№ 531.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XLV-го Семестра № 3-й.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1911.

XLV Сем. № 3.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 531.

Содержаніе: Объ устойчивости велосипеда въ движеніи. *Н. Васильева.*— Общія формы чиселъ, заключенныхъ между ариѳметической и гармонической срединами. Отвѣтъ на тему для учащихся № 1. *Нюты Г.* — Отвѣтъ на замѣтку гг. Мрочека и Филипповича. *К. Лебединцева.* — Научная хроника: Длинныя тепловыя волны. *А. Іоллоса.* — Задачи №№ 384—389 (5 сер.).— Рѣшенія задачъ: №№ 260 и 262(5 сер.). – Опечатка. — Объявленія.

Объ устойчивости велосипеда въ движеніи.

Н. Васильева.

Каждый изъ насъ навѣрно не разъ задавалъ себѣ вопросъ, почему велосипедъ въ движеніи обладаетъ устойчивостью. Въ настоящемъ очеркѣ постараемся отвѣтить въ понятной формѣ на поставленный вопросъ.

§ 1. Описаніе велосипеда.

Основной частью велосипеда, какъ видно на рис. 1, является пятиугольная рама $RQEIS$, состоящая изъ треугольника SQR и трапеціи $IEQS$. Въ задней части рамы укрѣплено неподвижное колесо F. Въ передней части рама снабжена трубкой IE, внутри которой проходитъ стержень, оканчивающійся въ части EB' вилкой, на которую надѣто направляющее подвижное колесо D, ось котораго неизмѣнно скрѣплена съ вилкой въ B'. Верхній конецъ стержня оканчивается рулемъ, при помощи котораго сѣдокъ можетъ поворачивать переднее колесо въ желаемомъ направленіи. Сѣдокъ помѣщается на сѣдлѣ S. Надавливая поперемѣнно то на одну, то на другую педаль P, онъ сообщаетъ колесу, укрѣпленному въ Q, вращеніе, которое при помощи безконечной цѣпи передается заднему колесу F.

Рама велосипеда есть плоскость симметріи, содержащая ось xy трубки EI, центръ сѣдла S и центръ R неподвижнаго колеса F. Эту плоскость будемъ называть с р е д н е й плоскостью велосипеда. Плоскостью колеса будемъ называть плоскость, перпендикулярную къ оси колеса въ ея серединѣ. Очевидно, что плоскость неподвижнаго колеса всегда совпадаетъ съ средней плоскостью. Плоскость направляющаго колеса можетъ образовать различные углы съ средней плоскостью велосипеда; когда оно совпадаетъ съ средней плоскостью, то эта послѣдняя служитъ плоскостью симметріи всего аппарата. Массой цѣпи и остальныхъ частей въ первомъ приближеніи будемъ пренебрегать.

Назовемъ черезъ A и B точки прикосновенія двухъ колесъ съ почвой. Предположимъ, что ось xy направляющей трубки проходитъ черезъ точку прикосновенія B направляющаго колеса. Тогда точка B есть неподвижная точка средней плоскости при вращеніи трубки. Пря-

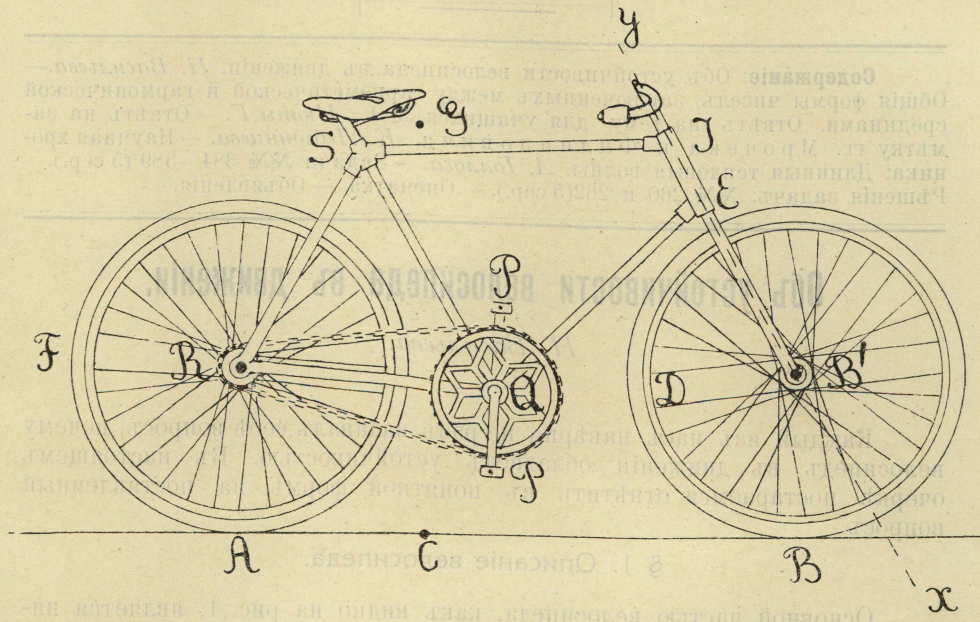


Рис. 1.

мая AB имѣетъ неизмѣнную длину, не зависящую отъ направленія подвижного колеса. Прямая AB касается неподвижнаго колеса и служитъ линіей пересѣченія средней плоскости съ почвой, которую мы предполагаемъ плоской и горизонтальной. Положимъ, что плоскость симметріи сѣдока совпадаетъ съ средней плоскостью; тогда общій центръ тяжести G машины и сѣдока приблизительно остается неподвижнымъ въ средней плоскости. Поэтому и точка C, проекція точки G на прямую AB, остается неподвижной.

§ 2. Движеніе велосипеда, когда плоскость передняго колеса образуетъ постоянный уголъ съ средней плоскостью.

Допустимъ, что велосипедъ находится въ движеніи; найдемъ слѣды колесъ на почвѣ, предполагая, что плоскость направляющаго колеса образуетъ постоянный уголъ съ средней плоскостью. Пусть плоскость чертежа (рис. 2) есть плоскость почвы, AR и BR' — прямыя пересѣченія плоскостей колесъ съ плоскостью почвы, AR совпадаетъ съ AB. Уголъ θ прямой BR' съ AB остается постояннымъ. Прямыя AR и BR' приблизительно касаются слѣдовъ T и T', оставляемыхъ колесами на землѣ. Будемъ считать, что эти слѣды суть два круга, имѣющіе общимъ центромъ ω точку пересѣченія перпендикуляровъ (нормалей) къ слѣдамъ въ A и B. Такое предположеніе можемъ сдѣлать, если будемъ разсматривать движеніе велосипеда въ теченіе небольшого промежутка времени.

Въ самомъ дѣлѣ, треугольникъ $A\omega B$ при перемѣщеніи велосипеда остается неизмѣннымъ, такъ какъ онъ имѣетъ не измѣняющую

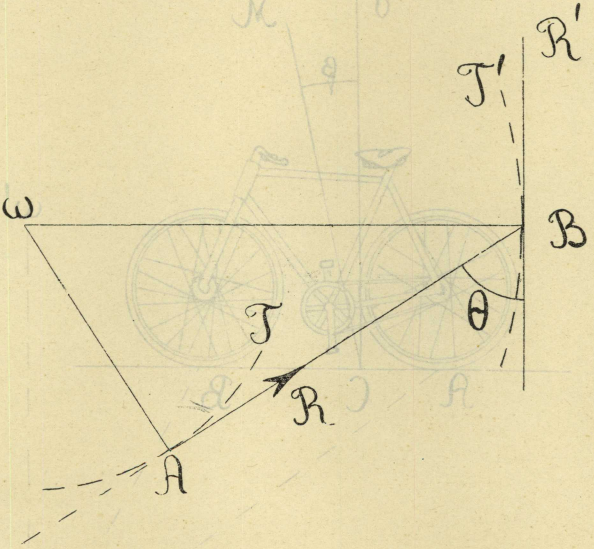


Рис. 2.

длины сторону AB и два постоянные угла ωAB — прямой и $A\omega B$, равный θ. Перемѣщеніе велосипеда достигается катаніемъ колесъ безъ скольженія. Если перемѣщеніе происходитъ такъ, что точка ω остается неподвижной, то точки A и B описываютъ окружности постоянныхъ радіусовъ $A\omega$ и $B\omega$. Слѣдовательно, движеніе велосипеда происходитъ такъ, что прямая AB поворачивается вокругъ ω съ постоянной скоростью, если принять, что скорость движенія велосипеда постоянна.

§ 3. Условіе равновѣсія велосипеда въ наклонномъ положеніи.

Пусть CM будетъ прямая, перпендикулярная къ AB въ средней плоскости; Cy — вертикальная прямая (рис. 3), $\omega\omega'$ — вертикальная прямая въ точкѣ ω почвы, т. е. въ общемъ центрѣ круговъ, описываемыхъ точками A и B. Допустимъ, что велосипедъ наклонился на уголъ β.

Выведемъ условіе, которое должно выполняться, чтобы уголъ β оставался постояннымъ и чтобы въ то же время велосипедъ не опрокидывался. Будемъ пренебрегать массой колесъ и педалей и въ данный моментъ будемъ разсматривать велосипедъ, какъ неподвижный. Чтобы онъ не упалъ, должно существовать равновѣсіе между моментами силы тяжести и центробѣжной силы относительно прямой AB. Положимъ, что точка ω отстоитъ отъ AB настолько далеко, что центробѣжныя силы въ каждой точкѣ можно считать параллельными, а разстоянія каждой точки сѣдока и велосипеда отъ ω можно считать равными одной и той же величинѣ R; тогда для точки массы m имѣемъ центробѣжную силу $\frac{mV^2}{R}$,

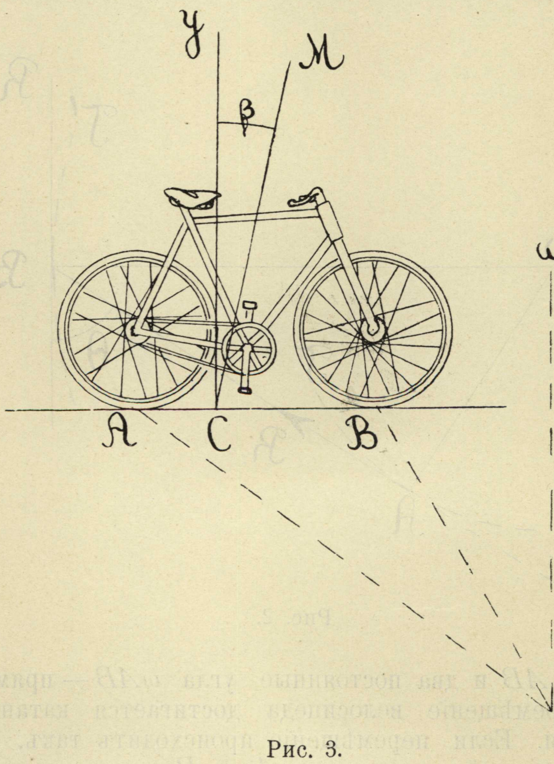


Рис. 3.

а результирующая центробѣжная сила пройдетъ черезъ центръ тяжести G и равна

$$F = \frac{MV^2}{R}, \tag{1}$$

гдѣ V — скорость движенія центра тяжести, M — масса сѣдока и машины. Сила тяжести равна

$$P = Mg. \tag{2}$$

Остается написать, что моменты этихъ силъ относительно прямой AB равны между собой.

Разложимъ силу $F = \frac{MV^2}{R}$ въ плоскости $G'A'B'$, опредѣляемой силой F и прямой $A'GB'$, параллельной AB, на двѣ такъ, чтобы одна изъ нихъ была направлена по $A'B'$, а другая была бы перпендикулярна къ $A'B'$ (рис. 4). На рисункѣ точка D есть проекція точки G на почву, прямая $G'GF$ параллельна ωD. Слагающая KG не даетъ момента вокругъ AB; остается другая слагающая GL, равная

$$F \cos \varphi,$$

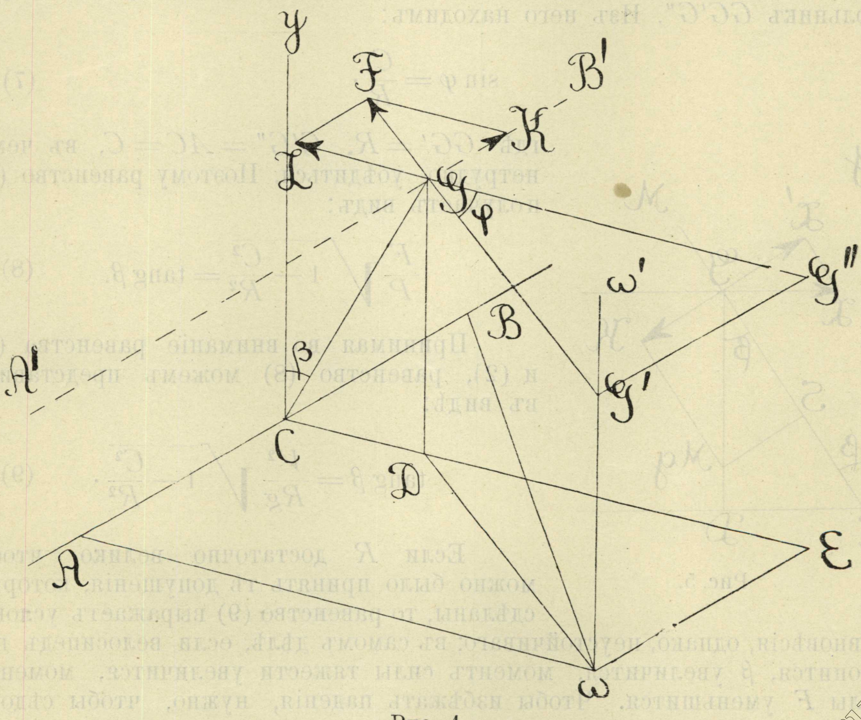


Рис. 4.

гдѣ $\angle \varphi = \angle G''GG'$ и $GG'' \parallel A\omega$. Разлагая

$$GL = F \cos \varphi \qquad (3)$$

снова по GC и по направленію, перпендикулярному къ GC въ плоскости LGC, получимъ силу

$$GL' = F \cos \varphi \cos \beta. \qquad (4)$$

Послѣднее разложеніе для ясности представлено на отдѣльномъ чертежѣ (рис. 5). Разлагая силу тяжести $P = Mg$ по линіи CG и по перпендикуляру къ ней въ плоскости LGC, получимъ:

$$GK = P \sin \beta. \tag{5}$$

Для равновѣсія необходимо существованіе равенства

$$GL' = GK,$$

т. е.

$$F \cos \varphi \cos \beta = P \sin \beta. \tag{6}$$

Опредѣлимъ уголъ φ. Черезъ G' (рис. 4) проводимъ линію, параллельную AB, LG продолжаемъ до пересѣченія, получаемъ треугольникъ $GG'G''$. Изъ него находимъ:

$$\sin \varphi = \frac{C}{R}, \tag{7}$$

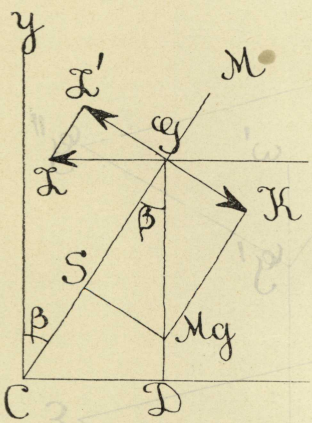


Рис. 5.

гдѣ $GG' = R$, $G'G'' = AC = C$, въ чемъ нетрудно убѣдиться. Поэтому равенство (6) получаетъ видъ:

$$\frac{F}{P} \sqrt{1 - \frac{C^2}{R^2}} = \operatorname{tang} \beta. \tag{8}$$

Принимая во вниманіе равенства (1) и (2), равенство (8) можемъ представить въ видѣ:

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{V^2}{Rg} \sqrt{1 - \frac{C^2}{R^2}}. \tag{9}$$

Если R достаточно велико, чтобы можно было принять тѣ допущенія, которыя сдѣланы, то равенство (9) выражаетъ условіе равновѣсія, однако, неустойчиваго; въ самомъ дѣлѣ, если велосипедъ наклонится, β увеличится, моментъ силы тяжести увеличится, моментъ силы F уменьшится. Чтобы избѣжать паденія, нужно, чтобы сѣдокъ повернулъ направляющее колесо въ ту сторону, въ которую онъ падаетъ; тогда уголъ θ увеличится, точка ω перемѣстится, $A\omega$, $B\omega$ и R уменьшатся, центробѣжная сила $F = \frac{MV^2}{R}$ увеличится и парализуетъ дѣйствіе тяжести. Обратное имѣетъ мѣсто, если β уменьшается.

Формула

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{V^2}{Rg} \sqrt{1 - \frac{C^2}{R^2}}$$

упрощается, если C мало сравнительно съ R. Тогда членомъ $\frac{C^2}{R^2}$ можно пренебречь, и мы получаемъ:

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{V^2}{Rg} \cdot \qquad (10)$$

Чтобы уголъ β былъ близокъ къ нулю, необходимо, чтобы Rg было велико сравнительно съ V^2. Но мы видѣли, что R зависитъ отъ угла, на который повернуто направляющее колесо; поэтому дѣлаемъ выводъ:

При большихъ скоростяхъ съ рулемъ надо обращаться осторожно и сообщать ему незначительныя движенія.

Начинающіе не выполняютъ этого правила и поэтому падаютъ. Опытный ѣздокъ можетъ держать руль одной лѣвой рукой или за середину и сохранять равновѣсіе, такъ какъ даже того слабаго усилія, которое онъ можетъ сообщать рулю при данныхъ условіяхъ, достаточно, чтобы сохранить равновѣсіе. Главное условіе, чтобы скорость была достаточно велика.

Такъ какъ моментъ силы тяжести равенъ

$$P \sin\beta \,.\, CG$$

(рис. 4), то при маломъ β онъ компенсируется малыми измѣненіями угла θ. Положеніе сѣдока на сѣдлѣ не имѣетъ большого значенія при поддерживаніи равновѣсія. Изъ послѣдняго ясно, почему ѣздокъ легко можетъ принять сзади пассажира, неопытнаго въ ѣздѣ на велосипедѣ и въ поддерживаніи равновѣсія. Этотъ пассажиръ можетъ во время движенія вскочить на подножку и соскочить съ нея, не вызывая паденія ѣздока.

При малыхъ скоростяхъ вліяніе тяжести увеличивается. Въ состояніи покоя равновѣсіе не зависитъ отъ держанія руля, но только отъ положенія тѣла.

Хотя равновѣсіе и неустойчивое, но, мѣняя уголъ θ, сѣдокъ имѣетъ возможность оставаться въ равновѣсіи, что мы и наблюдаемъ, когда велосипедистъ движется медленно.

§ 4. Причина, вслѣдствіе которой равновѣсіе становится устойчивымъ.

Въ случаѣ быстраго движенія велосипедисту сильно помогаетъ удерживать равновѣсіе и другое обстоятельство, которое дѣлаетъ движеніе устойчивымъ, т. е. такимъ, что ѣздокъ при достаточно малыхъ отклоненіяхъ отъ вертикальной линіи не падаетъ, но совершаетъ малыя колебанія. Упомянутое обстоятельство есть результатъ свойствъ вращающагося твердаго тѣла, по которымъ: 1) два одновременныхъ вращенія, приложенныхъ къ твердому тѣлу вокругъ пересѣкающихся осей складываются по правилу параллелограмма; 2) твердое тѣло стремится вращаться вокругъ оси наибольшаго момента инерціи*).

Пусть B', переднее колесо велосипеда (рис. 6), находится въ быстромъ вращеніи вокругъ оси, проходящей черезъ точку B' и перпендикулярной къ плоскости чертежа; при паденіи тому же колесу сообщается вращеніе вокругъ оси AB; послѣднее вращеніе равносильно вращенію вокругъ оси $A'B'$ съ поступательнымъ движеніемъ этой оси. Слѣдовательно, тѣлу B' сообщается два одновременныхъ вращенія вокругъ осей, проходящихъ черезъ точку B'; результирующее вращеніе будетъ имѣть осью прямую, проходящую черезъ B' и направленную по діагонали параллелограмма, построеннаго на слагающихъ вращеніяхъ. Колесо повернется на нѣкоторый уголъ θ, но тогда начнетъ дѣйствовать вышеупомянутая центробѣжная сила, которая заставитъ велосипедъ выпрямиться. Разъ направленіе добавочнаго вращенія измѣнится, колесо начнетъ поворачиваться въ обратномъ направленіи. При наклоненіи

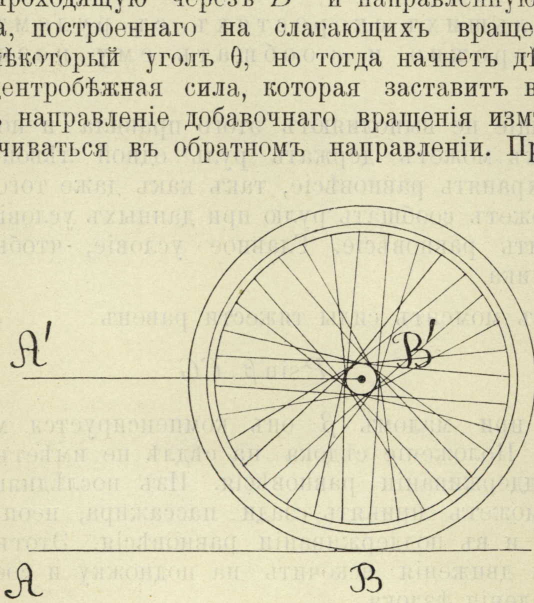


Рис. 6.

велосипеда въ обратную сторону появятся силы, которыя будутъ стремиться возратить его къ вертикальному положенію. Итакъ, благодаря взаимному дѣйствію вышеупомянутыхъ причинъ: 1) развивающейся центробѣжной силѣ; 2) свойству твердаго тѣла вращаться по діагонали параллелограмма, когда къ нему приложены два одновременныхъ вращенія вокругъ пересѣкающихся осей; 3) стремленію твердаго тѣла вращаться вокругъ оси наибольшаго момента инерціи—движеніе велосипеда становится устойчивымъ и тѣмъ болѣе устойчивымъ, чѣмъ болѣе скорость движенія, ибо тогда велосипедъ сильнѣе стремится къ вертикальному положенію.

На основаніи сказаннаго нетрудно понять, что, во-первыхъ, ѣздокъ можетъ двигаться, не держась за руль; во-вторыхъ, для измѣ-

*) См. мою статью „Нѣкоторыя свойства вращающагося твердаго тѣла“ въ № 519 „Вѣстника“.

нія направленія движенія велосипеда нѣтъ надобности браться за руль,—достаточно перемѣстить центръ тяжести и заставить велосипедъ наклониться въ желаемомъ направленіи; тогда переднее колесо само повернется, куда слѣдуетъ. Такъ поступаютъ искусные ѣздоки, когда ѣдутъ, не держась за руль.

Такъ какъ равенство моментовъ относительно AB центробѣжной силы и силы тяжести можетъ существовать только въ теченіе одного мгновенія, то переднее колесо велосипеда совершаетъ малыя колебанія вокругъ нѣкотораго средняго положенія. Въ существованіи этихъ колебаній можно убѣдиться, разсматривая слѣды на почвѣ, оставленные велосипедомъ при прямолинейномъ движеніи. Мы видимъ, что слѣды почти періодически пересѣкаются; это обстоятельство показываетъ, что равновѣсіе поперемѣнно нарушается въ обѣ стороны. Нажиманія на педали способствуютъ періодичности колебаній. У начинающихъ размахъ этихъ колебаній великъ, у опытныхъ ѣздоковъ онъ едва замѣтенъ. Эти колебанія — необходимое условіе устойчивости движенія, въ чемъ нетрудно убѣдиться: если закрѣпить переднее колесо, то ѣздокъ, даже держась за руль, немедленно опрокидывается. Поэтому каждый начинающій, даже очень опытный въ сохраненіи равновѣсія, прежде, чѣмъ самостоятельно сѣсть на сѣдло, долженъ выучиться управлять рулемъ. Онъ долженъ опытомъ убѣдиться въ томъ соотвѣтствіи, которое существуетъ между незамѣтными движеніями руля и подниманіемъ и паденіемъ велосипеда. Боковыя перемѣщенія не имѣютъ большого значенія: все дѣло лишь въ умѣніи управлять рулемъ, при чемъ это управленіе должно быть нѣжнымъ, если можно такъ выразиться. По этой причинѣ люди нервные съ нѣкоторымъ трудомъ выучиваются ѣздить на велосипедѣ.

Остается выяснить, помогаетъ ли устойчивости движенія заднее колесо. Мы видѣли, что необходимое условіе, при которомъ переднее колесо можетъ сообщать велосипеду устойчивость, это возможность совершать колебанія. Можетъ ли заднее колесо совершать подобныя колебанія? На этотъ вопросъ надо отвѣтить отрицательно, такъ какъ заднее колесо неизмѣнно связано съ рамой и съ точкой B передняго колеса; для поворачиванія колеса A необходимо скольженіе передняго колеса въ точкѣ B, чего мы не предполагаемъ.

§ 5. Случай движенія со скольженіемъ.

До сихъ поръ мы предполагали, что скольженіе невозможно; теперь допустимъ обратное. Пусть f будетъ коэффиціентъ тренія, т. е. отношеніе горизонтальной силы къ вѣсу, при которомъ начинается скольженіе велосипеда. Въ данномъ случаѣ горизонтальная сила $F=\frac{MV^2}{R}$, вѣсъ тѣла $P=Mg$. Чтобы велосипедъ могъ двигаться безъ скольженія, описывая кругъ радіуса R, должно существовать неравенство:

$$f \geqq \frac{MV^2}{R} : Mg, \quad \text{т. е.} \quad V^2 \leqq fgR.$$

Оно показываетъ, что при данной скорости нельзя описать круга радіуса, меньшаго $\frac{V^2}{fg}$. Чтобы при скользкой почвѣ описать кругъ даннаго радіуса, надо замедлить движенiе настолько, пока не будетъ удовлетворяться вышенаписанное неравенство.

Болѣе подробное и строгое изложенiе теоріи движенія велосипеда можно найти въ „Traité de mécanique rationelle" par P. Appel. (Paris, 1896. T. II, p. 297) и въ сочиненіи M. E. Carvallo „Théorie de mouvement du monocycle et de la bicyclette", напечатанномъ въ „Journal de l'École politechnique" (II Série, 5-me et 6-me cah. 1900 et 1901, p. 120), которыми я пользовался при составленіи настоящаго очерка. При чтеніи ихъ необходимо знаніе высшей математики и аналитической механики.

Общія формы чиселъ, заключенныхъ между ариѳметической и гармонической срединами.

Отвѣтъ на тему для учащихся № 1.

Нюты Г.

Дано m положительныхъ чиселъ

$$a_1, a_2, \ldots, a_m.$$

Ихъ ариѳметическая средина есть отношенiе ихъ суммы къ ихъ числу. Ихъ гармоническая средина есть число, обратное ариѳметической срединѣ чиселъ, обратныхъ даннымъ.

Задача заключается въ опредѣленіи x по неравенству

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m} > x > \frac{m}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}}. \tag{1}$$

Введемъ обозначенія

$$p_i=\frac{1}{1+a_i},\quad q_i=\frac{a_i}{1+a_i},\quad x=\frac{Q_m}{P_m},\quad P_m+Q_m=1.$$

Тогда неравенство (1) приметъ видъ:

$$\frac{\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}}{m} > \frac{Q_m}{P_m} > \frac{m}{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}}.$$

Тема распадается на три части.

Первая часть темы такова:

Возьмемъ ариѳметическую и гармоническую средины порядка h, и пусть отношеніе $\frac{Q_h}{P_h}$ есть число, удовлетворяющее условію

$$\frac{\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_h}{p_h}}{h}>\frac{Q_h}{P_h}>\frac{h}{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_h}{q_h}}.$$

Показать, что по числамъ порядка h числа порядка m найдутся посредствомъ слѣдующихъ формъ:

Форма I.

$$\frac{Q_m}{P_m}=\frac{h\frac{Q_h}{P_h}+\frac{q_{h+1}}{p_{h+1}}+\frac{q_{h+2}}{p_{h+2}}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}}{m}.$$

Форма II.

$$\frac{Q_m}{P_m}=\frac{m}{h\frac{P_h}{Q_h}+\frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}+\frac{p_{h+2}}{q_{h+2}}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}}.$$

Форма III.

$$\frac{Q_m}{P_m}=\sqrt[m]{\frac{Q_h^h\;q_{h+1}\;q_{h+2}\ldots q_m}{P_h^h\;p_{h+1}\;p_{h+2}\ldots p_m}}.$$

Форма IV.

$$\frac{Q_m}{P_m}=\frac{hQ_h+q_{h+1}+q_{h+2}+\cdots+q_m}{hP_h+p_{h+1}+p_{h+2}+\cdots+p_m}.$$

Буква h имѣетъ любое изъ значеній:

$$h=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m-1.$$

Въ заключеніе вывести формулу:

$$\frac{Q_{h+1}}{P_{h+1}}=\frac{\frac{h}{P_h}+\frac{1}{p_{h+1}}}{\frac{h}{Q_h}+\frac{1}{q_{h+1}}}.$$

строй которой не даетъ, впрочемъ, возможности выразить непосредственно $\frac{Q_m}{P_m}$ черезъ Q_h и P_h.

Въ частности показать, что

$$\frac{Q_m}{P_m}=\frac{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_m}}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_m}}.$$

Вторая часть темы, требующая знанія теоремы Ролля, заключается въ доказательствѣ неравенства:

$$\frac{\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}}{m} > \frac{m-h}{h+1}\cdot\frac{A_h}{A_{h+1}} > \frac{m}{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}},$$

гдѣ h имѣетъ любое изъ значеній

$$h=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,$$

а A_h есть коэффиціентъ при x^h въ разложеніи произведенія

$$(p_1 x+q_1)(p_2 x+q_2)\cdots(p_m x+q_m)$$

по степенямъ x.

Третья часть темы заключается въ доказательствѣ того, что, начиная съ $m=2$, число общихъ формъ чиселъ, заключенныхъ между ариѳметической и гармонической срединами, безконечно велико. Построеніе этого доказательства можно основать на неравенствѣ

$$1-\frac{m}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_m}} > P_m > \frac{m}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_m}}.$$

П. Флоровъ.

Мы будемъ предполагать, что не всѣ количества $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$ равны между собой. Возьмемъ теорему: среднее ариѳметическое нѣсколькихъ величинъ больше ихъ средняго геометрическаго. Примѣняя ее къ количествамъ $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$, получаемъ:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m} > \sqrt[m]{a_1 . a_2 \ldots a_m}.$$

Примѣняя ее къ обратнымъ величинамъ $\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \cdots \frac{1}{a_m}$, получаемъ:

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}}{m} > \sqrt[m]{\frac{1}{a_1 . a_2 \ldots a_m}},\ \text{т. е. } \sqrt{a_1 . a_2 \ldots a_m} > \frac{m}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}}.$$

Итакъ,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m} > \sqrt[m]{a_1 . a_2 \ldots a_m} > \frac{m}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}} \text{*)}. \qquad (2)$$

Неравенство (2) показываетъ намъ, между прочимъ, возможность неравенства (1) и даетъ также одно изъ его рѣшеній.

---

*) Если $a_1=\ldots=a_m$ то знаки $>$ должны быть замѣщены знаками $=$.

Первая часть темы.

Пусть дана дробь $\frac{Q_h}{P_h}$, удовлетворяющая неравенству ($h=2,\ldots,m-1$)

$$\frac{\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_h}{p_h}}{h}>\frac{Q_h}{P_h}>\frac{h}{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_h}{q_h}}.\text{*)} \tag{3}$$

Первая часть темы состоитъ въ доказательствѣ того, что числа $\frac{Q_m}{P_m}$, получаемыя по каждой изъ четырехъ формъ, удовлетворяютъ аналогичному неравенству

$$\frac{\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}}{m}>\frac{Q_m}{P_m}>\frac{m}{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}}. \tag{4}$$

Формы I, II, III.

Изъ первой части даннаго неравенства (3) получаемъ:

$$h\cdot\frac{Q_h}{P_h}<\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_h}{p_h}. \tag{5}$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ неравенства (5) по суммѣ $\frac{q_{h+1}}{p_{h+1}}+\frac{q_{h+2}}{p_{h+2}}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}$, получаемъ:

$$h\cdot\frac{Q_h}{P_h}+\frac{q_{h+1}}{p_{h+1}}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}<\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}.$$

Итакъ,

$$\frac{\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}}{m}>\frac{h\cdot\frac{Q_h}{P_h}+\frac{q_{h+1}}{p_{h+1}}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}}{m}. \tag{6}$$

Изъ второй части даннаго неравенства (3) получаемъ:

$$h\cdot\frac{P_h}{Q_h}<\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_h}{q_h}. \tag{7}$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ неравенства (7) по суммѣ $\frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}+\frac{p_{h+2}}{q_{h+2}}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}$, получаемъ:

$$h\cdot\frac{P_h}{Q_h}+\frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}<\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}.$$

---

*) При этомъ предполагается, что не всѣ числа $\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}, \ldots, \frac{q_h}{p_h}$ равны между собою.

Итакъ,

$$\frac{m}{h\cdot\frac{P_h}{Q_h}+\frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}}>\frac{m}{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}}. \tag{8}$$

Примѣняя неравенство (2) къ m количествамъ $\frac{Q_h}{P_h}$, $\frac{Q_h}{P_h}$, ..., $\frac{Q_h}{P_h}$, $\frac{q_{h+1}}{p_{h+1}}$, ..., $\frac{q_m}{p_m}$, получаемъ:

$$\frac{h\cdot\frac{Q_h}{P_h}+\frac{q_{h+1}}{p_{h+1}}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}}{m}\geqq\sqrt[m]{\frac{Q_h^h\cdot q_{h+1}\ldots q_m}{P_h^h\cdot p_{h+1}\ldots p_m}}\geqq\frac{m}{h\cdot\frac{P_h}{Q_h}+\frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}}. \tag{9}$$

Неравенство (9) въ связи съ неравенствами (6) и (8) даетъ:

$$\frac{\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}}{m}>\frac{h\cdot\frac{Q_h}{P_h}+\frac{q_{h+1}}{p_{h+1}}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}}{m}\geqq$$

$$\geqq\frac{m}{h\cdot\frac{P_h}{Q_h}+\frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}}>\frac{m}{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}},$$

что показываетъ намъ, что числа $\frac{Q_m}{P_m}$, получаемыя по формамъ I и II, удовлетворяютъ неравенству (4), а въ связи съ неравенствомъ (9) позываетъ намъ, что и число $\frac{Q_m}{P_m}$, получаемое по формѣ III, удовлетворяетъ неравенству (4).

Форма IV.

Замѣтимъ, что вообще $q_i+p_i=\frac{a_i}{1+a_i}+\frac{1}{1+a_i}=1$, $Q_h+P_h=1$. Прибавивъ по h къ обѣимъ частямъ неравенства (5), получаемъ:

$$h\cdot\frac{Q_h+P_h}{P_h}<\frac{q_1+p_1}{p_1}+\frac{q_2+p_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_h+p_h}{p_h},$$

т. е.

$$\frac{h}{P_h}<\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_h}. \tag{10}$$

Прибавивъ по h къ обѣимъ частямъ неравенства (7), получаемъ:

$$h\cdot\frac{Q_h+P_h}{Q_h}<\frac{q_1+p_1}{q_1}+\frac{q_2+p_2}{q_2}+\cdots+\frac{+p_h}{q_h},$$

т. е.

$$\frac{h}{Q_h}<\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_h}. \tag{11}$$

Неравенства (10) и (11) необходимы для существованія неравенства (3), но они, какъ легко видѣть, и достаточны, стоитъ только для вывода неравенства (3) изъ неравенствъ (10) и (11) идти обратнымъ путемъ. Такъ какъ въ неравенствахъ (3), (5), (7), (10), (11) можно положить $h = m$, то намъ достаточно показать, что значенія Q_m, P_m, получаемыя по формѣ IV, удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$\frac{m}{Q_m} < \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_m}, \tag{12}$$

$$\frac{m}{P_m} < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m}. \tag{13}$$

Число $\dfrac{Q_m}{P_m}$ опредѣляется по формѣ IV равенствомъ:

$$\frac{Q_m}{P_m} = \frac{h \cdot Q_h + q_{h+1} + \cdots + q_m}{h \cdot P_h + p_{h+1} + \cdots + p_m}.$$

Прибавивъ по единицѣ къ обѣимъ частямъ этого равенства, получаемъ:

$$\frac{Q_m + P_m}{P_m} = \frac{h \cdot (Q_h + P_h) + (q_{h+1} + p_{h+1}) + \cdots + (q_m + p_m)}{h \cdot P_h + p_{h+1} + \cdots + p_m},$$

т. е.

$$\frac{1}{P_m} = \frac{m}{h \cdot P_h + p_{h+1} + \cdots + p_m}. \tag{14}$$

Примѣняя неравенство (2) къ m количествамъ $\dfrac{1}{P_h}, \dfrac{1}{P_h}, \cdots \dfrac{1}{P_h}, \dfrac{1}{p_{h+1}}, \cdots \dfrac{1}{p_m}$, получаемъ:

$$\frac{m}{h \cdot P_h + p_{h+1} + \cdots + p_m} \leqq \frac{\dfrac{h}{P_h} + \dfrac{1}{p_{h+1}} + \cdots + \dfrac{1}{p_m}}{m}. \tag{15}$$

А потому [см. (14), (15), (10)]

$$\frac{m}{P_m} \leqq \frac{h}{P_h} + \frac{1}{p_{h+1}} + \frac{1}{p_{h+2}} + \cdots + \frac{1}{p_m} < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m}.$$

Итакъ, неравенство (13) удовлетворено. Также найдемъ, что значеніе

$$\frac{1}{Q_m} = \frac{m}{h \cdot Q_h + q_{h+1} + \cdots + q_m},$$

получающееся по формѣ IV, удовлетворяетъ неравенству (12).

$$\text{Форма } \frac{Q_{h+1}}{P_{h+1}} = \frac{\dfrac{h}{P_h} + \dfrac{1}{p_{h+1}}}{\dfrac{h}{Q_h} + \dfrac{1}{q_{h+1}}}.$$

Значеніе, получаемое по этой формѣ, заключается между значеніями, получаемыми (при $m = h + 1$) по формамъ I и II. Дѣйствительно,

$$0 \leqq (Q_h - q_{h+1})^2 = (Q_h - q_{h+1}) \cdot [Q_h (1 - q_{h+1}) - (1 - Q_h) q_{h+1}] =$$

$$= (Q_h - q_{h+1}) \cdot (Q_h \cdot p_{h+1} - P_h \cdot q_{h+1}),$$

такъ что

$$\frac{(Q_h - q_{h+1})(Q_h \cdot p_{h+1} - P_h \cdot q_{h+1})}{Q_h \cdot P_h \cdot q_{h+1} \cdot p_{h+1}} \geqq 0,$$

или

$$\frac{Q_h}{P_h \cdot q_{h+1}} + \frac{q_{h+1}}{Q_h \cdot p_{h+1}} \geqq \frac{1}{p_{h+1}} + \frac{1}{P_h}.$$

Умноживъ обѣ части этого неравенства на h и прибавивъ къ обѣимъ частямъ по суммѣ $\dfrac{h^2}{P_h} + \dfrac{1}{p_{h+1}}$, получаемъ:

$$\frac{h^2}{P_h} + \frac{h \cdot Q_h}{P_h \cdot q_{h+1}} + \frac{h \cdot q_{h+1}}{Q_h \cdot p_{h+1}} + \frac{1}{p_{h+1}} \geqq \frac{h^2}{P_h} + \frac{h}{p_{h+1}} + \frac{h}{P_h} + \frac{1}{p_{h+1}},$$

т. е.

$$\left(h \cdot \frac{Q_h}{P_h} + \frac{q_{h+1}}{p_{h+1}}\right) \cdot \left(\frac{h}{Q_h} + \frac{1}{q_{h+1}}\right) \geqq \left(\frac{h}{P_h} + \frac{1}{p_{h+1}}\right)(h+1),$$

т. е.

$$\frac{h \cdot \dfrac{Q_h}{P_h} + \dfrac{q_{h+1}}{p_{h+1}}}{h+1} \geqq \frac{\dfrac{h}{P_h} + \dfrac{1}{p_{h+1}}}{\dfrac{h}{Q_h} + \dfrac{1}{q_{h+1}}}.$$

Итакъ, значеніе числа $\dfrac{Q_{h+1}}{P_{h+1}}$, получаемое по этой формѣ, не превосходитъ значенія, получаемаго по формѣ I. Такимъ же образомъ доказывается, что оно не меньше значенія, получаемаго по формѣ II, а, слѣдовательно, оно удовлетворяетъ неравенству (4).

$$\text{Форма } \frac{Q_m}{P_m} = \frac{\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_m}}{\dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{q_2} + \cdots + \dfrac{1}{q_m}}.$$

Введемъ обозначенія:

$$s=\frac{\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}}{m},\quad t=\frac{m}{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}}.$$

Тогда, такъ какъ $s>t$ [см. (2)],

$$s>\frac{1+s}{1+\frac{1}{t}}>t.$$

Но

$$\frac{1+s}{1+\frac{1}{t}}=\frac{\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}+m}{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}+m}=\frac{\frac{q_1+p_1}{p_1}+\frac{q_2+p_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_m+p_m}{p_m}}{\frac{q_1+p_1}{q_1}+\frac{q_2+p_2}{q_2}+\cdots+\frac{q_m+p_m}{q_m}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_m}}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_m}}.$$

Итакъ,

$$\frac{\frac{q_1}{p_2}+\frac{q_2}{p_2}+\cdots+\frac{q_m}{p_m}}{m}>\frac{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_m}}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_m}}>\frac{m}{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\cdots+\frac{p_m}{q_m}}.$$

(Окончаніе слѣдуетъ).

Отвѣтъ на замѣтку гг. Мрочека и Филипповича.

Въ № 529 «Вѣстника» гг. Мрочекъ и Филипповичъ возражаютъ на мою рецензію ихъ книги «Педагогика математики» (т. I), напечатанную въ № 524 «Вѣстника». Если бы ихъ возраженіе сводилось къ разъясненію возникшихъ на почвѣ моей рецензіи недоразумѣній или къ констатированію нашихъ разногласій, то вопросъ можно было бы считать исчерпаннымъ; но авторы находятъ, что, выступая противъ ихъ книги, я выступилъ тѣмъ самымъ противъ новыхъ вѣяній въ преподаваніи математики и противъ реформы этого преподаванія. Вотъ это обстоятельство и вынуждаетъ меня отвѣчать на ихъ замѣтку; я полагаю, что стороннику реформы отнюдь не обязательно раздѣлять всѣ взгляды, высказываемые авторами «Педагогики математики».

Въ началѣ своего возраженія гг. Мрочекъ и Филипповичъ горячо доказываютъ, что методика математики должна быть обоснована на данныхъ современной психологіи, педагогики и дидактики. Мысль совершенно вѣрная, но дѣло въ томъ, что я вовсе ея не отрицалъ ни въ данной рецензіи, ни въ другихъ своихъ выступленіяхъ въ печати. Думаю даже, что въ области распространенія этой мысли мнѣ принадлежитъ пріоритетъ передъ моими оппонентами, такъ какъ еще семь лѣтъ тому назадъ я высказывался за необходимость ознакомленія русскихъ педагоговъ съ изслѣдованіями Лая въ области начальнаго обученія счету («Педагогическая Мысль», Кіевъ, 1904 г., вып. II, рецензія о книгѣ Лая: «Führer durch den ersten Rechenunterricht»). Такимъ образомъ, эта часть возраженія ко мнѣ совершенно не можетъ относиться.

Изъ предыдущаго, конечно, не вытекаетъ, что мы смотримъ вполнѣ одинаково на всѣ вопросы психологіи и педагогики; но это обстоятельство не является основнымъ пунктомъ нашихъ разногласій. Какъ совершенно вѣрно отмѣчаютъ мои оппоненты, мы существенно расходимся въ вопросѣ объ оцѣнкѣ ихъ книги, какъ попытки построить методику математики въ соотвѣтствіи съ требованіями современной педагогики. Сущность моего мнѣнія объ ихъ книгѣ была выражена въ рецензіи такъ: «авторы плохо разобрались въ излагаемомъ ими матеріалѣ *), не отличаютъ въ немъ существеннаго отъ маловажнаго и наряду съ безспорными данными излагаютъ съ такой же увѣренностью и весьма сомнительныя положенія». Въ подтвержденіе этихъ упрековъ былъ приведенъ рядъ примѣровъ (числомъ болѣе десяти) изъ различныхъ главъ книги.

Чтобы разбить мою аргументацію, авторамъ слѣдовало сдѣлать одно изъ двухъ: или показать, что мои конкретныя критическія замѣчанія ошибочны, — тогда мое мнѣніе о книгѣ оказалось бы необоснованнымъ; или доказать, что приводимые мною примѣры представляютъ несущественныя мелочи, не затрагивающія основныхъ положеній ихъ труда. Вмѣсто этого они избрали нѣчто среднее. Противъ нѣкоторыхъ замѣчаній (именно семи) они возражаютъ (насколько убѣдительно — будетъ видно ниже); другія оставлены безъ возраженій; при этомъ проводится мысль, что замѣчаній вообще немного, и они касаются далеко не всѣхъ главъ книги; въ другихъ же главахъ я будто бы не могъ найти недостатковъ.

Остановлюсь прежде всего на этомъ послѣднемъ аргументѣ, такъ какъ онъ обнаруживаетъ, насколько внимательно гг. Мрочекъ и Филипповичъ читали текстъ моей рецензіи. Въ началѣ ея прямо говорится, что «подробная критика содержанія разбираемаго труда потребовала бы составленія длинной статьи; здѣсь достаточно будетъ привести нѣсколько наиболѣе характерныхъ примѣровъ», а послѣ изложенія послѣднихъ сказано: «подобныхъ примѣровъ можно было бы найти еще не мало, но и этихъ достаточно для того, чтобы судить о характерѣ работы». Полагаю, здѣсь совершенно ясно выражена мысль, что сдѣланныя мною конкретныя замѣчанія — не единственныя,

---

*) Здѣсь слово „матеріалъ" употреблено не въ смыслѣ только „литературныхъ источниковъ", какъ почему-то подумали гг. Мрочекъ и Филипповичъ, а въ болѣе общемъ значеніи — въ смыслѣ „совокупности вопросовъ разбираемыхъ въ книгѣ".

которыя я могъ бы сдѣлать; но и въ этой замѣткѣ мнѣ не понадобится дѣлать новыя замѣчанія; достаточно разсмотрѣть, какъ возражаютъ гг. Мрочекъ и Филипповичъ на прежнія.

1) По вопросу о методѣ преподаванія математики я писалъ въ рецензіи слѣдующее:

«Въ заключеніе той же главы IV авторы дѣлаютъ выводъ, что единственно правильнымъ методомъ преподаванія математики, отвѣчающимъ всѣмъ даннымъ психологіи, является такъ называемый лабораторный (авторы пишутъ «лабораторная метода»), при которомъ дается наибольшій просторъ самодѣятельности учащихся. Между тѣмъ въ главѣ V (стр. 118) говорится, что «никогда нельзя удовольствоваться въ школѣ одной методой: умѣлое пользованіе нѣсколькими методами есть залогъ наибольшаго успѣха въ преподаваніи», а на стр. 119 дается перечень этихъ методовъ (числомъ 7), при чемъ оказывается, что, кромѣ лабораторнаго метода, существуетъ еще три другихъ, признаваемыхъ авторами за вполнѣ цѣлесообразные; изъ нихъ «генетическій» признается особенно цѣннымъ для прохожденія началъ математики».

На это авторы возражаютъ: «Подобное противорѣчіе было бы весьма прискорбно, но увы! Этотъ «выводъ» принадлежитъ всецѣло г. К. Л., а не обвиняемымъ авторамъ. Въ главѣ IV ничего подобнаго не говорится».

Мнѣ остается только ознакомить авторовъ съ содержаніемъ главъ III и IV ихъ книги и въ заключеніе процитировать конецъ главы IV. Глава III посвящена изложенію исторіи нагляднаго и лабораторнаго метода и ихъ современныхъ формъ, въ главѣ же IV дается ихъ психологическое обоснованіе. Въ концѣ же главы IV (стр. 105—106) читаемъ: «Теперь только мы имѣемъ возможность окончательно разсмотрѣть вопросъ о наглядной и лабораторной методахъ и выяснить ихъ сравнительную цѣнность для педагогики».

(При наглядной методѣ)... «въ большинствѣ случаевъ ученики ограничиваются зрительными воспріятіями, въ лучшемъ случаѣ могутъ пріобрѣсти подражательные навыки» (разрядка авторовъ).

«... При лабораторной методѣ роль учителя сводится къ регулированію и поясненію индивидуальныхъ работъ учащихся. Такимъ образомъ лабораторная метода приводитъ къ самостоятельнымъ навыкамъ» (разрядка авторовъ).

«Изъ сказаннаго видно, что лабораторная метода идетъ гораздо дальше наглядной; исходя изъ общаго начала — зрительныхъ воспріятій, обѣ методы въ дальнѣйшемъ расходятся и приводятъ къ совершенно различнымъ результатамъ. Каковы эти результаты въ лабораторной методѣ, краснорѣчиво разсказываетъ Omer Buyse, знаменитый изслѣдователь школъ Европы и Америки» (слѣдуетъ цитата, въ которой подчеркивается огромное превосходство американской школы надъ европейской).

Такъ какъ во всей III и IV главахъ только и говорится о двухъ методахъ преподаванія — наглядномъ и лабораторномъ и все время утверждается рѣшительное преимущество послѣдняго надъ первымъ (какъ видно и изъ приведенныхъ строкъ), то всякій читатель, разсуждающій по законамъ логики, вправѣ сдѣлать выводъ, что, по мнѣнію авторовъ, только лабораторный методъ отвѣчаетъ всѣмъ даннымъ психологіи и является наилучшимъ. Да и на стр. 77 (глава III) сами авторы говорятъ категорически: «... въ настоящее время лабораторная метода является наилучшимъ образовательнымъ средствомъ».

Такъ какъ очевидно, что эти цитаты совершенно уничтожаютъ «возраженіе» гг. Мрочека и Филипповича по вопросу о правильности моихъ выводовъ, то мнѣ остается еще привести текстъ стр. 118—119 въ его полной неприкосновенности:

«Относительная цѣнность каждой методы различна. Каждая стремится къ достиженію максимума результатовъ при минимумѣ индивидуальныхъ затратъ ума и воли; но никогда нельзя удовольствоваться въ школѣ одной методой (разрядка авторовъ); умѣлое пользованіе нѣсколькими методами есть залогъ наибольшаго успѣха преподаванія».

«Главнѣйшія математическія методы слѣдующія:

1. Догматическая: преподаваніе, т. е. лекціонное изложеніе (объясненіе урока) и заучиваніе ученикомъ по книгѣ или запискамъ. Легко переходитъ въ дрессировку.

2. Катехизическая: даются вопросы и готовые отвѣты. Метода основана на зубреніи и спрашиваніи. Примѣняется иногда и теперь въ книгахъ по такъ называемой пропедевтикѣ математики и физики.

3. Эвристическая: даются вопросы, наводящіе на отвѣты (Сократъ). Метода основана на подборѣ цѣлесообразныхъ задачъ.

4. Генетическая: особый видъ синтеза — генезисъ — даетъ картину развитія данной отрасли знанія. Особенно цѣнная метода для прохожденія началъ математики.

5. Наглядная } см. главу IV.
6. Лабораторная }

7. Комбинаціонная: иногда 2 методы соединяютъ — комбинируютъ ихъ. Изъ такихъ комбинаціонныхъ методъ наибольшимъ успѣхомъ пользуются: генетическая (если ее разсматривать, какъ соединеніе анализа съ синтезомъ), индуктивно-эвристическая и генетически-эвристическая».

Теперь читатель, разсуждающій по законамъ логики, вправѣ спросить: какъ же такъ? Если лабораторный методъ, какъ утверждаютъ авторы, «является наилучшимъ образовательнымъ средствомъ», то почему «залогъ наибольшаго успѣха преподаванія» заключается въ умѣломъ пользованіи нѣсколькими методами, въ томъ числѣ, конечно, и не наилучшими? А если лабораторный методъ не является наилучшимъ образовательнымъ средствомъ, то какой же изъ перечисленныхъ на стр. 119 методовъ или какая ихъ комбинація наиболѣе соотвѣтствуетъ требованіямъ современной психологіи и педагогики и почему?

Противорѣчіе коренное и неустранимое, при томъ касающееся одного изъ самыхъ существенныхъ вопросовъ книги. Теперь я, въ свою очередь, могу выразить недоумѣніе, какъ это авторы не только выпустили въ свѣтъ книгу, въ которой третья и четвертая глава совершенно уничтожаются пятой, но и настаиваютъ на томъ, что противорѣчіе существуетъ лишь въ воображеніи рецензента!

По поводу процитированной стр. 119 позволительно задать и другіе недоумѣнные вопросы. Напримѣръ, какъ это генезисъ оказывается, съ одной стороны, особымъ видомъ синтеза, а съ другой — соединеніемъ анализа съ синтезомъ? И еще: если таблица на стр. 119 представляетъ классификацію методовъ преподаванія, то какъ могутъ быть мыслимы комбинаціонные методы, принадлежащіе одновременно къ двумъ изъ указанныхъ категорій? Вѣдь если, напримѣръ, мы дѣлимъ европейцевъ на русскихъ, французовъ, нѣмцевъ, англичанъ и т. д., то не можетъ быть случая, чтобы одинъ и тотъ же человѣкъ оказался англичаниномъ и въ то же время нѣмцемъ. А если указанная таблица является простымъ перечнемъ терминовъ, то въ чемъ же ея смыслъ и ради какой цѣли она дается?

Не буду углубляться] въ разборъ этихъ недоумѣній, чтобы не увеличивать черезчуръ размѣровъ моей замѣтки, и перейду къ слѣдующему пункту.

2. По вопросу о памяти я указалъ на противорѣчіе между двумя сужденіями авторовъ: на стр. 95, гдѣ они говорятъ, что въ возрастѣ 8—13 лѣтъ «слѣдуетъ развивать память, пользуясь ея временной податливостью», и на стр. 99, гдѣ они подчеркиваютъ, что «общая воспріимчивость памяти неизмѣнна; она не поддается развитію». Гг. Мрочекъ и Филипповичъ возражаютъ, что этихъ утвержденій нельзя выдѣлять изъ общаго текста, и прибавляютъ, что «на стр. 101 сказано ясно: если воспріимчивость памяти неизмѣнна и ограничена, то, очевидно, она не поддается дрессировкѣ дальше извѣстнаго предѣла».

Я же полагаю, что эта послѣдняя цитата только углубляетъ противорѣчіе, вмѣсто того, чтобы его устранить. Если воспріимчивость памяти не поддается развитію дальше извѣстнаго предѣла, то, значитъ, до этого предѣла она поддается развитію (вопреки утвержденію на стр. 99); и позволительно спросить, каковъ же этотъ предѣлъ? Опредѣляется ли онъ возрастомъ или количествомъ упражненій или другими условіями? По этому вопросу нѣтъ никакихъ указаній во всей главѣ.

Авторы добавляютъ: «лицу, знакомому съ психологіей, понятенъ какъ терминъ: общая воспріимчивость, такъ и возможность доразвитія памяти въ періодъ 8—13 лѣтъ».

Лицо, знакомое съ психологіей, конечно, знаетъ, въ какомъ смыслѣ употребляютъ свои термины Мейманъ и другіе психологи, цитируемые авторами «Педагогики математики»; но въ какомъ смыслѣ употребляютъ тѣ же термины гг. Мрочекъ и Филипповичъ, и какъ получаются у нихъ тѣ противорѣчія, которыя были выше отмѣчены, — это мудрено разъяснить, и, пожалуй, они поступили благоразумно, воздержавшись отъ опредѣленнаго отвѣта.

Одно не подлежитъ сомнѣнію: лекціи Меймана они читали столь же невнимательно, какъ и мою рецензію. Въ самомъ дѣлѣ, послѣ подчеркнутаго на стр. 99 принципа: «общая воспріимчивость памяти неизмѣнна, она не поддается развитію» — слѣдуютъ такія строки: «поэтому насильственное упражненіе памяти — великое преступленіе. Каждый запоминаетъ, какъ хочетъ и какъ можетъ». Т. е. наилучшими пріемами запоминанія признаются тѣ, которые выработаютъ сами дѣти, будучи предоставлены самимъ себѣ. А вотъ что читаемъ по тому же вопросу у Меймана (цитирую по нѣмецкому тексту «Vorlesungen zur Einführung in die experimentelle Pädagogik, т. II, стр. 12): «... нѣтъ надобности доказывать, какъ важно разъяснять дѣтямъ, каковы наиболѣе благопріятныя условія заучиванія, и (тѣмъ самымъ) предохранять ихъ отъ нецѣлесообразной траты ихъ времени и силъ и вмѣстѣ съ тѣмъ достигать той выдержки и дисциплинированности ихъ памяти, которая (выдержка) соотвѣтствуетъ ихъ индивидуальной одаренности».

3) Вопросъ объ истолкованіи текста Бореля и аналогичныхъ руководствъ — единственный, въ которомъ я склоненъ удовлетвориться разъясненіемъ моихъ оппонентовъ. Я полагалъ, что слова: «длинный рядъ доказательствъ правила знаковъ», упоминаемыя на стр. 313, относятся ко всѣмъ шестнадцати пунктамъ стр. 302—309 (иначе рядъ получится не длинный, а, скорѣе, короткій); но изъ разъясненія авторовъ видно, что это не такъ, и что они имѣли въ виду дать перечень истолкованій правила знаковъ при умноженіи и не всѣ эти истолкованія относили къ категоріи «доказательствъ». Въ такомъ случаѣ мое замѣчаніе, что авторы плохо поняли эти книги, отпадаетъ. Но считаю умѣстнымъ подчеркнуть, что существенная часть того же пункта рецензіи осталась безъ отвѣта, именно та, гдѣ авторамъ поставленъ мною основной методическій вопросъ: считаютъ ли они цѣлесообразнымъ, чтобы правило знаковъ излагалось догматически, или признаютъ желательнымъ сопровождать его той или иной мотивировкой.

Относительно остальныхъ пунктовъ, на которые гг. Мрочекъ и Филипповичъ представляютъ свои возраженія, они говорятъ такъ: «здѣсь рецензентъ указалъ чисто-математическія, по его мнѣнію, ошибки. Не желая оставить читателей рецензіи въ заблужденіи, будто мы плохіе математики, разсмотримъ вкратцѣ сдѣланныя «критическія замѣчанія».

Плохіе ли математики гг. Мрочекъ и Филипповичъ или хорошіе, я не берусь судить. Можно, вѣдь, написать неудачную книгу о преподаваніи математики и въ то же время обнаруживать способности къ рѣшенію чисто-математическихъ вопросовъ. Но что они не компетентны въ вопросахъ методики математики, это я доказывалъ въ своей рецензіи, да и сейчасъ не вижу причинъ измѣнять свой взглядъ. И всѣ тѣ ошибки, которыя они имѣютъ здѣсь въ виду, чисто методическія. Если имъ кажется, что я трактовалъ эти ошибки, какъ математическія, то не моя въ томъ вина. Но перехожу къ самимъ пунктамъ.

4) Этотъ пунктъ касается «существованія» одного или двухъ видовъ дѣленія. Прежде всего приходится напомнить авторамъ, что ихъ тезисы: «дѣленіе существуетъ только одно, какъ въ наукѣ, такъ и въ жизни...», «именованныхъ чиселъ не существуетъ» — столь же доказательны, какъ и тезисъ: «красныхъ чернилъ не существуетъ, такъ какъ чернила могутъ быть только черныя». Несомнѣнно существуютъ объекты, называемые словами «красныя чернила», «именованныя числа», «дѣленіе на части» и «дѣленіе по содержанію». Совершенно иной вопросъ, цѣлесообразна или не цѣлесообразна такая терминологія. Авторы думаютъ, что нѣтъ; смыслъ моего замѣчанія былъ

таковъ: на извѣстной ступени обученія.—Я добавилъ къ этому, что и при дѣленіи отвлеченныхъ (sic!) чиселъ въ извѣстныхъ случаяхъ удобнѣе и цѣлесообразнѣе представлять себѣ процессъ дѣленія въ формѣ дѣленія по содержанію (напримѣръ, 369 : 123), въ иныхъ же случаяхъ — въ формѣ разложенія дѣлимаго на равныя слагаемыя, т. е. дѣленія на части (219 : 3). Говоря это, я имѣлъ въ виду общеизвѣстный психологическій фактъ: чтобы найти частное 369 : 123, удобнѣе задать вопросъ: сколько разъ нужно взять по 123, чтобы получить 369 (иными словами, отыскать неизвѣстнаго множителя); а при дѣленіи 219 на 3 удобнѣе спросить себя: сколько будетъ, если раздѣлить 21 десятокъ на три части и 9 единицъ на три части и т. д., а не такъ: сколько разъ нужно взять по 3, чтобы получить 219 (т. е. въ этомъ случаѣ удобнѣе представлять неизвѣстное, какъ множимое). Однимъ словомъ, оба сомножителя будучи равноцѣнными съ точки зрѣнія логической, неравноцѣнны съ точки зрѣнія психологической; именно это и упустили изъ виду мои оппоненты.

Конечно, этимъ вопросъ о методикѣ дѣленія не исчерпывается. Естественно спросить, когда же и какъ ознакомить учащихся съ опредѣленіемъ дѣленія, какъ дѣйствія, обратнаго умноженію; но вопроса объ этомъ я не буду разсматривать здѣсь, тѣмъ болѣе, что гг. Мрочекъ и Филипповичъ совершенно не подымаютъ его въ своей книгѣ.

5) По вопросу объ именованныхъ числахъ я цитировалъ категорическое указаніе гг. Мрочека и Филипповича: «никакими этикетками снабжать числа при дѣйствіяхъ надъ ними нельзя» (стр. 224) и указывалъ, что въ противорѣчіи съ этимъ предписаніемъ находится запись на стр. 252: 2 четверти + 3 четверти = 5 четвертей (четвертямъ?).

Авторы возражаютъ, что этотъ примѣръ не противорѣчитъ правилу, такъ какъ слово «четверть» употреблено не въ смыслѣ мѣры сыпучихъ тѣлъ, а въ смыслѣ четвертой доли единицы. Они даже находятъ мой пріемъ критики некорректнымъ. Мнѣ остается только признать ихъ способъ опроверженія нелогическимъ: если «никакими этикетками снабжать числа при дѣйствіяхъ надъ ними нельзя», то въ указанной строчкѣ нельзя писать слово «четверти» ни въ одномъ ни въ другомъ смыслѣ, а равно будутъ незаконны и такія записи: 2 седьмыхъ + 3 седьмыхъ = 5 седьмымъ, 2 сотни + 3 сотни = 5 сотнямъ и т. д. Мало того, если будетъ задана задача: велосипедистъ проѣхалъ первую версту дороги въ 3 мин. 15 сек., а вторую въ 3 мин. 25 сек.; во сколько времени онъ проѣхалъ обѣ версты? — то при существованіи указаннаго предписанія ее будетъ не легко рѣшить. Написать просто: 3 мин. 15 сек. + 3 мин. 25 сек. = 6 мин. 40 сек. — нельзя: «этикетки» упразднены. Остается выразить промежутки времени въ частяхъ минутъ, либо въ секундахъ, но, вѣроятно, никто не назоветъ этого способа упрощеніемъ счета.

6) По вопросу объ опредѣленіи умноженія въ курсѣ дробей авторы пишутъ такое «возраженіе», которое я затрудняюсь изложить своими словами и потому выписываю дословно, съ нѣкоторыми примѣчаніями:

«Рецензентъ находитъ, что опредѣленіе умноженія, предложенное Лакроа, нами понято неправильно: „авторы возстаютъ противъ извѣстнаго опредѣленія умноженія на дробь на томъ основаніи, что оно не подчиняется закону перманентности; откуда это слѣдуетъ, не сказано, да и мудрено было бы это доказать“ (N. B.! гдѣ же я сказалъ, что опредѣленіе понято авторами неправильно? К. Л.). А между тѣмъ самъ г. К. Л. вслѣдъ за этимъ говоритъ: „приведенное опредѣленіе страдаетъ неясностью (способовъ составленія чиселъ изъ единицы можно указать нѣсколько)". Вотъ въ этомъ и заключается „доказательство"! Разъ это опредѣленіе не обнимаетъ собою несоизмѣримыхъ и комплексныхъ чиселъ, значитъ, оно не перманентно». (N. B.! я полагалъ до сихъ поръ, что «неясный» не значитъ «не-перманентный», и потомъ, гдѣ же я говорилъ объ умноженіи несоизмѣримыхъ и комплексныхъ чиселъ? К. Л.).

Попробую разсмотрѣть, точно ли указанное опредѣленіе умноженія не обнимаетъ случая несоизмѣримыхъ и мнимыхъ чиселъ.

Пусть нужно умножить 5 на $\sqrt{3}$; число $\sqrt{3}$ можетъ быть составлено изъ единицы такъ: сперва составлены изъ единицы два безконечныхъ ряда чиселъ, называемыхъ послѣдовательными десятичными приближеніями квадратнаго корня изъ трехъ (т. е. рядъ чиселъ 1,7; 1,73; 1,732; . . ., съ одной стороны, и 1,8; 1,74; 1,733 и т. д., съ другой; законъ образованія этихъ чиселъ извѣстенъ изъ предыдущаго курса математики); затѣмъ опредѣлено то число, для котораго эти два безконечныхъ ряда чиселъ служатъ перемѣнными границами *). Подобнымъ же образомъ нужно поступить и съ числомъ 5: составить изъ него два безконечныхъ ряда чиселъ такъ, какъ числа указанныхъ выше рядовъ составлены изъ единицы (короче говоря, составить ряды произведеній: 5 . 1, 7; 5 . 1, 73; и т. д.; 5 . 1, 8; 5 . 1, 74 и т. д.) и опредѣлить то число, для котораго эти два новыхъ безконечныхъ ряда чиселъ служатъ перемѣнными границами.

Подобнымъ же образомъ, хотя и съ нѣкоторыми усложненіями, можно разсуждать и въ болѣе общемъ случаѣ (напримѣръ, $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$, $\pi \cdot \sqrt{3}$ и т. д).

Разсмотримъ теперь случай умноженія на мнимое число. Предварительно условимся называть числа $+1$, $+i$, -1, $-i$ единицами нулевого, перваго, второго и третьяго направленія; четвертое направленіе условимся считать совпадающимъ съ нулевымъ и т. д.

Пусть теперь нужно умножить $-8i$ на $3i$. Число $3i$ составлено изъ единицы такъ: взята единица и передвинута впередъ на одно направленіе (вмѣсто единицы нулевого направленія получается единица перваго направленія); затѣмъ полученный результатъ взятъ слагаемымъ три раза. Также нужно поступить и съ числомъ $-8i$: восемь единицъ третьяго направленія надо замѣнить восемью единицами четвертаго направленія, т. е. нулевого направленія, и полученный результатъ повторить слагаемымъ три раза. Получаемъ $+24$, какъ оно и слѣдуетъ.

Подобнымъ же образомъ можно разсуждать и въ болѣе сложныхъ случаяхъ (когда множитель имѣетъ видъ $a+bi$).

Такимъ образомъ, мнѣніе гг. Мрочека и Филипповича насчетъ не-перманентности **) опредѣленія не имѣетъ подъ собой почвы. Слѣдуетъ ли отсюда, что я защищаю пригодность этого опредѣленія въ школѣ, хотя бы

*) Смыслъ этихъ терминовъ разъясненъ подробно во 2-й части моего „Курса алгебры", извѣстнаго авторамъ „Педагогики математики".

**) Долженъ сказать, что идею перманентности, принадлежащую, если я не ошибаюсь, Пикоку, я всегда понималъ иначе, чѣмъ ее понимаютъ г. Лебединцевъ и гг. Мрочекъ и Филипповичъ. *Ред.*

при изученіи курса дробей? Нимало. Я и писалъ въ рецензіи, что данное опредѣленіе страдаетъ съ другой стороны, именно оно не обладаетъ должной ясностью. Что разумѣть подъ «способомъ составленія числа изъ единицы»? Если въ точности оговорить предварительно, какой въ каждомъ случаѣ подразумѣвается способъ составленія, то опредѣленіе приводитъ къ желаемой цѣли; если же этого не оговорить, то можетъ быть построенъ рядъ парадоксовъ. Общеизвѣстенъ слѣдующій парадоксъ: пусть дано умножить 5 на $^3/_4$; число $^3/_4$ составлено изъ единицы такъ: взята единица слагаемымъ три раза, затѣмъ та же единица взята слагаемымъ четыре раза и первое число поставлено числителемъ, второе — знаменателемъ. Составляя по этому «способу» новое число изъ 5, получаемъ дробь $^{15}/_{20}$, а не $^{15}/_4$, какъ полагалось бы.

Кромѣ того, я указалъ, что данное опредѣленіе въ данномъ мѣстѣ курса является слишкомъ общимъ. На этотъ тезисъ гг. Мрочекъ и Филипповичъ отзываются ироническимъ непониманіемъ. Но опять же вина въ этомъ непониманіи не на моей сторонѣ. Въ данномъ мѣстѣ курса нужно опредѣлить, что значитъ умножить на дробь; разбираемое же опредѣленіе говоритъ о томъ, что значитъ умножить вообще, какъ на дробь, такъ и на цѣлое. Поэтому, съ методической точки зрѣнія, оно въ данномъ мѣстѣ слишкомъ общее.

Попутно приходится отмѣтить, что мои оппоненты и здѣсь оставили безъ вниманія самый существенный вопросъ: какъ излагать опредѣленіе умноженія: догматически или съ нѣкоторой мотивировкой? Если сказать «просто», какъ они предлагаютъ: произведеніемъ двухъ дробей называется дробь, которая обладаетъ такими-то признаками, то съ методической стороны это выйдетъ отнюдь не просто: придется отвѣчать на вопросъ: съ какой же цѣлью это дѣлается (учащіеся на своемъ языкѣ спросятъ: почему такъ называется?)

7) Въ вопросѣ о несоизмѣримыхъ числахъ я отмѣчалъ разныя методическія несообразности. Выписывать полностью все «возраженіе» авторовъ было бы длинно, поэтому я только разовью свою прежнюю точку зрѣнія немного подробнѣе.

Первая несообразность состоитъ въ томъ, что авторы употребляютъ въ своемъ примѣрѣ обозначеніе «$\sqrt{2}$» въ цѣломъ рядѣ записей и лишь въ концѣ подымаютъ вопросъ, что же собственно значитъ этотъ символъ. Это происходитъ потому, что теорему «квадратъ числа, выражающаго длину гипотенузы, равенъ суммѣ квадратовъ чиселъ, выражающихъ въ тѣхъ же единицахъ длины катетовъ», доказанную раньше для случая соизмѣримыхъ чиселъ, они примѣняютъ безъ оговорокъ и къ данному случаю. Этой ошибки можно, конечно, избѣжать, какъ я и указывалъ въ другомъ мѣстѣ (№№ 513 и 526 — 527 «Вѣстника»).

Вторая несообразность состоитъ въ томъ, что авторы въ своей книгѣ смѣшали изложеніе вопроса о несоизмѣримыхъ квадратныхъ корняхъ съ изложеніемъ общаго вопроса о несоизмѣримыхъ числахъ. Правда, въ своемъ отвѣтѣ на рецензію они эти вопросы раздѣляютъ и говорятъ такъ: «одинъ - два конкретныхъ примѣра даютъ идею о новомъ числѣ», ... «но не всѣ несоизмѣримыя числа выражаются символически въ квадратныхъ радикалахъ, и существованіе особаго класса несоизмѣримыхъ чиселъ должно быть допущено потомъ». Но въ текстѣ книги смыслъ изложенія нѣсколько иной: изложеніе вопроса о длинѣ гипотенузы равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника (иначе говоря, діагонали квадрата) заканчивается непосредственно (безъ красной строки) слѣдующими фразами: «...Слѣдовательно, предположеніе, что $\sqrt{2}$ есть дробное число, невозможно. Остается допустить, что это число особаго рода, пока намъ неизвѣстнаго. Теперь (разрядка моя. К. Л.) выступаетъ на сцену аксіома Кантора; надо показать, что такія числа дѣйствительно возможны, что они соотвѣтствуютъ реальнымъ объектамъ».

Прочитавъ эти строки въ связи съ рѣшеніемъ предыдущей задачи, всякій читатель скажетъ, что нѣтъ надобности доказывать соотвѣтствіе несоизмѣримаго числа $\sqrt{2}$ реальному объекту, если объ этомъ реальномъ объектѣ только-что была рѣчь, и что въ данномъ случаѣ аксіома Кантора совершенно неумѣстна. Таковъ былъ смыслъ и моего замѣчанія. Авторы возражаютъ, что существованіе особаго класса несоизмѣримыхъ чиселъ должно быть допущено потомъ; но въ этомъ все дѣло: и аксіома Кантора будетъ умѣстна и цѣлесообразна потомъ. А между этими теперь и потомъ можетъ лежать большой промежутокъ времени.

Въ концѣ своего письма гг. Мрочекъ и Филипповичъ восклицаютъ: «мы не можемъ согласиться съ дважды высказаннымъ заявленіемъ рецензента, будто все это извѣстно русскимъ педагогамъ уже давно». Но позволю себѣ спросить: гдѣ же въ моей рецензіи все это сказано? Я указывалъ что по вопросу объ именованныхъ числахъ и по вопросу о періодическихъ дробяхъ и о задачахъ на такъ называемыя «правила» въ книгѣ авторовъ не сообщается ничего существенно новаго для русскихъ педагоговъ, и не вижу основаній отказываться отъ этого мнѣнія. Да и авторы должны были бы знать, что еще въ задачникѣ Гольденберга (для среднихъ учебныхъ заведеній) были упразднены какъ особые отдѣлы о дѣйствіяхъ надъ составными именованными числами, такъ и отдѣлъ о періодическихъ дробяхъ и отдѣлъ спеціальныхъ задачъ на «правила». А относительно того изложеннаго въ книгѣ авторовъ, что неизвѣстно еще широкимъ кругамъ русскихъ педагоговъ, я выразилъ такое мнѣніе: «въ книгѣ высказано много такихъ мыслей о преподаваніи математики, подъ которыми подпишется всякій сторонникъ реформы. Но это какъ разъ тѣ мысли, которыя не принадлежатъ авторамъ книги и лучше знакомиться съ ними по первоисточникамъ».

Пора подвести итоги. Русское учительство, къ которому взываютъ гг. Мрочекъ и Филипповичъ въ концѣ своего письма, сумѣетъ, конечно, «само разобраться и отличить хорошее новое» не только отъ «сквернаго стараго», но и отъ плохого новаго или отъ стараго подъ новыми этикетками. Въ частности и я, какъ одинъ изъ русскихъ учителей, посильно выполнялъ указанную задачу въ своей рецензіи и въ этомъ письмѣ. «Ошибки при новыхъ выступленіяхъ неизбѣжны», и всякій имѣетъ право ихъ совершать, но гг. Мрочекъ и Филипповичъ безмѣрно злоупотребляютъ этимъ правомъ. И при томъ они не должны бы забывать, что въ самомъ предисловіи къ своей книгѣ они лишили себя права на читательское снисхожденіе. «Этому движенію» (въ пользу реформы), писали они, «недостаетъ литературы, недостаетъ знамени. Цѣль настоящей книги — заполнить эти пробѣлы...». Въ исторіи педагогики всякій можетъ указать труды, которые открывали собой новую эру и становились ея знаменемъ; но когда сами авторы въ предисловіи объявляютъ себя знаменосцами новаго теченія, то этимъ они обнаруживаютъ только безграничную самоувѣренность. Въ рецензіи я старался показать, что эта самоувѣнность недостаточно обоснована, и что книга не достигаетъ не только той необычайной цѣли, которую она себѣ ставитъ, но и той болѣе скромной, но все же высокой, цѣли, которой она могла бы достигнуть при болѣе тщательномъ отношеніи къ дѣлу авторовъ.

Въ заключеніе своего письма авторы восклицаютъ: «пусть ошибаемся мы, пусть въ подобныхъ исканіяхъ ошибаются другіе, но эти ошибки указываютъ путь и облегчаютъ работу новымъ поколѣніямъ».

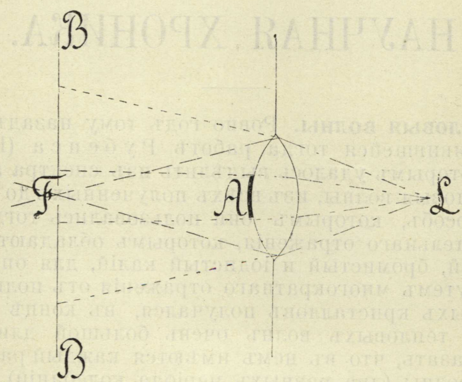
Имѣю смѣлостъ думать, что ошибки, каковы бы онѣ ни были, только сбиваютъ съ пути, а указываетъ путь и облегчаетъ работу современникамъ (а иногда и новымъ поколѣніямъ) критика этихъ ошибокъ, хотя бы требовательная и суровая. И она должна исполнять свое дѣло, какими бы высокими словами ни прикрывались ошибающіеся.

К. Лебединцевъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Длинныя тепловыя волны. Ровно годъ тому назадъ въ этомъ отдѣлѣ мы сообщили о появившейся тогда работѣ Рубенса (Rubens) и Голнагеля (Hollnagel), которымъ удалось выдѣлить изъ спектра ауэровской горѣлки самыя длинныя тепловыя волны, изъ всѣхъ полученныхъ до сихъ поръ. Вкратцѣ напомнимъ, что способъ, которымъ они пользовались тогда, былъ основанъ на свойствѣ избирательнаго отраженія, которымъ обладаютъ нѣкоторыя соли, а именно: хлористый, бромистый и іодистый калій, для опредѣленныхъ очень длинныхъ волнъ. Путемъ многократнаго отраженія отъ полированныхъ поверхностей изъ названныхъ кристалловъ получался, въ концѣ концовъ, лучъ, состоящій изъ однѣхъ тепловыхъ волнъ очень большой длины. Экспериментаторамъ удалось доказать, что въ немъ имѣются каждый разъ не больше, чѣмъ двѣ элементарныя волны (два разныхъ періода колебаній), при чемъ средняя длина волны была наибольшая при отраженіи отъ іодистаго калія и равнялась 96 μ, т. е. почти $^1/_{10}$ *мм.*

Теперь опубликована новая работа того же Рубенса, сдѣланная совмѣстно съ Вудомъ (R. W. Wood), гдѣ для выдѣленія тепловыхъ волнъ той же и еще большей длины употребленъ новый изящный методъ: волны эти получаются простымъ примѣненіемъ кварцевой линзы. Дѣло въ томъ, что кварцъ поглощаетъ значительную часть тепловыхъ лучей, въ то же время пропуская, однако, какъ болѣе короткія свѣтовыя волны, такъ и тѣ болѣе длинныя тепловыя, которыя было желательно изолировать. Для волнъ короткихъ, лежащихъ по одну сторону области абсорпціи, кварцъ обладаетъ показателемъ преломленія отъ 1,55 до 1,43; для волнъ же очень длинныхъ, по другую сторону области абсорпціи, показатель преломленія имѣетъ величину 2,19 2,14, соотвѣтствующую тому его значенію, которое получается изъ діэлектрической постоянной кварца. (Діэлектрическая постоянная, какъ извѣстно, равна квадрату показателя преломленія для очень длинныхъ волнъ). Благодаря такой большой разницѣ въ показателѣ преломленія для пропускаемыхъ кварцемъ короткихъ и длинныхъ волнъ, возможно пользоваться кварцевыми линзами, послѣ прохода черезъ которыя лучи короткой длины волны еще оставались бы расходящимися, въ то время какъ лучи большой длины волны, обладая большимъ показателемъ преломленія, уже конвергировали бы. Дивергирующіе короткіе лучи могутъ въ такомъ случаѣ быть задержаны ширмами, а длинныя волны пропускаются и падаютъ пучкомъ на служащіе для ихъ изслѣ дованія интерферометръ и радіометръ. Такая кварцевая линза изображена на фигурѣ. L обозначаетъ источникъ лучей (діафрагма, освѣщенная ауэровской горѣлкой). Для задержки расходящихся лучей малой длины волны, поскольку они проходятъ черезъ линзу подальше отъ центра ея, служитъ металлическая ширма BB. Сходящіеся лучи (длинные тепловые) проходятъ черезъ діафрагму этой ширмы F. Та же часть расходящихся лучей, которая, проходя черезъ центральную часть линзы, могла бы, несмотря на свое расхожденіе, прямо пройти черезъ F, задерживается второй ширмой A, покрывающей именно самую центральную часть линзы. Такимъ образомъ, достигается, что черезъ F проходятъ дѣйствительно, только тѣ лучи, которые конвергируютъ, т. е. длинные тепловые. Очистка длинныхъ лучей отъ всякой примѣси короткихъ должна, однако, быть очень совершенной, такъ какъ короткіе лучи обладаютъ гораздо большей — во много тысячъ разъ большей — энергіей чѣмъ длинные, и поэтому уже ничтожнаго количества ихъ было бы достаточно, чтобы заслонить дѣйствіе длинныхъ волнъ. Поэтому послѣ прохода черезъ первую линзу Рубенсъ и Вудъ заставляли полученный пучекъ проходить еще черезъ вторую такую же линзу съ ширмами. Такой двойной фильтровки лучей оказалось достаточно. Полученный пучекъ длинныхъ волнъ, по сравненію съ лучами, добытыми годъ тому назадъ методомъ избирательнаго отраженія, отличался значительно большей энергіей. Подвергался онъ тому же



самому изслѣдованію, которое было произведено въ прошлогодней работѣ. Онъ проходилъ черезъ интерферометръ, состоящій изъ двухъ тонкихъ кварцевыхъ пластинокъ, между которыми находился слой воздуха. Часть лучей проходитъ прямо черезъ обѣ пластинки, другая часть только послѣ отраженій между пластинками; между этими частями происходитъ интерференція. Разстояніе между пластинками (слой воздуха) можно варіировать. Въ радіометрѣ (термоэлементѣ) получаются максимумы дѣйствія прошедшаго черезъ интерферометръ пучка, если разстояніе между пластинками интерферометра будетъ равно цѣлому кратному полуволны; между двумя максимумами расположенъ минимумъ дѣйствія. Откладывая, слѣдовательно, по оси ординатъ показанія радіометра, по оси абсциссъ — разстоянія пластинокъ интерферометра, мы получимъ волнообразную кривую, которая была бы синусоидальной, если бы мы имѣли дѣло съ лучемъ только одной длины волны. Въ прошлогоднихъ опытахъ съ избирательнымъ отраженіемъ полученныя кривыя соотвѣтствовали двумъ синусоидальнымъ кривымъ разной амплитуды, наложеннымъ другъ на друга. Пучекъ же, выдѣленный теперь при помощи линзъ, далъ много болѣе сложную кривую. Въ этомъ пучкѣ вѣдь представлены всѣ длинныя волны, поскольку онѣ не поглощаются кварцемъ. Онѣ заключены между двумя предѣлами: съ одной стороны, для болѣе короткихъ волнъ—быстро возрастающее поглощеніе кварца, съ другой, для болѣе длинныхъ волнъ — быстрая убыль энергіи, выпадающей при излученіи ауэровской горѣлки на ихъ долю. Анализъ полученной кривой привелъ къ результату, что максимумъ дѣйствія оказывается лучами пучка, обладающими длиной волны около 100 μ или $^1/_{10}$ *мм.*, — слѣдовательно, приблизительно тѣми лучами, которые получаются при избирательномъ отраженіи отъ іодистаго калія. Но замѣтно еще дѣйствіе волнъ вплоть до длины 200 μ или $^1/_5$ *мм.* Надо такимъ образомъ считать, что въ настоящее время, хотя и не въ чистомъ видѣ, но все-таки наблюдались уже тепловые лучи длиной волны въ $^1/_5$ *мм.*, т. е. длиной въ 1000 разъ большей, чѣмъ длины волнъ ультрафіолетоваго спектра и лишь въ 20-30 разъ меньшей самыхъ короткихъ полученныхъ до сихъ поръ электрическихъ (герцевскихъ) волнъ.

А. Іоллосъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 384 (5 сер.). Выразить сумму

$$s=\frac{1}{\sin x\sin y}+\frac{1}{\sin y\sin z}+\cdots+\frac{1}{\sin t\sin u}+\frac{1}{\sin u\sin v},$$

въ которой $x, y, z, \ldots, t, u, v$ суть послѣдовательные члены ариѳметической прогрессіи, черезъ x, v и z.

Р. Витвинскій (Одесса).

№ 385 (5 сер.). Доказать, что наибольшее цѣлое число, заключающееся въ выраженіи

$$(5+\sqrt{21})^n+1,$$

гдѣ n — цѣлое положительное число, дѣлится на 2^n.

Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 386 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^8+2x^7-x^6-5x^5-x^4+2x^3+4x^2-x-1=0$$

А. Д. (Лодзь).

№ 387 (5 сер.) Найти предѣлъ, къ которому стремится выраженіе

$$\frac{\sec x + \operatorname{cosec} x - \cos x - \cot g x}{x},$$

если x стремится къ предѣлу, равному нулю.

А. Фрумкинъ (Одесса).

№ 388 (5 сер.). Доказать, что при всякомъ цѣломъ четномъ значеніи а число

$$a\,[16\,(16a^4 - 91) - 5a\,(a^2 - 1)]$$

дѣлится на 60

Р. Боколяръ (Воронежъ).

№ 389 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^2 - xy + 2y + 3 = 0.$$

$$xy - y^2 + 4x + 6 = 0.$$

(Заимств.).

ОПЕЧАТКА.

Въ условіи задачи № 379, помѣщенной въ № 530 „Вѣстника", слѣдуетъ исправить слѣдующую опечатку:

Вмѣсто $52\,(x+1)^3$ должно быть $52x^3\,(x+1)^3$.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 260 (5 сер.). *Доказать, что произведеніе* xyz *цѣлыхъ чиселъ* x, y, z *дѣлится на* 60, *если*

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Если x или y кратно 3, то и произведеніе xyz кратно 3. Пусть теперь ни x ни y не кратно 3; тогда $x = 3u \pm 1$, $y = 3v \pm 1$, гдѣ u и v — числа цѣлыя, а потому

$$z^2 = x^2 + y^2 = (3u \pm 1)^2 + (3v \pm 1)^2 = 9u^2 \pm 6u + 9v^2 \pm 6v + 2 = 3t + 2, \quad (1)$$

гдѣ t — нѣкоторое цѣлое число. Но всякій точный квадратъ z^2 при дѣленіи на 3 даетъ въ остаткѣ 0 или 1: дѣйствительно, если z кратно 3, то z^2

даетъ при дѣленіи на 3 остатокъ нуль, а если z не кратно 3, то $z = 3a \pm 1$ (a — цѣлое число), откуда $z^2 = 9a^2 \pm 6a + 1$, такъ что z^2 при дѣленіи на 3 даетъ въ остаткѣ 1. Поэтому равенство (1) при z цѣломъ невозможно, такъ какъ при дѣленіи числа z^2 на 3 мы должны получить, согласно съ этимъ равенствомъ, въ остаткѣ 2. Итакъ, нельзя предположить, что x и y одновременно не кратны 3; слѣдовательно, произведеніе xyz кратно 3. Если x или y кратно 5, то и произведеніе xyz кратно 5. Пусть теперь ни x ни y не кратно 5. Замѣтимъ прежде всего, что всякій точный квадратъ при дѣленіи на 5 можетъ дать лишь остатки 0, 1, 4; это выводится непосредственно изъ того, что всякое число, не кратное 5, есть число вида $5b \pm 1$ или $5b \pm 2$, а потому квадраты чиселъ, не кратныхъ 5, имѣютъ видъ:

$$(5b \pm 1)^2 = 5B + 1, \quad (5b \pm 2)^2 = 5C + 4,$$

гдѣ B и C суть надлежащія цѣлыя числа. Итакъ, если x и y одновременно не кратны 5, то либо x^2 и y^2 суть оба числа вида $5k + 1$ (k — цѣлое число), либо оба вида $5k + 4$, либо одно изъ чиселъ x^2 и y^2 имѣетъ видъ $5k + 1$, а другое $5k' + 4$; но въ первомъ случаѣ сумма $x^2 + y^2$ давала бы при дѣленіи на 5 остатокъ 2, а во второмъ — остатокъ 3 (отъ дѣленія суммы $4 + 4$ на 5), что невозможно, такъ какъ $x^2 + y^2$ есть по условію точный квадратъ. Остается допустить, что $z^2 = x^2 + y^2 = 5k + 1 + 5k' + 4 = 5(k + k' + 1)$; но тогда z^2, а потому и z кратно 5. Итакъ, изъ трехъ чиселъ x, y, z, при условіи $x^2 + y^2 = z^2$, одно всегда кратно 5, а потому и произведеніе xyz кратно 5. Если каждое изъ чиселъ x, y четно, то произведеніе xyz кратно 4. Если лишь одно изъ разсматриваемыхъ чиселъ x и y четно, то оно кратно 4. Дѣйствительно, если, напримѣръ, x четно, а y нечетно, то изъ равенства $x^2 + y^2 = z^2$ мы видимъ, что z также нечетно. Такъ какъ $x^2 = z^2 - y^2$, а z и y нечетны, то

$$x^2 = (2l + 1)^2 - (2p + 1)^2 = 4l^2 + 4l - 4p^2 - 4p = 4l(l + 1) - 4p(p + 1), \qquad (2)$$

гдѣ l и p — числа цѣлыя. Но произведенія $l(l + 1)$ и $p(p + 1)$ двухъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ четны, а потому [см. (2)] x^2 кратно 8 и, слѣдовательно, x навѣрно кратно 4. Итакъ, если лишь одно изъ чиселъ x, y четно, то оно кратно 4, а потому и произведеніе xyz кратно 4. Наконецъ, x и y не могутъ быть одновременно нечетны, такъ какъ тогда мы имѣли бы:

$$z^2 = x^2 + y^2 = (2l + 1)^2 + (4p + 1)^2 = 4[l(l + 1) + p(p + 1)] + 2 =$$

$$= 2[2(l^2 + l + p^2 + p) + 1],$$

откуда вытекало бы, что z^2 четно, но не кратно 4, что невозможно. Изъ всего сказаннаго видно, что произведеніе xyz разсматриваемыхъ чиселъ всегда кратно 4. Дѣлясь на попарно взаимно простыя числа 3, 4, 5, произведеніе xyz дѣлится и на произведеніе $3 . 4 . 5 = 60$.

Замѣчаніе. Задачу можно также рѣшить, опираясь на извѣстныя формулы рѣшенія уравненія $x^2 + y^2 = z^2$ въ цѣлыхъ числахъ, а именно:

$$x = \frac{m^2 - n^2}{2}, \quad y = mn, \quad z = \frac{m^2 + n^2}{2},$$

гдѣ m и n — числа цѣлыя.

И. Чижевскій (Александрія); *А. Фрумкинъ* (Одесса); *А. Доминикевичъ* (Лодзь); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *А. Масловъ* (Москва); *М. Великановъ* (Красноярскъ); *А. Фельдманъ* (Одесса); *Г. Пистракъ* (Лодзь); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *Г. Варкентинъ* (Бердянскъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Н. Доброгаевъ* (Тульчинъ); *А. Ниппа* (с. Иванино); *Р. Витвинскій* (Одесса).

№ 266 (5 сер.). *Доказать, что*

$$\operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C =$$

$$= \frac{1}{abc}\left(\frac{c}{\cos B}+\frac{b}{\cos C}-a\right)\left(\frac{a}{\cos C}+\frac{c}{\cos A}-b\right)\left(\frac{b}{\cos A}+\frac{a}{\cos B}-c\right),$$

гдѣ a, b, c, A, B, C — *стороны и соотвѣтственно противолежащіе углы нѣкотораго треугольника.*

Записавъ правую часть подлежащаго доказательству равенства въ видѣ

$$\left(\frac{c\cos C+b\cos B}{a\cos B\cos C}-1\right)\left(\frac{a\cos A+c\cos C}{b\cos C\cos A}-1\right)\left(\frac{b\cos B+a\cos A}{c\cos A\cos B}-1\right), \quad (1)$$

преобразовываемъ перваго изъ множителей, стоящихъ въ скобкахъ, слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{c\cos C+b\cos B}{a\cos B\cos C}-1=\frac{\sin C\cos C+\sin B\cos B}{\sin A\cos B\cos C}-1=$$

$$=\frac{\sin 2C+\sin 2B}{2\sin A\cos B\cos C}-1=\frac{2\sin(B+C)\cos(B-C)}{2\sin A\cos B\cos C}-1.$$

Но въ треугольникѣ $\sin(B+C)=\sin A$, а потому

$$\frac{c\cos C+b\cos B}{a\cos B\cos C}=\frac{2\sin A\cos(B-C)}{2\sin A\cos B\cos C}-1=\frac{\cos(B-C)-\cos B\cos C}{\cos B\cos C}=$$

$$=\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}=\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C.$$

Преобразовавъ аналогичнымъ образомъ два другихъ множителя выраженія (1), получимъ:

$$\frac{1}{abc}\left(\frac{c}{\cos B}+\frac{b}{\cos C}-a\right)\left(\frac{a}{\cos C}+\frac{c}{\cos A}-b\right)\left(\frac{b}{\cos A}+\frac{a}{\cos B}-c\right)=$$

$$=(\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C)(\operatorname{tg} C\operatorname{tg} A)(\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B)=\operatorname{tg}^2 A\operatorname{tg}^2 B\operatorname{tg}^2 C.$$

А. Масловъ (Москва); *И. Чижевскій* (Александрія); *Н. Howsepheanz* (Владикавказъ); *И. Лурье* (Смоленскъ); *А. Фельдманъ* (Одесса); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *В. Моргулевъ* (Одесса); *С. Львовъ* (Тула); *Г. Варкентинъ* (Бердянскъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Е. Бабицкій* (Минскъ); *N. N.*; *Н. Доброгаевъ* (Тульчинъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библіографическій отдѣлъ: обзоръ спеціальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн. город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1910 г.

43-ій семестръ.

Г. Пуанкаре. Новая механика. — *П. Флоровъ.* Способъ вычисленія отношенія окружности къ діаметру съ пятью десятичными знаками, пригодный для преподаванія въ среднихъ школахъ.— *И. Мессершмидтъ.* Марсъ и Сатурнъ. — *П. Лоуэль.* Марсъ. — *С. Виноградовъ.* Развитіе понятія о числѣ въ его исторіи и въ школѣ.— *Е. Григорьевъ.* О разложеніи въ ряды функцій sin x и cos x.— Проф. *Д. Синцовъ* Къ вопросу о преподаваніи математики. Я. Штейнеръ, какъ преподаватель— *Г. Урбэнъ.* Являются ли основные законы химіи точными или же лишь приближенными. — *Е. Смирновъ.* Объ ирраціональныхъ числахъ. — *П. Ренаръ.* Авіація, какъ спортъ и наука. — Проф. *О. Лоджъ.* Міровой эѳиръ. — *К. Лебединцевъ.* Понятіе объ ирраціональномъ числѣ въ курсѣ средней школы. — *Э. Кроммелинъ.* Происхожденіе и природа кометъ. — *А. Филипповъ.* Дѣйствія съ періодическими дробями. — Прив.-доц. *В. Бобынинъ.* Естественные и искусственные пути возстановленія историками математики древнихъ доказательствъ и выводовъ

44-ый семестръ.

О построеніяхъ, производимыхъ циркулемъ и линейкой. *Прив.-доц. С. О. Шатуновскаго.* О биссектрисахъ треугольника. *Н. Извольскаго.* О четырехугольникѣ, имѣющемъ при данныхъ сторонахъ наибольшую площадь. *Проф. Б. К. Млодзѣевскаго.* Практическія занятія по физикѣ въ германской средней школѣ. *К. Иванова.* Замѣтка по вопросу о трисекціи угла. *Проф. Д. Синцова.* Нѣкоторыя свойства вращающагося твердаго тѣла. *Н. Васильева.* Броуновское движеніе. *А. Іоллоса.* Дѣленіе на 9. *А. Филиппова.* Объ ирраціональныхъ числахъ. *Е. Смирнова.* Основы безпроволочной телеграфіи. *Л. Мандельштама и Н. Папаллекси.* О биссектрисахъ треугольника. *Е. Томашевича.* О геометрическихъ построеніяхъ съ помощью линейки при условіи, что дана неизмѣнная дуга круга съ центромъ. *Проф. Д. Мордухай-Болтовского.* Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію. *М. Планка.* Генезисъ минераловъ. *Г. Е. Бѣкке.* Еще къ вопросу объ ирраціональныхъ числахъ. *К. Лебединцева.* Приближенное рѣшеніе задачи объ удвоеніи куба. *Прив.-доц. А. А. Дмитровскаго.* Причина землетрясеній, горообразованія и родственныхъ явленій. *Т. Арльта.*

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.**