силой является притяженiе нѣкотораго вещества. Отклоненiе составляетъ, самое большее, три дня; это доказываетъ, что помимо тяжести другiя силы, дѣйствующiя на ядро кометы, выражаются лишь $^1/_{10\,000}$ долей силы тяжести.

Что же касается хвоста, то здѣсь эти другiя силы, не обусловленныя тяготѣнiемъ, являются преобладающими. Далѣе, газы ядра часто почти не могутъ быть отличены въ спектроскопѣ отъ газовъ въ хвостѣ; поэтому, если бы голова кометы содержала исключительно эти газы, то она двигалась бы такимъ же образомъ, какъ хвостъ. Естественно предположить, что голова содержитъ гораздо болѣе плотное вещество, на которую не оказываютъ замѣтнаго влiянiя силы, формирующiя хвостъ, и что эта матерiя испускаетъ газы, которые образуютъ кóму и хвостъ. Въ виду того, что къ 18 (5) мая комета Галлея должна пройти по диску солнца, интересно будетъ установить, нельзя ли открыть какого-либо слѣда кометы на солнцѣ. Если это удастся, то мы будемъ въ состоянiи составить себѣ понятiе о плотности ядра. Земля пройдетъ черезъ хвостъ, вѣроятно, въ то же самое время, какъ это имѣло мѣсто съ большой кометой 1861 г.; любопытно, что даже прохожденiе черезъ хвостъ не облегчитъ намъ рѣшенiя вопроса о его составѣ, потому что онъ, по всей вѣроятности, слишкомъ разрѣженъ для того, чтобы оказать сколько-нибудь замѣтное дѣйствiе на нашу атмосферу. Въ 1861 г. наблюдалось какъ будто нѣчто вродѣ зарева, какое бываетъ во время разсвѣта; того же самого слѣдуетъ ожидать и въ нынѣшнемъ маѣ.

*(Окончанiе слѣдуетъ).*

# Лекцiи по ариѳметикѣ для учителей,

читанныя въ $190^7/_8$ академическомъ году профессоромъ Ф. Клейномъ въ Гёттингенѣ.

*(Продолженiе*).*

Теперь обратимся къ восьмому изъ перечисленныхъ выше пунктовъ, именно: къ задачѣ о дѣленiи окружности на равныя части. Я буду при этомъ принимать, что дѣйствiя надъ комплексными числами вида $x+yi$ и изображенiе ихъ на такъ называемой „комплексной плоскости" всѣмъ вамъ уже извѣстны. Итакъ, задача заключается въ томъ, чтобы раздѣлить окружность на $n$ равныхъ частей или построить правильный $n$-угольникъ. Мы отождествимъ эту окружность съ окружностью, описанной радiусомъ, равнымъ единицѣ, изъ нулевой точки комплексной плоскости, и примемъ точку $x+yi=1$ за первую изъ $n$ точекъ дѣленiя; тогда комплексныя числа, соотвѣтствующiя остальнымъ вершинамъ, имѣютъ видъ (фиг. 17):

$$z=x+yi=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=e^{\frac{2k\pi}{n}i}\quad(k=0,1\ldots,n-1).$$

Они удовлетворяютъ поэтому уравненiю:

$$z^n=1,$$

и задача о дѣленiи окружности на равныя части сводится къ рѣшенiю этого простѣйшаго алгебраическаго уравненiя. Такъ какъ это уравненiе постоянно имѣетъ ра-

*) См. „Вѣстникъ", № 503—504.

Вслѣдствiе накопленiя срочнаго матерiала мы вынуждены были прервать печатанiе лекцiй проф. Клейна. Заканчивая теперь ихъ печатанiе, мы обращаемъ вниманiе на то, что каждая лекцiя представляетъ собой самостоятельное цѣлое, и что чтенiе ея возможно безъ знакомства съ предыдущими лекцiями.

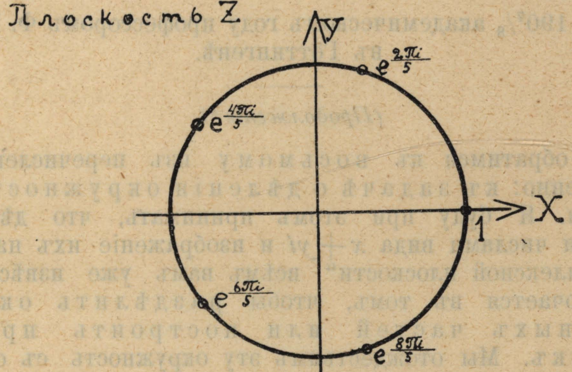
*Ред.*

ціональный корень $z = 1$, то двучленъ $z^n - 1$ дѣлится на $z - 1$, и потому мы для остальныхъ корней получаемъ уравненіе:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0.$$

Это есть уравненіе $(n - 1)$-ой степени, въ которомъ всѣ коэффиціенты равняются 1.

Уже въ глубокой древности вызывалъ большой интересъ вопросъ о томъ, какіе правильные многоугольники можно построить циркулемъ и линейкой. Въ древности же было уже извѣстно, что при $n = 2^h$, 3, 5 (гдѣ $h$ есть произвольное цѣлое число), а также для составныхъ значеній: $n = 2^h . 3$, $n = 2^h . 5$, $n = 2^h . 3 . 5$, эта задача рѣшается; на этомъ пунктѣ вопросъ остановился вплоть




Фиг. 17.

до конца восемнадцатаго столѣтія, когда имъ занялся молодой Гауссъ. Онъ нашелъ, что для всѣхъ простыхъ значеній $n$, имѣющихъ видъ:

$$n = 2^{(2^\mu)} + 1$$

возможно дѣленіе окружности на равныя части циркулемъ и линейкой, при другихъ же значеніяхъ оно невозможно. И дѣйствительно, первыя значенія $\mu = 0$, 1, 2, 3 даютъ въ этой формулѣ простыя числа: 3, 5, 17, 257. Изъ нихъ первые два случая были уже хорошо извѣстны раньше, а остальные являются новыми. Особенно знаменитъ правильный семнадцатиугольникъ, построяемость котораго посредствомъ циркуля и линейки была въ этомъ сочиненіи въ первый разъ обнаружена. Впрочемъ, общій вопросъ о томъ, при какихъ значеніяхъ показателя $\mu$ предыдущая формула даетъ простыя числа, остается и по сей день нерѣшеннымъ. Я и здѣсь не буду останавливаться на деталяхъ, а предпочту изложить въ общихъ чертахъ ходъ и значеніе этого открытія; подробности же относительно правильнаго семнадцатиугольника вы найдете въ книгѣ Вебера-Вельштейна.

По этому поводу я считаю необходимымъ особенно обратить ваше вниманіе на „Дневникъ" Гаусса, опубликованный въ 57 томѣ журнала „Mathematische Annalen". Это небольшая, невзрачная тетрадка, которую Гауссъ началъ вести съ 1796 года, незадолго передъ тѣмъ, какъ ему исполнилось 19 лѣтъ. Какъ разъ первая запись относится къ вопросу о возможности построенія правильнаго семнадцатиугольника. Сдѣлавъ такъ рано это важное открытіе, Гауссъ принялъ окончательное рѣшеніе посвятить себя математикѣ. Всякому математику будетъ очень интересно просмотрѣть этотъ дневникъ, такъ какъ здѣсь можно прослѣдить и за дальнѣйшими выдающимися работами Гаусса, относящимися къ теоріи чиселъ, къ теоріи эллиптическихъ функцій и т. д.

Въ первый разъ это первое крупное открытіе Гаусса было опубликовано въ видѣ краткаго сообщенія въ „Jenaer Literaturzeitung" отъ перваго іюня 1796 года. Это было сдѣлано по почину учителя и покровителя Гаусса, Циммермана изъ Брауншвейга, который помѣстилъ также и отъ себя короткую замѣтку объ этой статьѣ*). Доказательство Гауссъ далъ въ своемъ основномъ сочиненіи по теоріи чиселъ „Disquisitiones arithmeticae", опубликованномъ въ 1801 году.

Здѣсь мы находимъ также и вторую, отрицательную часть предложенія, которой въ упомянутой замѣткѣ не было, именно, что для другихъ простыхъ чиселъ, которыя не могутъ быть приведены къ виду $2^{(2^\mu)}+1$, дѣленіе окружности на равныя части не можетъ быть произведено циркулемъ и линейкой. Я хочу разсмотрѣть здѣсь одинъ частный случай этого важнаго доказательства невозможности, тѣмъ болѣе, что въ большой математической публикѣ имѣютъ очень мало представленія о доказательствахъ невозможности вообще. Современной математикѣ удалось при помощи такого рода доказательствъ невозможности исчерпать цѣлый рядъ знаменитыхъ проблемъ, надъ которыми съ древнихъ временъ тщетно трудились многіе выдающіеся математики. Достаточно указать на задачи: о построеніи правильнаго семиугольника, о трисекціи угла и квадратурѣ круга. При всемъ томъ имѣется много людей, которые и по сей день занимаются этими задачами, не только не имѣя никакого представленія о высшей математикѣ, но и не зная даже постановки вопроса о доказательствѣ невозможности; сообразно своимъ познаніямъ, ограничивающимся обыкновенно элементарной геометріей, они обыкновенно пытаются преодолѣть затрудненія вспомогательными прямыми и окружностями и, въ концѣ концовъ, нагромождаютъ ихъ въ такомъ количествѣ, что никто не въ состояніи разобраться въ получающейся путаницѣ и непосредственно показать автору его ошибку. Вы напрасно будете ссылаться на существующее доказа-

*) Эта замѣтка также перепечатана въ 57 томѣ „Mathematische Annalen".

тельство невозможности, такъ какъ на этихъ людей въ лучшемъ случаѣ можно повліять только прямымъ указаніемъ допущенной ими ошибки. Каждый сколько-нибудь извѣстный математикъ каждый годъ получаетъ цѣлую уйму такого рода посланій; и вы будете получать такія доказательства въ большомъ количествѣ, когда будете стоять у дѣла. Очень хорошо, чтобы вы впередъ были готовы къ этимъ переживаніямъ и знали, какъ себя въ этомъ отношеніи держать. Я полагаю поэтому, что вамъ будетъ полезно ознакомиться съ однимъ изъ такихъ доказательствъ невозможности въ простѣйшей формѣ.

Вотъ я и хочу изложить вамъ теперь подробное доказательство того, что правильный семиугольникъ не можетъ быть построенъ циркулемъ и линейкой. Извѣстно, что каждое построеніе, производимое циркулемъ и линейкой, при переходѣ къ вычисленію эквивалентно цѣлому ряду послѣдовательныхъ извлеченій квадратнаго корня и что, обратно, каждое такое квадраторадикальное выраженіе можетъ быть осуществимо геометрически пересѣченіемъ прямыхъ и окружностей. Это вы и сами себѣ легко уясните. Поэтому наше утвержденіе мы можемъ аналитически формулировать такъ, что уравненіе шестой степени:

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0,$$

характерное для правильнаго семиугольника, не можетъ быть разрѣшено при помощи конечнаго числа квадратныхъ корней. Но это такъ называемое возвратное уравненіе, которое одновременно съ каждымъ корнемъ $z$ имѣетъ еще корень $\frac{1}{z}$. Это и будетъ тотчасъ видно, если мы напишемъ уравненіе въ такомъ видѣ:

$$z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}=0. \qquad (1)$$

Степень такого уравненія можетъ быть сразу понижена вдвое, если положить $z+z^{-1}=x$ и принять $x$ за новое неизвѣстное. Простое вычисленіе даетъ для $x$ кубическое уравненіе

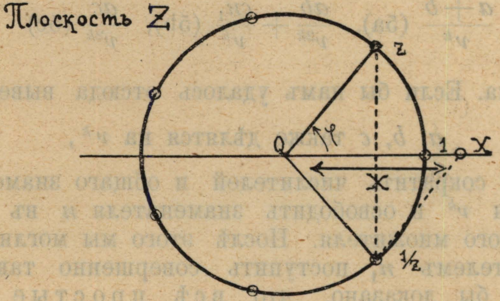
$$x^3+x^2-2x-1=0, \qquad (2)$$

и мы видимъ непосредственно, что уравненія (1) и (2) одновременно разрѣшаются въ квадратныхъ радикалахъ или не разрѣшаются. Впрочемъ, величину $x$ можно привести въ непосредственную геометрическую связь съ построеніемъ правильнаго семиугольника. Изъ фигуры 18-ой, изображающей окружность радіуса, равнаго единицѣ, въ комплексной плоскости, легко усмотрѣть слѣдующее: если мы обозначимъ черезъ $\varphi=\frac{2\pi}{7}$ центральный уголъ правильнаго семиугольника и примемъ во вниманіе, что $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$ и $z^{-1}=\cos\varphi-i\sin\varphi$ суть двѣ вершины, смежныя съ вершиной $z=1$, то окажется, что $x=2\cos\varphi$; поэтому по данному значенію $x$ легко построить семиугольникъ.

Намъ остается обнаружить, что кубическое уравненіе (2) не разрѣшается въ квадратныхъ радикалахъ. Это доказательство распадается на ариѳметическую и алгебраическую части; мы начнемъ съ первой части, которая естественно примыкаетъ къ тѣмъ вопросамъ теоріи чиселъ, которыми мы здѣсь занимаемся. Мы обнаружимъ прежде всего, что кубическое уравненіе (2) неприводимо, т. е. что его лѣвая часть не можетъ быть разбита на двухъ множителей съ раціональными коэффиціентами. Замѣтимъ прежде всего, что полиномъ третьей степени, если онъ разлагается на множителей, необходимо имѣетъ линейнаго множителя, и потому разложеніе должно имѣть видъ:

$$x^3+x^2-2x-1=(x^2+\beta x+\gamma)(x+\alpha);$$

намъ нужно поэтому доказать, что такое разложеніе не можетъ имѣть мѣста.




Фиг. 18.

Первый существенный шагъ въ этомъ доказательствѣ заключается въ томъ, чтобы обнаружить, что при наличности такого раціональнаго разложенія коэффиціенты $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ необходимо должны быть цѣлыми числами. Это есть частный случай слѣдующаго общаго предложенія, доказаннаго Гауссомъ въ „Disquisitiones arithmeticae“: если полиномъ вида $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ съ цѣлыми коэффиціентами $a$ распадается на произведеніе двухъ полиномовъ вида $\varphi(x)=x^\nu+b_1x^{\nu-1}+\cdots+b_\nu$ съ раціональными коэффиціентами $b$, то послѣдніе необходимо представляютъ собой цѣлыя числа. Мы проведемъ, однако, здѣсь доказательство только въ примѣненіи къ тому частному случаю, который насъ здѣсь занимаетъ, тѣмъ болѣе, что всегда бываетъ полезно детально продумать такого рода общее предложеніе на опредѣленномъ примѣрѣ.

Мы начнемъ съ того, что приведемъ три дроби $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ къ общему знаменателю $n$ и сообразно этому напишемъ разложеніе въ самомъ общемъ случаѣ въ видѣ:

$$x^3+x^2-2x-1=\left(x^2+\frac{b}{n}x+\frac{c}{n}\right)\left(x+\frac{a}{n}\right), \qquad (3)$$

гдѣ $a$, $b$, $c$, $n$ суть цѣлыя числа Нужно показать, что $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{n}$ суть числа цѣлыя, т. е. что числа $a$, $b$, $c$ всѣ кратны $n$. Но, если мы раскроемъ скобки и сравнимъ полученное выраженіе съ лѣвой частью, то мы прежде всего увидимъ, что три выраженія

$$\frac{a+b}{n}\ (4a),\quad \frac{ab}{n^2}+\frac{c}{n}\ (4b),\quad \frac{ac}{n}\ (4c)$$

необходимо должны быть цѣлыми числами. Здѣсь прежде всего естественно приходитъ въ голову мысль вмѣсто $n$ разсмотрѣть какого-либо его простого множителя $\nu$; положимъ, что $\nu$ входитъ въ составъ $n$ съ показателемъ $k$, такъ что $n=n_1\nu^k$, гдѣ $n_1$ есть цѣлое число, которое уже на $\nu$ не дѣлится. Умноживъ выраженія (4) на $n_1$ или соотвѣтственно на $n_1{}^2$, мы приходимъ къ заключенію, что

$$\frac{a+b}{\nu^k}\ (5a),\quad \frac{ab}{\nu^{2k}}+\frac{cn_1}{\nu^k}\ (5b),\quad \frac{ac}{\nu^{2k}}\ (5c)$$

суть цѣлыя числа. Если бы намъ удалось отсюда вывести, что числа

$$a,\ b,\ c \text{ также дѣлятся на } \nu^k, \tag{6}$$

то мы могли бы сократить числителей и общаго знаменателя на общаго множителя $\nu^k$ и освободить знаменателя $n$ въ разложеніи (3) отъ этого простого множителя. Послѣ этого мы могли бы съ остающимся знаменателемъ $n_1$ поступить совершенно такъ же; такимъ образомъ было бы доказано, что всѣ простые множители числа $n$ входятъ также въ составъ числителей $a$, $b$, $c$, и наше предложеніе будетъ такимъ образомъ доказано.

Чтобы доказать предложеніе (6), допустимъ, что $a$ дѣлится только на низшую степень простого числа $\nu$, скажемъ на $\nu^{k_1}$, гдѣ $0 \leqslant k_1 < k$. Выраженіе (5c) обнаруживаетъ тогда, что $c$ во всякомъ случаѣ дѣлится на $\nu^k$ и даже на болѣе высокую степень того же простого множителя; иначе $2k$ было бы меньше, чѣмъ $k+k_1$, и произведеніе $ac$ не могло бы раздѣлиться на $\nu^{2k}$. Поэтому въ выраженіи (5b) второе слагаемое есть цѣлое число, а потому и первое слагаемое $\frac{ab}{\nu^{2k}}$ должно быть цѣлымъ числомъ. Разсужденіе, которымъ мы только-что пользовались, теперь обнаружитъ, что $b$ дѣлится на $\nu^k$. Но въ такомъ случаѣ выраженіе (5a) обнаружитъ, что и $a$ должно дѣлиться на $\nu^k$, а это находится въ противорѣчіи со сдѣланнымъ выше допущеніемъ.

Итакъ, сдѣланное допущеніе неправильно, т. е. $a$ необходимо должно дѣлиться на $\nu^k$. Но тогда выраженіе (5a) опять-таки обнаруживаетъ, что $b$ дѣлится на $\nu^k$. Теперь въ выраженіи (5b) $ab$ дѣлится на $\nu^{2k}$, а потому второе слагаемое также должно быть цѣлымъ числомъ; поэтому $cn_1$ дѣлится на $\nu^k$, а такъ какъ число $n_1$, по предположенію, простого множителя $\nu$ не содержитъ, то $c$ дѣлится на $\nu^k$. Такимъ образомъ, предложеніе (6) доказано, а вмѣстѣ съ тѣмъ доказана и теорема Гаусса для нашего частнаго случая.

Итакъ, намъ остается только обнаружить невозможность разложенія

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x^2 + \beta x + \gamma)(x + \alpha), \tag{7}$$

если $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ суть цѣлыя числа. Для этого достаточно приравнять соотвѣтствующіе коэффиціенты обѣихъ частей равенства. Прежде всего ясно, что $\alpha\gamma = -1$. Такое разложеніе единицы въ произведеніе двухъ цѣлыхъ чиселъ возможно только въ томъ случаѣ, если $\alpha = \pm 1$ и $\gamma = \mp 1$. Но въ такомъ случаѣ правая часть равенства (7) обращалась бы въ нуль при $x = -\alpha = \mp 1$; между тѣмъ лѣвая часть, очевидно, не обращается въ нуль ни при $x = -1$, ни при $x = +1$. Такимъ образомъ, мы снова пришли къ противорѣчію, которое теперь окончательно обнаруживаетъ невозможность цѣлочисленнаго разложенія равенства (7). Слѣдовательно, невозможно и разложеніе на множителей съ раціональными коэффиціентами, а стало быть, *доказана неприводимость кубическаго уравненія* (2).

Вторая часть доказательства должна теперь заключаться въ томъ, чтобы обнаружить, *что неприводимое кубическое уравненіе съ раціональными коэффиціентами не можетъ быть разрѣшено при помощи квадратныхъ радикаловъ*. Эта часть доказательства имѣетъ существенно *алгебраическій* характеръ; однако, для цѣльности изложенія мы приведемъ его здѣсь. Мы дадимъ нашему предложенію нѣсколько иное и именно положительное выраженіе: *Если уравненіе 3-ей степени съ раціональными коэффиціентами*

$$f(x) \equiv x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0, \tag{8}$$

*рѣшается въ квадратныхъ радикалахъ, то оно необходимо имѣетъ раціональный корень, а потому будетъ приводимымъ*; въ самомъ дѣлѣ, существованіе раціональнаго корня $\alpha$ равносильно тому, что функція $f(x)$ имѣетъ раціональнаго множителя $x - \alpha$.

Этому доказательству необходимо предпослать *классификацію всѣхъ выраженій, составленныхъ изъ квадратныхъ радикаловъ*, — вѣрнѣе сказать: *всѣхъ выраженій, составленныхъ изъ конечнаго числа квадратныхъ корней и раціональныхъ чиселъ при помощи раціональныхъ операцій*; напримѣръ:

$$\alpha = \frac{\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c}}}{\sqrt{d + \sqrt{e} + \sqrt{f}}},$$

гдѣ $a$, $b, \ldots, f$ суть раціональныя числа. Мы здѣсь, естественно, имѣемъ въ виду только такіе радикалы, въ которыхъ нельзя произвести точнаго извлеченія корня. Эта классификація составляетъ важнѣйшій пунктъ всего разсужденія.

Каждое выраженіе такого рода представляетъ собой раціональную функцію нѣкотораго числа квадратныхъ радикаловъ, въ нашемъ примѣрѣ трехъ. Мы обратимся прежде всего къ одному изъ такихъ радикаловъ, который можетъ имѣть, впрочемъ, сколько угодно сложное строеніе. Подъ порядкомъ такого радикала мы будемъ разумѣть число входящихъ въ его составъ и стоящихъ одинъ внутри другого радикаловъ. Такимъ образомъ, въ предыдущемъ выраженіи знаменателемъ служитъ радикалъ 3-го порядка, въ числителѣ же первый радикалъ имѣетъ порядокъ 2, второй — порядокъ 1.

Въ произвольномъ же квадрато-радикальномъ выраженіи (т. е. въ выраженіи, составленномъ изъ квадратныхъ радикаловъ) мы устанавливаемъ числа, выражающія порядокъ отдѣльныхъ „простыхъ квадрато-радикальныхъ выраженій“, изъ которыхъ уже составляется раціонально все наше выраженіе и которыя не сводятся къ радикаламъ низшаго порядка; наибольшее изъ этихъ чиселъ $\mu$ принимается за порядокъ всего выраженія. Въ нашемъ примѣрѣ $\mu = 3$. Однако, въ составъ нашего выраженія можетъ входить нѣсколько „простыхъ квадрато-радикальныхъ выраженій“ порядка $\mu$; число ихъ $n$, такъ называемое „число членовъ“ радикальнаго выраженія, мы примемъ за второе характерное число нашего выраженія. При этомъ предполагается, что ни одно изъ этихъ $n$ простыхъ выраженій $\mu$-го порядка не выражается черезъ остальные съ помощью выраженій низшаго порядка*). Такъ, напримѣръ, въ выраженіи перваго порядка

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

число радикальныхъ членовъ есть 2, а не 3, потому что $\sqrt{6} = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{3}$. Въ приведенномъ выше выраженіи $a$ 3-го порядка число членовъ равно 1.

Такимъ образомъ, каждому квадрато-радикальному выраженію мы отнесли 2 конечныхъ числа $\mu$ и $n$, которые мы въ видѣ символа $(\mu, n)$ будемъ называть характеристикой или рангомъ выраженія. Изъ двухъ квадрато-радикальныхъ выраженій различнаго порядка мы припишемъ низшій рангъ тому, которое имѣетъ низшій порядокъ; изъ двухъ же выраженій одинаковаго порядка мы припишемъ низшій рангъ тому, которое имѣетъ меньше членовъ. Такимъ образомъ, выраженіями самого низшаго ранга являются тѣ, которымъ соотвѣтствуетъ порядокъ 0, — т. е. раціональныя числа.

Предположимъ теперь, что корень $x_1$ кубическаго уравненія (8) можетъ быть выраженъ черезъ квадратные радикалы и именно можетъ быть представленъ выраженіемъ ранга $(\mu, n)$. Выдѣляя одинъ изъ $n$ членовъ $\mu$-го порядка $\sqrt{R}$, мы можемъ написать этотъ корень въ видѣ:

$$x_1 = \frac{\alpha + \beta \sqrt{R}}{\gamma + \delta \sqrt{R}},$$

*) Т. е. не выражается черезъ остальные радикалы $\mu$-го порядка съ коэффиціентами низшаго порядка.

гдѣ каждое изъ выраженій $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ содержитъ уже не болѣе $n-1$ членовъ $\mu$-го порядка, а $R$ есть выраженіе $(\mu-1)$-го порядка. Съ другой стороны, выраженіе $\gamma-\delta\sqrt{R}$ во всякомъ случаѣ отлично отъ 0: иначе радикалъ $\sqrt{R}$ былъ бы равенъ $\gamma/\delta$, т. е. выражался бы раціонально черезъ остальные $(n-1)$ членовъ $\mu$-го порядка, фигурирующіе въ выраженіи $x_1$, а потому былъ бы лишнимъ радикаломъ: отъ него можно было бы освободиться. Мы можемъ поэтому помножить числителя и знаменателя дроби $x_1$ на $\gamma-\delta\sqrt{R}$ и тогда получимъ:

$$x_1=\frac{(\alpha+\beta\sqrt{R})(\gamma-\delta\sqrt{R})}{\gamma^2-\delta^2 R}=P+Q\sqrt{R},$$

гдѣ $P$ и $Q$ суть раціональныя функціи отъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ и $R$, а поэтому содержатъ не болѣе $n-1$ членовъ $\mu$-го порядка или же содержатъ только члены болѣе низкаго порядка; эти выраженія имѣютъ поэтому рангъ не выше $(\mu, n-1)$. Если вставимъ это выраженіе въ уравненіе (8), то мы получимъ:

$$f(x_1)\equiv(P+Q\sqrt{R})^3+A(P+Q\sqrt{R})^2+B(P+Q\sqrt{R})+C=0.$$

Выполнивъ всѣ возвышенія въ степень, мы приведемъ это соотношеніе къ виду:

$$f(x_1)=M+N\sqrt{R}=0,$$

гдѣ $M$, $N$ суть полиномы, зависящіе отъ $P$, $Q$, $R$, т. е. раціональныя функціи отъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $R$. Если бы $N$ было отлично отъ нуля, то мы получили бы $\sqrt{R}=-\frac{M}{N}$, т. е. этотъ радикалъ выражался бы раціонально черезъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ и $R$, т. е. maximum черезъ $(n-1)$ членовъ $\mu$-го порядка и черезъ члены $(\mu-1)$-аго порядка; но это, какъ мы уже указали выше, мѣста имѣть не можетъ. Отсюда слѣдуетъ, что необходимо $N=0$, а потому и $M=0$. Отсюда мы заключаемъ далѣе, что и

$$x_2=P-Q\sqrt{R}$$

есть корень нашего кубическаго уравненія; въ самомъ дѣлѣ, совершенно ясно, что

$$f(x_2)=M-N\sqrt{R}=0.$$

Но теперь доказательство быстро и очень любопытно заканчивается. Если $x_3$ есть третій корень уравненія, то, какъ, извѣстно

$$x_1+x_2+x_3=-A,$$

$$x_3=-A-(x_1+x_2)=-A-2P.$$

Это выраженіе имѣетъ тотъ же рангъ, что и $P$, т. е. низшій, чѣмъ $x_1$. Если $x_3$ есть уже раціональное число, то наша теорема доказана. Въ противномъ случаѣ мы можемъ сдѣлать этотъ корень точкой отправленія того же ряда разсужденій; тогда окажется, что болѣе высокій рангъ двухъ первыхъ корней могъ представлять собой только иллюзію, такъ какъ одинъ изъ нихъ во всякомъ случаѣ долженъ имѣть еще низшій рангъ, нежели $x_3$. Продолжая это разсужденіе, мы все переходимъ отъ одного корня къ другому и всякій разъ убѣждаемся, что корень долженъ быть ступенью ниже. Вслѣдствіе этого мы, въ концѣ концовъ, необходимо должны придти къ корню порядка $\mu=0$, т. е. мы приходимъ къ заключенію, что наше уравненіе 3-ей степени дѣйствительно имѣетъ раціональный корень. Тогда мы уже не имѣемъ возможности вести то же разсужденіе дальше; два другихъ корня въ этомъ случаѣ либо также должны быть раціональными, либо должны имѣть видъ $P \pm Q\sqrt{R}$, гдѣ $P$, $Q$ и $R$ суть раціональныя числа. Но этимъ доказано, что функція $f(x)$ распадается на множителей, изъ которыхъ одинъ—первой, а другой—второй степени; это функція приводимая. Итакъ, никакое неприводимое уравненіе 3-ей степени, въ частности наше уравненіе правильнаго семиугольника, не рѣшается въ квадратныхъ радикалахъ. Этимъ доказано вмѣстѣ съ тѣмъ, что правильный семиугольникъ не можетъ быть построенъ циркулемъ и линейкой.

Вы видите, какъ просто и наглядно проводится это доказательство и какъ мало познаній оно, собственно, предполагаетъ. Нѣкоторыя части доказательства, особенно разсужденія относительно классификаціи радикальныхъ выраженій, требуютъ довольно серьезной математической абстракціи. Я не берусь поэтому судить, можно ли это доказательство считать доказательствомъ достаточно простымъ, чтобы убѣдить профановъ, о которыхъ шла рѣчь выше, въ тщетности ихъ попытокъ найти элементарное рѣшеніе задачи. Все же, мнѣ кажется, слѣдуетъ всякій разъ дѣлать попытку медленно и подробно выяснить имъ доказательство.

Въ заключеніе я хочу еще привести нѣкоторую литературу, относящуюся частью къ вопросу о правильныхъ многоугольникахъ, частью же къ вопросу о выполнимости геометрическихъ построеній вообще. Въ первую очередь приходится указать опять на „Энциклопедію Элементарной Математики" Вебера и Вельштейна, т. I. (гл. XVIII и XX), а затѣмъ на небольшой сборникъ „Лекціи по избраннымъ вопросамъ элементарной геометріи" *), который я выпустилъ въ 1895 г. по поводу съѣзда старшихъ преподавателей въ Гёттингенѣ. Книжка эта, однако, уже вышла изъ продажи. Вмѣсто нея могу указать недавно выпущенный въ Болоньѣ Энрикесомъ сборникъ подъ общимъ заглавіемъ „Вопросы элементарной геометріи" **), который оріентируетъ васъ въ этихъ вопросахъ.

*) F. Klein. „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie" ausgearbeitet von F. Tägert. Leipzig. 1895. Имѣется русскій переводъ подъ указаннымъ въ текстѣ заглавіемъ, изданный Казанскимъ физико-математическимъ обществомъ въ 1898 г

**) F. Enriques. „Questioni riguardanti la geometria elementare". Bologna. 1907. Нѣмецкій переводъ выпущенъ Тейбнеромъ подъ заглавіемъ „Fragen der Elementargeometrie".

Этимъ я заканчиваю обзоръ вопросовъ, относящихся къ теорiи чиселъ, оставляя послѣднiй изъ нихъ, — доказательство трансцендентности чиселъ къ концу лекцiй.

Мнѣ остается разсмотрѣть послѣднюю ступень въ дѣлѣ расширенiя понятiя о числѣ.

*(Продолженiе слѣдуетъ).*

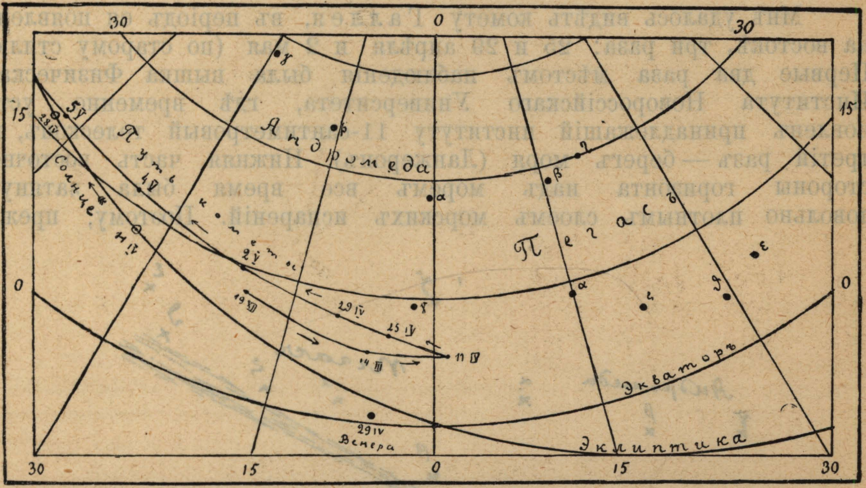
## Наблюденiя кометы Галлея.

Мнѣ удалось видѣть комету Галлея, въ перiодъ ея появленiя на востокѣ, три раза: 25 и 29 апрѣля и 2 мая (по старому стилю). Первые два раза мѣстомъ наблюденiя была вышка Физическаго Института Новороссiйскаго Университета, гдѣ временно установленъ принадлежащiй институту 11-сантиметровый телескопъ, въ третiй разъ — берегъ моря (Ланжеронъ). Нижняя часть восточной стороны горизонта надъ моремъ все время была затянута довольно плотнымъ слоемъ морскихъ испаренiй. Поэтому, прежде


всего можно было замѣтить хвостъ кометы, пока ядро ея, скрытое за дымкой тумана, еще не было видно даже въ бинокль. Затѣмъ, руководясь линiей хвоста, я направлялъ соотвѣтствующимъ образомъ видоискатель трубы и находилъ ядро кометы. Въ первый разъ я нашелъ такимъ образомъ ядро въ 2 часа 40 мин. утра, во второй разъ — около 3 час., въ третiй разъ, когда пользовался только биноклемъ, съ трудомъ лишь послѣ 3 ч. Такая разница во времени обусловливается кажущимся приближенiемъ кометы къ солнцу. Наибольшей яркостью ядро отличалось 25 апрѣля.

Хвостъ бѣлесоватаго цвѣта, слабой яркости, съ нерѣдкими границами, направленъ въ сторону, противоположную солнцу и представляется прямымъ. 25 апрѣля онъ казался болѣе тонкимъ и лишь слабо расширяющимся къ концу, 29-го — менѣе яркимъ и болѣе размытымъ даже въ части, близкой къ ядру. 2-го мая удалось видѣть лишь середину и конецъ хвоста, такъ какъ начало утопало въ парахъ, а затѣмъ въ лучахъ солнца. Точно опредѣлить длину хвоста невозможно. Конечныя части его обладаютъ столь малой яркостью, что ихъ, въ особенности съ наступленіемъ разсвѣта, легче видѣть „боковымъ зрѣніемъ“, т. е. смотря немного въ сторону или ниже.

Наблюдая 23 апрѣля вмѣстѣ съ К. И. Ивановымъ, мы сочли, что хвостъ кончается около звѣздъ $\vartheta$ и $\varepsilon$ Пегаса. На рисункѣ при-




близительно представлено положеніе кометы относительно созвѣздій Пегаса и Андромеды и планеты Венеры (еще не вышедшей изъ-за облаковъ) въ 3 ч. утра 29 апрѣля. Длину хвоста въ этотъ день, какъ видно изъ прилагаемой карты, изображающей соотвѣтствующую часть неба и путь кометы согласно съ вычисленіями Кроммелина, можно оцѣнить въ 45°. (Разность прямыхъ восхожденій въ данномъ случаѣ почти въ точности равна угловому разстоянію). 2-го мая хвостъ кончался тамъ же, ядро же нѣсколько передвинулось; въ этотъ день хвостъ равнялся, слѣдовательно, 55°. Ширина его конечной части составляла приблизительно 5°.

Ядро кометы въ телескопъ представляется не круглымъ, но вытянутымъ въ направленіи, поперечномъ хвосту. Границы ядра не опредѣленны, и все оно окружено сіяніемъ наиболѣе яркая часть котораго находится со стороны солнца. Съ наступленіемъ разсвѣта видна уже только часть сіянія, обращенная къ солнцу.

Одесса, 3 мая 1919 г. *Д. Хмыровъ.*

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

**А. П. ОХИТОВИЧЪ. Геометрія круга (Циклометрія).**

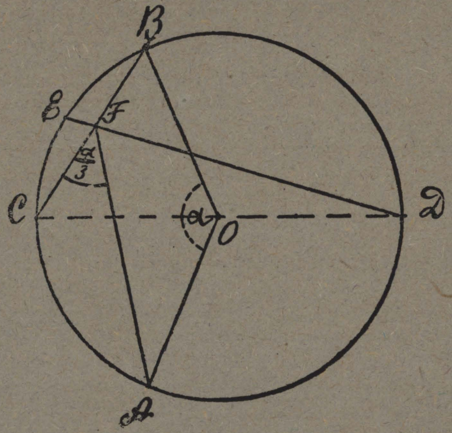
Рѣшеніе проблемы о геометрическомъ раздѣленіи дуги и угла на части пропорціональныя и равныя. Казань, 1908 г. Стр. XI+114+6=131. Цѣна 1 руб.

**А. П. ОХИТОВИЧЪ. Новый (неопредѣленный) методъ рѣшенія алгебраическихъ уравненій.** Ч. I-я.

Общее рѣшеніе уравненій первой степени: неопредѣленныхъ и опредѣленныхъ. Казань, 1900 г. 333 стр. Цѣна 2 р. 50 к.

*Обращаться въ книжные магазины:*

„Новаго Времени“ (СПБ., Москва, Харьковъ, Саратовъ, Одесса), Н. Н. Карбасникова (СПБ., Москва, Варшава, Вильна), А. А. Дубровина (Казань), „Общественная Польза“ (СПБ.), Оглоблина (Кіевъ), Т-ва Сытина (Москва), „Трудъ“ (Москва). „Сотрудникъ Школъ“ (Москва), Бельке (Кіевъ), „Товарищества“ (Самара), „Волжанинъ“ (Самара) и др.




$\smile AC = \smile CB; \smile AD = \smile DB; \smile CE = \smile EB.$

---

**XIX г. изданія.** **Открыта подписка на журналъ** **1910 г.**

# „ВѢСТНИКЪ ВОСПИТАНІЯ“.

Журналъ ставитъ своею **задачею** выясненіе вопросовъ образованія и воспитанія на основахъ научной педагогики, въ духѣ общественности, демократизма и свободнаго развитія личности. Съ этою цѣлью журналъ слѣдитъ за развитіемъ педагогическихъ идей, за современнымъ состояніемъ образованія и воспитанія въ Россіи и заграницей и даетъ систематическіе отзывы о вновь выходящихъ книгахъ по педагогикѣ, естествознанію, общественнымъ наукамъ и другихъ, о дѣтскихъ журналахъ, общедоступныхъ и дѣтскихъ книгахъ. Кромѣ того, въ журналѣ помѣщаются научно-популярн. статьи по различнымъ отраслямъ знанія и искусства, литературно-педагогическіе очерки, разсказы, вспоминанія и проч.

Журналъ выходитъ **9 разъ** въ годъ (въ теченіе лѣтнихъ мѣсяцевъ журналъ не выходитъ); въ каждой книжкѣ журнала болѣе 20 печатныхъ листовъ.

**Подписная цѣна:** въ годъ безъ доставки—**5** руб., съ доставкой и пересылкой—**6** р., въ полгода—**3** р., съ пересылкой за границу—**7 р. 50 к.**; для студентовъ и недостаточныхъ людей цѣна въ годъ съ доставкой и безъ доставки – **5** р.

Подписка принимается: въ Конторѣ редакціи (Москва, Арбатъ, Старо-Конюшенный пер., домъ № 32) и во всѣхъ крупныхъ книжныхъ магазинахъ обѣихъ столицъ. Гг. иногороднихъ просятъ обращаться прямо въ редакцію.

Редакторъ-издатель д-ръ **Н. Ф. Михайловъ.**