Обложка
ищется

Обложка
пщется

XLVII Сем. № 11—12.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 563—564.

Къ реформѣ преподаванія математики въ средней школѣ.

III.

О согласованіи программъ средней и высшей школы.

Проф. Д. Синцова.

Докладъ, предположенный къ чтенію на I-мъ Всероссійскомъ Съѣздѣ Преподавателей Математики.

Вопросъ о согласованіи программъ школы средней и школы высшей можно понимать въ широкомъ смыслѣ и въ смыслѣ болѣе узкомъ. Въ широкомъ смыслѣ его можно понимать, какъ вопросъ о взаимномъ отношеніи школы высшей и школы средней,— какъ вопросъ о томъ, что сдѣлать, чтобы были соблюдены оба основныхъ требованія: 1) средняя школа должна давать законченное образованіе, 2) средняя школа должна подготовлять къ высшей.

Если стать на эту точку зрѣнія, то вопросъ расширится далеко за предѣлы простого сравнительно вопроса о преподаваніи математики и, конечно, тогда долженъ быть взятъ во всей широтѣ: постановка учебнаго дѣла должна быть такова, чтобы начинающему учиться была обезпечена возможность пойти такъ далеко, какъ это только допускаютъ его способности и насколько позволяютъ его жизненныя условія. Только тогда, когда каждому Ломоносову обезпечена будетъ возможность дойти до Академіи Наукъ и каждому, вынужденному оставлять образованіе на томъ или другомъ этапѣ, пройденный путь будетъ давать достаточное общее образованіе, школьное преподаваніе будетъ доставлять наибольшую пользу всѣмъ воспитанникамъ. Этой цѣли наша система, конечно, отвѣчаетъ лишь въ весьма слабой степени. Къ ней стремятся въ странахъ передовыхъ, напримѣръ, во Франціи. Несомнѣнно, только такая система отвѣчаетъ интересамъ и потребностямъ страны, въ особенности, такой страны, какъ Россія. Возможность для лучшихъ учениковъ низшей школы продолжать образованіе въ средней, раздѣленіе средней школы на два цикла, дающіе каждый законченное образованіе, сокращеніе курса классической гимназіи на 1 годъ и обращеніе 8-го класса въ дополнительный, (можетъ быть, прибавка въ реальныхъ училищахъ одного года для уравненія тѣхъ и другихъ въ ихъ общемъ образованіи) — эта, такъ сказать, французская система встрѣтитъ, конечно, не менѣе противниковъ, чѣмъ сторонниковъ, и можетъ быть удобнѣе на этомъ I-омъ Съѣздѣ не тратить времени на дебаты, а избрать Коммиссію, которая подготовила бы по этому вопросу докладъ къ слѣдующему Съѣзду.

Перехожу къ болѣе узкой постановкѣ вопроса, насколько и какъ возможно согласовать курсъ средней и высшей школы, не производя коренной ломки существующаго школьнаго строя, — чего возможно достигнуть путемъ измѣненія программъ и методовъ преподаванія.

Представитель высшей школы скажетъ вамъ, что согласованіе есть и теперь, но это согласованіе такъ сказать вынужденное: высшая школа получаетъ извѣстный матеріалъ, студенты являются съ извѣстной подготовкой. Мы принимаемъ ихъ такими, каковы они есть, и соотвѣтственно этому строимъ свои программы. Но и при условіи, что курсы математики, читаемые студентамъ 1-го семестра, не предполагаютъ никакихъ знаній сверхъ тѣхъ, которыя значатся въ утвержденныхъ программахъ, наши курсы не всегда оказываются понятными. Не всегда поступающіе въ университетъ даже на математическій факультетъ знаютъ хорошо элементарную математику. По личному опыту я убѣдился, что изъ 100 поступающихъ на 1-й курсъ на второй переходятъ, или, вѣрнѣе, остаются на 2-ой годъ на математическомъ отдѣленіи не свыше 60. Для 40 человѣкъ изъ 100 этотъ первый годъ оказывается въ значительной степени потеряннымъ. А если оцѣнивать въ 600 руб. стоимость этого года (если принять въ разсчетъ и то, что затрачивается на каждаго учащагося въ высшемъ учебномъ заведеніи, государствомъ, то надо цифру эту удвоить); это дастъ на 100 студентовъ потерю въ 24 000 руб. Считая въ Петербургѣ 800, Москвѣ 600, Кіевѣ 300, Одессѣ, Казани, Харьковѣ, Юрьевѣ, Варшавѣ по 100, это дастъ 2200 поступающихъ и, слѣдовательно, матеріальную потерю около 500000 руб. Не поддается оцѣнкѣ психологическое значеніе этой потери.

Отчего же это происходитъ? Здѣсь, конечно, не столь существенно, что студенты, даже бывшіе хорошими учениками, обыкновенно не помнятъ именно тѣхъ формулъ и соотношеній, которыя нужны намъ, въ высшей математикѣ, напримѣръ, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

Важнѣе отсутствіе геометрическаго воображенія. Въ плоскихъ чертежахъ и фигурахъ студенты еще болѣе или менѣе разбираются, но пространственныя формы всегда представляютъ для нихъ камень преткновенія. Но я бы сказалъ, что еще болѣе существенное значеніе имѣетъ полное отсутствіе представленія о томъ, что такое высшая математика, благодаря полной разобщенности и даже извѣстному антагонизму средней и высшей школы.

Какъ часто такъ называемые хорошіе математики средней школы, переходя черезъ порогъ университета, разочаровываются въ себѣ и въ математикѣ вообще. Вину за это нельзя возлагать на одну высшую школу: рѣзкость перехода должна быть сглажена съ обѣихъ сторонъ. Разгруженіе 1-го курса, можетъ быть, — нѣкоторый контроль за занятіями студентовъ (во Франціи въ университетѣ существуютъ спрашиванія — interrogations), введеніе нѣкоторыхъ курсовъ, которые служили бы соединительнымъ звеномъ между средней и высшей школой, какъ то—введеніе въ анализъ, избранныя главы элементарной геометріи, какъ введеніе въ геометрію, исторія математики, преимущественно элементарной — это во власти высшей школы и можетъ быть ею сдѣлано (я говорю объ университетѣ). Но часть переработки въ сторону взаимнаго объединенія должна взять на себя и средняя школа. Она должна сдѣлать шагъ къ сближенію съ высшей школой и согласиться на расширеніе своихъ программъ. Разграниченіе элементарной, или низшей математики, и неэлементарной, или высшей, чисто искусственно; историкъ математики скажетъ вамъ, господа, что было время, когда ваша элементарная математика была высшей, такой высшей, что даже умноженіе цѣлыхъ чиселъ считалось доступнымъ только мудрецамъ. И не дѣтскимъ занятіемъ было изученіе „Началъ Евклидовыхъ". И легче они, конечно, не стали отъ того, что ихъ начинаютъ изучать не въ 18, а въ 14 лѣтъ. Въ исторіи вы не ограничиваете программы сверженіемъ Ромула-Августула, въ физикѣ не находите нужнымъ сообщать ученіе о теплородѣ, въ исторіи словесности русская литература не заканчивается на Тредьяковскомъ. Только въ математикѣ ставятся границы доступнаго дѣтскому и юношескому уму тамъ, гдѣ начинается новая исторія математики. Только въ древнихъ языкахъ, языкахъ мертвыхъ, отбрасывается, какъ недостойное изученія, то, что написано послѣ золотого вѣка римской или греческой литературы. Но тамъ вѣдь наступилъ упадокъ, тамъ подъ вліяніемъ напора варваровъ произошло постепенное паденіе культуры, мѣсто изящной прозы и поэзіи заняла кухонная латынь. Этого нѣтъ въ исторіи математики. Не упадокъ ея начинается съ Декарта, Лейбница и Ньютона, а новая жизнь, имѣющая корень въ старой, не выбрасывающая старой за бортъ, а оживляющая и оплодотворяющая ее новыми идеями. Но школа консервативна. Отъ абака и дѣйствій съ нимъ мы почти отказались, — мы отправили его въ приготовительный классъ, гдѣ господа преподаватели приготовительнаго класса и обучаютъ дѣтишекъ искусству дѣйствій на счетахъ. Но сколько еще осталось дорогихъ покойниковъ въ курсѣ средней школы. Дорогого сердцу Магницкаго „гусинаго“ и „дѣвичьяго“ правила уже нѣтъ ни въ одномъ русскомъ учебникѣ; но когда 35 лѣтъ назадъ я покупалъ ариѳметику Малинина и Буренина нашъ учитель еще заставлялъ насъ вычеркивать напечатанное въ ней всѣми буквами „цѣпное правило“. Теперь его можетъ быть нѣтъ — не знаю; можетъ быть оно перешло въ курсъ коммерческой ариѳметики и заняло тамъ почетное мѣсто.

Надо сказать, что мы, математики, очень грѣшимъ тѣмъ, что совершенно не занимаемся этимъ отдѣломъ, который разроссся чуть ли не въ цѣлую науку. Но этого мало.

Когда мы въ небольшомъ кружкѣ готовились къ Съѣзду и толковали о предстоящихъ докладахъ, намъ рисовалась возможность цѣлаго ряда докладовъ, обосновывающихъ то или другое сокращенiе, казавшееся, можетъ быть, намъ самимъ нѣсколько смѣлымъ. Но когда я сталъ просматривать затѣмъ отчеты французской коммиссiи по преподаванiю математики, я убѣдился, что то, о чемъ мы только мечтали, во Францiи уже принято. Вотъ что говоритъ Guitton, prof. au Lycée-Henri IV въ Парижѣ въ своей статьѣ „Rapport sur l'algèbre“ во II томѣ „Rapport de la Sous-Commisson française de la Commisson Internationale de l'Enseignement Mathématique“, посвященномъ среднему образованiю: „Такъ какъ главная трудность въ обученiи алгебры заключается въ прiученiи къ буквенному счету, то чѣмъ раньше его начинать, тѣмъ лучше. Въ 5 классѣ (т. е. русскомъ 2-мъ) изучаютъ дѣйствiя надъ числами; изображая ихъ буквами, переводятъ на языкъ формулъ найденныя правила; дальнѣйшее обученiе покажетъ перманентность этихъ формулъ.

Начинаютъ со свойствъ суммы; позднѣе скажутъ, что сложенiе есть операцiя коммутативная и ассоцiативная. Потомъ являются правила сложенiя, вычитанiя или умноженiя суммы; приложенiе представляетъ разложенiе квадрата суммы. Наконецъ произведенiя многочленовъ и возвышенiе въ степень доставляютъ новыя формулы, съ которыми приходится повторно встрѣчаться въ теченiе всего хода занятiй. Ученики уже здѣсь въ состоянiи разрѣшать уравненiя I-ой степени съ цѣлыми коэффицiентами, лишь бы рѣшенiя были цѣлыя и не приходилось встрѣчаться съ невозможными вычитанiями. Позднѣе они будутъ рѣшать подобные вопросы механическими прiемами; но на первой стадiи обученiя нужно подтверждать правило, каждый разъ, какъ мы его примѣняемъ. Когда ученикъ написалъ уравненiя задачи, онъ далъ только осязательный образъ условiй задачи. Онъ можетъ тотчасъ же естественными прiемами получить изъ нихъ рѣшенiе. Метода настолько проста, что для того, чтобы сдѣлать труднѣе нѣкоторые экзамены, на которыхъ фигурируютъ ариѳметическiе вопросы, допускаютъ только „ариѳметическiя“ рѣшенiя, какъ будто мы выходимъ изъ области ариѳметики, изображая число буквою. Когда нельзя употреблять буквъ, простыя задачи становятся часто настоящими головоломками и требуютъ отъ кандидатовъ продолжительной тренировки: ихъ время могло бы быть употреблено болѣе полезнымъ образомъ“.

И принято это не гдѣ нибудь, а именно во Франціи, гдѣ преподаванiе математики стоитъ высоко, настолько высоко, что даже нѣмцы, при всемъ ихъ, можно сказать, шовинизмѣ, все же говорятъ: „In der Mathematik sind uns die Franzosen überlegen". И я полагаю, что тѣ измѣненія, то взаимное проникновеніе и сліяніе, о которомъ говоритъ Guitton, вполнѣ осуществимо и сбережетъ массу времени и силъ. Надо раздѣлить ариѳметику на двѣ части: практическую ариѳметику и ариѳметику теоретическую, и въ младшихъ классахъ сохранить только первую. Алгебраическія обозначенія вводить какъ можно раньше; все это положенія, противъ которыхъ можно возражать, но которыя представляются совершенно натуральными. На ряду съ этимъ уже въ ариѳметику надо вводить простыя геометрическія понятія,— интуитивную, наглядную геометрію, безъ которой вся метрическая система, все ученіе о мѣрахъ становится совершенно безцѣльнымъ. И это французами уже сдѣлано. Въ высшей степени интереснымъ являются не только самые программы и планы, не только тѣ замѣчанія, которыя имъ посвятили въ обзорахъ A. Levy, Guitton и Rousseau, но и самыя руководства, составленныя примѣнительно къ этимъ планамъ.

Такова коллекція, издаваемая подъ общимъ именемъ: „Collection Bourlet" книгоиздательской фирмы „Hachette", 16 томиковъ которой уже вышло въ свѣтъ. Примѣръ французской школы убѣждаетъ насъ, что при надлежащей группировкѣ матеріала можно достичь введенія началъ такъ называемой высшей математики безъ обремененія учащихся, если только ограничиться введеніемъ ея въ умѣренной дозѣ, полезной для всѣхъ, какова бы ни была ихъ спеціальность. Эта доза опредѣляется прежде всего тѣмъ, что нужно для другихъ предметовъ, которые въ средней школѣ уже преподаются и куда высшая математика прокралась контрабандой („гони природу въ дверь, она влетитъ въ окно").

a) Графики, графическое изображеніе хода температуры, давленія, работы паровой машины, пути падающей точки, записаннаго на вращающемся цилиндрѣ.

b) Коническія сѣченія (параболическія зеркала; движеніе планетъ въ космографіи).

c) Начала ученія о производныхъ (скорость и ускореніе; касательная). Передъ опредѣленіемъ площадей я останавливаюсь, хотя графическое опредѣленіе работы паровой машины, коэффиціента полезнаго дѣйствія и т. п. достаточно убѣдительно говорятъ за необходимость введенія и этого понятія.

Если обратиться теперь къ этому пополненію съ точки зрѣнія запросовъ высшей школы, главнымъ образомъ, технической, то, разумѣется, чѣмъ болѣе высшей математики даетъ средняя школа, тѣмъ это для высшей лучше: для университета, для математическаго факультета это лучше въ томъ отношеніи, что онъ получитъ болѣе сознательныхъ слушателей на математическомъ отдѣленіи и можетъ отбросить элементарныя части высшей математики; для естественнаго отдѣленія физико-математическаго факультета и для медицинскаго факультета и даже для юридическаго понятіе о функціи, о производной, о графическомъ изображеніи я бы сказалъ прямо необходимо.

Абсолютно не нужна высшая математика развѣ только для филологовъ*); но ихъ такъ немного, что не бѣда, если и они получатъ новое интересное понятіе, которое иногда, можетъ быть, пригодится и имъ. И французы въ этомъ отношеніи довольно радикальны: послѣ пересмотра плановъ и усиленія началъ высшей математики въ средней школѣ, въ „Ecole des Beaux Arts“ въ Парижѣ каѳедра математики была уничтожена, какъ ненужная болѣе, и соотвѣтственныя требованія перенесены въ программу вступительныхъ конкурсныхъ экзаменовъ. У насъ этого не придется дѣлать. Послѣ того, какъ введено будетъ болѣе полное преподаваніе началъ высшей математики въ средней школѣ, останется еще много работы для математики въ высшей технической школѣ.

Достаточно указать на книгу А. И. Крылова „Лекціи о приближенныхъ вычисленіяхъ“, чтобы убѣдиться въ справедливости этого. Придется обратить больше вниманія на дифференціальную геометрію, на вычисленіе безконечно малыхъ различныхъ порядковъ, словомъ дать въ системѣ то, что теперь каждый преподаватель прикладной математики дѣлаетъ у себя и часто недостаточно строго и правильно. Систематизировать этотъ матеріалъ значило бы заполнить ту пропасть, которая теперь существуетъ между курсомъ высшей математики въ высшихъ техническихъ заведеніяхъ и курсомъ практической механики и пр., и которая имѣетъ результатомъ заучиваніе первой только для экзамена, чтобы послѣ него основательно все перезабыть.

Что касается „Classe de mathématiques spéciales“, на который у насъ часто указываютъ для пущаго посрамленія нашей отсталости въ математическомъ отношеніи, то, конечно, это одно изъ рѣшеній вопроса о преподаваніи высшей математики въ средней школѣ, и при томъ на первый взглядъ самое простое. Но при ближайшемъ разсмотрѣніи возникаютъ нѣкоторыя сомнѣнія въ желательности именно такого рѣшенія вопроса.

Прежде всего это явленіе чисто французское, связанное съ доминирующимъ значеніемъ, которое во Франціи занимаетъ политехническая школа: ежегодно тысячи аспирантовъ съѣзжается со всѣхъ концовъ Франціи держать конкурсные экзамены. Только не попавшіе въ политехническую школу идутъ въ университетъ, и широкую программу этой школы можетъ одолѣть только та отборная кучка, которая проходитъ благополучно черезъ всѣ испытанія. Къ этимъ то строгимъ экзаменамъ и готовитъ „Classe de Mathématiques Spéciales.

Учитель здѣсь имѣетъ право заявить ученику, что его способности недостаточны для подготовки и что ему лучше уйти (не всѣ,

*) Врядъ ли даже съ этимъ можно согласиться, если принять во вниманіе, что логика и философія читаются у насъ исключительно на филологическомъ факультетѣ.

Ред.

конечно, этого слушаются). И изъ не выдержавшихъ экзаменъ многіе снова возвращаются въ тотъ же классъ, чтобы готовиться къ новому конкурсному экзамену. Требованія экзаменаціонныхъ программъ мѣняются, и, напримѣръ, до послѣдней реформы особенное развитіе имѣла алгебра и аналитическая геометрія. Показателемъ объема требованій можетъ служить трехтомный курсъ аналитической геометріи „Pruvost“. Хорошій ученикъ „Classe de Mathématiques Speciales“ лѣтъ 30 тому назадъ, по словамъ C. Bourlet, зналъ его отъ доски до доски. Не это, конечно, намъ нужно и во всякомъ случаѣ не это одно. Если мы говоримъ о французской системѣ, то, главнымъ образомъ, имѣемъ въ виду распредѣленіе преподаванія на секціи и циклы. Со времени реформы 1902 года французская средняя школа раздѣляется на два цикла: низшій — 4 года и высшій — 2 года съ 3-мъ дополнительнымъ *)

Первый циклъ обнимаетъ классы 6-й, 5-й, 4-й и 3-й и раздѣляется на два отдѣленія одно — съ латинскимъ и другое — безъ латинскаго. Въ 1-мъ за 4 года 9 уроковъ математики, во второмъ 17. Циклъ высшій раздѣляется на четыре отдѣленія:

A. Латинскій — греческій.

B. Латинскій — новые языки.

C. Латинскій — науки **).

D. Латинскій — науки.

Воспитанники первыхъ двухъ отдѣленій изучаютъ математику въ значительно меньшемъ объемѣ; два другіе въ значительно большемъ; на отдѣленіяхъ A и B на математику отводится по два урока годовыхъ въ двухъ классахъ (2-мъ и 1-мъ) въ тѣхъ же классахъ — отдѣленій C и D — по 5. По окончаніи ихъ изъ отдѣленій A и B идутъ въ „Classe de philosophie“, гдѣ математикѣ отводится 1 часъ въ полугодіи обязательнаго (космографія) и 2 часа годовыхъ факультативнаго курса; окончившіе же секціи C и D идутъ въ „Classe de Mathématiques, гдѣ математикѣ отводятся 8 часовъ годовыхъ. Но даже при такомъ сокращеніи времени, отводимомъ на математику на секціяхъ A и B, все же удается благодаря переработкѣ программъ доходить до сообщенія ученикамъ понятій о производной и началъ аналитической геометріи.

Вотъ что говоритъ Grevy, характеризуя реформу 1902 года (цитирую по статьѣ „Enseignement Secondaire“ 1904 г. № 14 Ch. Bioche въ указанномъ отчетѣ). „Доминирующая идея реформы заключалась въ томъ, чтобы отвести возможно больше времени занятіямъ науками

---

*) Болѣе подробныя свѣдѣнія объ организаціи учебныхъ заведеній см. Vuibert. Annuaire de la jeunesse.

**) Подъ „Sciences“ во Франціи, какъ извѣстно, разумѣютъ „точныя науки“, въ противоположность „letres“, куда относятся всѣ гуманитарныя науки.

Ред.

физико-математическими и новыми языками, — чтобы ученикъ, выходящій изъ лицея, могъ понимать многообразныя промышленныя примѣненія, которыя ему встрѣтятся съ самаго начала его дѣятельности, и не оставался чуждымъ экономической жизни, значеніе которой возрастаетъ съ каждымъ днемъ".

Наиболѣе интересное нововведеніе реформы 1902 года — это созданіе въ 1-мъ (младшемъ) циклѣ отдѣленія безъ латинскаго языка; циклъ этотъ составленъ былъ такъ, чтобы ученики, покидающіе лицей по окончаніи 3-го класса, были вооружены достаточнымъ научнымъ багажемъ, и могли бы начать свою дѣятельность на поприщѣ торговли или промышленности, — а въ то же время чтобы остальные ученики подготовились къ занятіямъ болѣе высшаго порядка.

Одна изъ характеристическихъ чертъ плана занятій 1905 года есть ясное различіе, которое имъ устанавливается между характеромъ преподаванія въ 1-мъ циклѣ и во 2-мъ. До 1902 года геометрія преподавалась, начиная съ 4-го класса (соотвѣтственно русскому 3-му), если не совершенно въ духѣ Евклидовыхъ элементовъ, то по крайней мѣрѣ способомъ логическимъ, представляющимъ большія аналогіи съ ученіемъ Евклида; напротивъ, по учебному плану 1905 года геометрія должна быть преподаваема — въ 1-мъ циклѣ — путемъ экспериментальнымъ; во всякомъ случаѣ по крайней мѣрѣ тогда, когда дѣло идетъ о понятіяхъ прямой, плоскости, параллельныхъ линіяхъ и пр. всякій новый элементъ долженъ быть сопровождаемъ его точнымъ построеніемъ съ помощью линейки и циркуля, а не проведеніемъ отъ руки, не пріучающимъ къ точности; геометрическое черченіе должно быть вспомогательнымъ средствомъ при преподаваніи геометріи; словомъ, преподаваніе въ 1-мъ циклѣ должно быть возможно болѣе конкретнымъ; въ научныхъ классахъ 2-го цикла начинаютъ снова проходить во 2-мъ планиметрію, въ 1-мъ стереометрію уже въ логической обработкѣ.

Здѣсь не мѣсто, конечно, распространяться подробно о программахъ. Не лишнимъ, можетъ быть, будетъ лишь напомнить, что программы 1902 года были реакціей противъ увлеченій предшествовавшихъ программъ введеніемъ духа строгости и систематизаціи, доходившей до устраненія геометрическихъ иллюстрацій понятія о производной.

Эти программы 1902 года были составлены выдающимися учеными, не имѣвшими однако, опыта преподаванія въ средней школѣ, и вызвали оживленную критику со стороны педагоговъ. Вслѣдствіе этого уже въ 1905 г. былъ произведенъ новый пересмотръ программъ словесныхъ отдѣленій A и B 2-го цикла.

Вотъ что по этому поводу говоритъ Ch. Bioche въ своей вступительной къ отчету статьѣ „Sur la place et l'importance de Mathématiques dans l'Enseignement Secondaire en France" (Rapports vol II). „Программа математики классовъ 2-го и 1-го отдѣленій A и B содержитъ теперь понятія о графическомъ изображеніи функцій, съ приложеніями къ равномѣрно ускоренному движенію, и элементарныя свѣдѣнія по тригонометріи, — свѣдѣнія, достаточныя для того, чтобы, пользуясь таблицами натуральныхъ значеній тригонометрическихъ линій, употребленіе которыхъ становится очень обычнымъ, дать возможность ученикамъ рѣшать различныя простыя задачи, встрѣчающіяся на практикѣ. Время, посвященное математикѣ, — 2 часа въ недѣлю, — достаточно для того, чтобы можно было настаивать на численныхъ приложеніяхъ. Если ученики выучиваютъ теперь менѣе теоремъ, чѣмъ прежде, за то они пріобрѣтаютъ интересныя понятія и научаются ихъ примѣнять".

Нѣтъ надобности указывать, что доза высшей математики въ отдѣленіяхъ научныхъ (C и D) несравненно выше. Можно бы подумать что эти отдѣленія оказываются очень трудными для учениковъ и мало избираемыми. Оказывается наоборотъ, — они то именно и привлекаютъ наибольшее количество учащихся. Вотъ цифры, которыя любезно сообщилъ мнѣ въ прошломъ году B. Niewenglowski, Inspecteur général de l'Enseignement Secondaire, — они даютъ процентное отношеніе учащихся во 2-мъ и 1-мъ классахъ четырехъ отдѣленій за семь лѣтъ 1903 — 1909. (1903-й годъ нѣсколько неправиленъ, ибо реформа произведена въ 1902 году).

Лицеи и колледжи.

		1903	1904	1905	1906	1907	1908	1909
2-й классъ.	A	10,83	10,03	9,21	8,40	8,18	7,76	7,76
	B	12,30	16,95	17,87	19,18	18,62	18,61	18,83
	C	24,95	24,89	24,13	23,05	22,98	22,85	22,56
	D	51,91	48,12	48,77	49,36	50,21	50,77	50,93
1-й классъ.	A	37,39	18,49	13,83	12,07	11,77	10,05	9,73
	B	14,29	16,73	20,26	21,54	22,82	23,19	22,07
	C	30,28	28,97	25,44	25,04	23,09	22,84	22,95
	D	18,13	35,80	40,43	41,33	42,31	43,91	45,24

Мы видимъ, что почти три четверти всего числа учащихся въ 1-мъ циклѣ избираютъ именно тѣ отдѣленія, которыя наиболѣе насыщены математикой. И такъ какъ нѣтъ основаній предполагать, что французская нація характеризуется особою природною одаренностью къ математикѣ въ трехъ четвертяхъ своихъ, то мы должны будемъ признать, что болѣе обширный курсъ математики, проходимый на отдѣленіяхъ C и D, не является непреодолимымъ для большинства.

Но эти цифры чрезвычайно любопытны и въ другомъ еще отношеніи. Онѣ показываютъ какъ падаетъ число изучающихъ древніе языки, и число отдающихся словеснымъ наукамъ (отдѣленія A и B вмѣстѣ) даетъ все уменьшающуюся долю, приближающихся къ 0,25.

Между тѣмъ секція С, которая казалось должна бы быть самою многолюдною (такъ мнѣ и сообщалъ сначала г. Нивенгловскій), привлекаетъ всего 22-23%, и число это, хотя и медленно, но непрерывно падаетъ. При важности латинскаго языка и римской культуры для Франціи не удивительно, что такое положеніе вещей начинаетъ даже тревожить просвѣщенныхъ людей Франціи, и это можетъ быть причина того, что за послѣднее время въ средѣ представителей науки и техники во Франціи раздаются голоса о значеніи классическаго образованія.

Но я не буду больше настаивать. Цифры эти достаточно характерны и говорятъ сами за себя.

И я позволю себѣ, чтобы не затягивать доклада, ограничиться сказаннымъ и выразить пожеланіе, чтобы и для насъ наступило время, когда математикѣ будетъ отведено подобающее ей мѣсто въ средней школѣ, и чтобы дѣло пересмотра плановъ происходило при совмѣстной работѣ представителей средней и высшей школы.

Новѣйшіе успѣхи спектроскопическихъ методовъ.

Проф. А. А. Майкельсона.

Человѣкъ, который въ первый разъ разсматриваетъ солнечный свѣтъ сквозь призму, не можетъ удержаться отъ выраженія удивленія и восторга при видѣ великолѣпной игры цвѣтовъ, на которые распадается бѣлый, безцвѣтный лучъ; — но если наблюденіе производится при тѣхъ же условіяхъ, что и въ знаменитомъ опытѣ Ньютона (1666 г.), то, въ сущности, это и есть все, что можно наблюдать. Вы припоминаете, конечно, что Ньютонъ пропустилъ солнечный свѣтъ черезъ круглое отверстіе въ ставнѣ своего окна и поставилъ на пути его стеклянную призму, которая отклонила различные лучи на различный уголъ въ зависимости отъ ихъ цвѣта, растянувши такимъ образомъ круглое освѣщенное солнцемъ бѣлое пятно въ цвѣтную полосу — спектръ, — которую онъ довольно произвольно раздѣлилъ на семь цвѣтовъ: красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, индиго-синій и фіолетовый. (Если бы это раздѣленіе было сдѣлано теперь, то индиго-синій цвѣтъ, навѣрное, не былъ бы въ него включенъ); въ дѣйствительности рѣзкой границы между ними нѣтъ, и они незамѣтно переходятъ другъ въ друга. Если бы намъ вообще приходилось наблюдать солнечный спектръ только при такихъ условіяхъ, то мы сказали бы, что онъ вполнѣ непрерывенъ; и если бы источникомъ свѣта было не солнце, а обыкновенная круглая горѣлка или калильная лампа, то это, дѣйствительно, такъ и было бы.

Но даже въ томъ случаѣ, если бы свѣтъ нашего источника состоялъ изъ различныхъ (но достаточно многочисленныхъ) цвѣтовъ, этотъ фактъ былъ бы замаскированъ наложеніемъ послѣдовательныхъ изображеній. Другими словами, спектръ получается нечистый. Чтобы избѣжать этого наложенія, пришлось ввести два важныхъ видоизмѣненія въ ньютоновскую постановку опыта. Во первыхъ, нужно было пропускать свѣтъ черезъ очень узкое отверстіе и, во вторыхъ, нужно было получить при помощи чечевицы или зеркала ясное изображеніе этого отверстія.

Первая поправка была сдѣлана Уолластономъ (Wollaston) въ 1802 г. Онъ пишетъ:

„Если пропустить лучъ дневного свѣта въ темную комнату черезъ щель шириной въ $^1/_{20}$ дюйма и разсматривать его, стоя на разстояніи въ 10—12 футовъ и держа передъ глазами призму изъ флинтъ-гласа, то мы увидимъ, что лучъ раздѣляется только на четыре цвѣта: красный, желто-зеленый, голубой и фіолетовый. Линія ограничивающая красную сторону спектра, нѣсколько расплывчата. Линія между краснымъ и зеленымъ — вполнѣ рѣзкая; таковы же обѣ границы фіолетоваго цвѣта. Есть еще другія ясныя линіи (въ зеленомъ и голубомъ . . .)“.

Вторая поправка была сдѣлана Фраунгоферомъ въ 1814 г. Наблюдая при помощи телескопа свѣтъ, падавшій черезъ такое узкое отверстіе на призму, онъ открылъ въ солнечномъ спектрѣ болѣе 750 темныхъ линій и зарисовалъ ихъ положеніе и общій характеръ.

Въ признаніе огромной важности этого открытія эти линіи и теперь всегда называются фраунгоферовыми линіями.

Нѣкоторое неудобство въ установкѣ Фраунгофера заключается въ томъ, что щель должна находиться на значительномъ разстояніи отъ телескопа; это было устранено въ приборѣ Бунзена и Кирхгофа. (1860 г.), въ которомъ имѣются уже всѣ существенныя части современнаго спектроскопа: щель и коллиматоръ, призма и зрительная труба для наблюденія (или фотографированія).

И на этой удивительно простой комбинаціи покоится, въ сущности, цѣлая наука — спектроскопія — со всѣми ея примѣненіями и поразительными открытіями относительно строенія и движеній звѣзднаго міра, строенія атомовъ вещества, изъ котораго онъ состоитъ, — и больше того — даже электроновъ, изъ которыхъ эти атомы построены!

Очевидно, что спектроскопія безъ телескопа была бы такой же ограниченной наукой, какой была въ свое время астрономія безъ телескопа. Дѣйствительно, интересно сравнить развитіе этихъ двухъ наукъ въ зависимости отъ послѣдовательнаго усовершенствованія этихъ двухъ инструментовъ.

Безъ телескопа мы знали бы о небесныхъ тѣлахъ очень немного: наиболѣе бросающіяся въ глаза черты строенія солнца, луны и кометъ, затѣмъ яркость и положенія звѣздъ и движеніе планетъ, причемъ эти послѣднія могли бы быть опредѣлены лишь довольно грубо (съ точностью приблизительно до $^1/_{5000}$ *) или нѣсколько больше

*) Принимая за единицу дугу, длина которой равна радіусу.

половины минуты дуги). Спектроскопія безъ телескопа тоже свелась бы къ наблюденію общихъ различій въ характерѣ излученій и поглощеній и къ грубому опредѣленію положенія спектральныхъ линій съ вѣроятной ошибкой того же порядка, какъ указано выше.

Дѣйствительно, разрѣшающая сила глаза измѣряется числомъ свѣтовыхъ волнъ въ діаметрѣ зрачка, а именно около 5000; и если двойная звѣзда (или двойная спектральная линія) образуетъ уголъ зрѣнія меньше $^1/_{5000}$, то она не „раздѣляется". Разрѣшающая сила телескопа съ объективомъ въ одинъ дюймъ равна приблизительно 100.000, такъ что при его помощи можно уже различить на поверхности солнца и луны, въ планетахъ, туманностяхъ, двойныхъ звѣздахъ и звѣздныхъ скопленіяхъ детали съ угловымъ разстояніемъ порядка $^1/_{100000}$; становятся видны диски планетъ, кольца Сатурна, спутники Юпитера и нѣкоторыя звѣздныя группы и скопленія. Разрѣшающая сила самыхъ большихъ нашихъ телескоповъ равна 2 000 000, что соотвѣтствуетъ предѣлу раздѣленія въ одну десятую долю секунды.

Но для того, чтобы проявилась вся плодотворность соединенія телескопа съ призмой, послѣдняя должна быть настолько велика, чтобы на нее падалъ весь свѣтъ, прошедшій черезъ объективъ. Достоинство призмы зависитъ, слѣдовательно, отъ ея размѣра и разсѣивающей способности.

Чтобы составить представленіе о значеніи раздѣляющей или разрѣшающей способности въ спектроскопическихъ изслѣдованіяхъ, разсмотримъ фраунгоферову линію D солнечнаго спектра или соотвѣтствующую блестящую желтую линію, которую даетъ натріево пламя. Фраунгоферъ опредѣлилъ ее, какъ двойную линію, и длина волны ея составляющихъ соотвѣтственно равна приблизительно 0,000 5890 *мм.* и 0,000 5896. Разность, слѣдовательно, равна 6/5893 цѣлаго, или приблизительно 0,001, такъ что для раздѣленія ихъ требуется призма съ разрѣшающей силой, равной 1000. Призма изъ флинтъ-гласа съ основаніемъ въ 25 *мм.* какъ разъ достаточна, чтобы обнаружить двойной характеръ этой линіи.

Но мы знаемъ группы спектральныхъ линій, составляющія которыхъ расположены еще тѣснѣе, чѣмъ въ спектрѣ натрія. Напримѣръ, зеленые лучи, испускаемые раскаленными парами ртути, состоятъ по крайней мѣрѣ изъ шести составляющихъ, и разстояніе между нѣкоторыми изъ нихъ еще въ сто разъ меньше, такъ что для ихъ раздѣленія нужна уже разрѣшающая сила, равная 100 000. Для этого нужна стеклянная призма въ 100 дюймовъ, приготовленіе которой представило бы непреодолимыя трудности. Ихъ можно отчасти избѣжать, употребляя 20 призмъ по пяти дюймовъ каждая; но благодаря оптическимъ несовершенствамъ поверхностей и стекла, а также неизбѣжному поглощенію свѣта при двадцати прохожденіяхъ и сорока преломленіяхъ такая высокая раздѣляющая сила до сихъ поръ еще не достигнута.

Параллелизмъ проблемъ, разсматриваемыхъ астрономіей и спектроскопіей, показанъ въ слѣдующей таблицѣ. Интересно прослѣдить, какъ тѣсно онѣ связаны между собой и какъ рѣшеніе ихъ зависитъ отъ совершенно однородныхъ усовершенствованій въ наблюдательныхъ инструментахъ, главнымъ образомъ въ ихъ разрѣшающей силѣ; такъ что не только старыя проблемы стали легче и рѣшеніе ихъ болѣе точно, но и новыя проблемы, до сихъ поръ считавшіяся неприступными, стали теперь предметомъ ежедневныхъ изслѣдованій.

	Астрономія.	Спектроскопія.
1.	Открытіе новыхъ звѣздъ, туманностей и кометъ.	— Открытіе новыхъ элементовъ.
2.	Положеніе звѣздъ.	— Длина волны спектральныхъ линій.
3.	Двойныя звѣзды и звѣздныя скопленія.	— Двойныя линіи, группы и полосы.
4.	Форма и размѣры планетъ и туманностей. Звѣздные диски.	— Распредѣленіе свѣта въ спектральныхъ „линіяхъ“.
5.	Движенія звѣздъ (перпендикулярно къ лучу зрѣнія). Раздѣленіе двойныхъ звѣздъ, солнечные вихри, протуберансы и т д.	— Движенія звѣздъ (параллельно лучу зрѣнія). Раздѣленіе двойныхъ звѣздъ, солнечные вихри, протуберансы и т. д.
6.		— Измѣненія въ характерѣ и положеніи линій въ зависимости отъ измѣненія температуры, давленія и магнитнаго поля.
7.	Спектрогеліографъ. (Соединеніе телескопа съ спектроскопомъ).	

Мы должны особо отмѣтить, что новѣйшія проблемы требуютъ громадной разрѣшающей силы. Въ телескопѣ это достигнуто постройкой съ одной стороны громадныхъ рефракторовъ, съ другой — гигантскихъ рефлекторовъ; и интересно, что тѣ же два пути открыты и для спектроскопіи, ибо въ ней мы можемъ пользоваться какъ разсѣивающей способностью преломляющихъ средъ, такъ и дифракціонной способностью отражающихъ средъ. Все возрастающая стоимость и трудность приготовленія большихъ прозрачныхъ и однородныхъ тѣлъ изъ стекла положили предѣлъ размѣрамъ и качеству чечевицъ и призмъ, и онѣ были поэтому болѣе или менѣе успѣшно замѣнены первыя — зеркалами, вторыя — дифракціонными рѣшетками.

Послѣднія приготовляются такимъ образомъ, что на стеклянной или металлической поверхности наносится рядъ очень тонкихъ и очень тѣсно расположенныхъ штриховъ, или линій. Дѣйствіе такой рѣшетки на падающій на нее свѣтъ состоитъ въ томъ, что она измѣняетъ его направленіе на нѣкоторую величину, зависящую отъ длину волны, т. е. отъ свѣта; въ результатѣ получается спектръ, который вполнѣ удобно можно наблюдать при помощи такого же самаго спектрометра, замѣняя только призму рѣшеткой.

Разсѣивающая сила дифракціонной рѣшетки зависитъ отъ частоты штриховъ; разрѣшающая же сила измѣряется общимъ числомъ штриховъ. Поэтому важно дѣлать это число какъ можно бо́льшимъ.

Первыя рѣшетки, приготовленныя Фраунгоферомъ въ 1821 г., имѣли всего нѣсколько тысячъ штриховъ и соотвѣтственно этому лишь небольшую разрѣшающую силу, — вполнѣ достаточную, впрочемъ, для раздѣленія двойной линіи натрія. Значительныя усовершенствованія были введены Нобертомъ (Nobert), рѣшетки котораго употреблялись, какъ пробные объекты для микроскоповъ; но какъ спектроскопическіе инструменты, онѣ все еще были очень несовершенны, и лишь съ тѣхъ поръ какъ Рётгерфордъ (Rutherford) въ Нью-Іоркѣ (1879 г.) построилъ дѣлительную машину съ очень точнымъ винтомъ, появились рѣшетки, которыя могли выдержать сравненіе съ лучшими существующими призмами.

При 30 000 штриховъ (на протяженіи около 40 *мм.*) теоретическая разрѣшающая сила должна быть около 30 000; на практикѣ она оказывается около 75 000, что вполнѣ достаточно для раздѣленія двойныхъ линій, составляющія которыхъ находятся другъ отъ друга на разстояніи въ 15 разъ меньшемъ, чѣмъ въ двойной линіи натрія.

Громадный шагъ впередъ былъ произведенъ Роулэндомъ (Rowland) въ 1881 г., такъ что въ теченіе послѣднихъ 30 лѣтъ были въ употребленіи исключительно его рѣшетки. Нѣкоторыя изъ нихъ имѣютъ заштрихованную поверхность въ 150 *мм.* $\times$ 60 *мм.* съ приблизительно 100 000 штриховъ и въ спектрѣ перваго порядка могутъ раздѣлять двойныя линіи, разстояніе которыхъ въ 10 000 разъ меньше, чѣмъ въ линіяхъ натрія. Въ спектрѣ четвертаго порядка онѣ должны раздѣлять линіи, разстояніе которыхъ еще въ четыре раза меньше.

Сомнительно, впрочемъ, чтобы на практикѣ ихъ дѣйствительная раздѣляющая сила была больше 100 000; разногласіе между теоріей и практикой объясняется неполной одинаковостью проведенныхъ штриховъ *).

Блестящіе результаты, полученные Роулэндомъ, дали ему возможность составить великолѣпный атласъ и таблицы длинъ волнъ солнечнаго спектра, которыя по точности и богатству деталей неизмѣримо превосходятъ всѣ предшествовавшія работы, такъ что вплоть до послѣдняго десятилѣтія его данныя были общепризнаннымъ образцомъ. Съ такимъ могущественнымъ орудіемъ изслѣдованія оказалось возможнымъ не только опредѣлить съ удивительной точностью положеніе спектральныхъ линій, но и показать, что многія линіи, считавшіяся прежде простыми, на самомъ дѣлѣ являются двойными или даже цѣлыми группами линій; кромѣ того, была дана систематическая характеристика отдѣльныхъ линій, напримѣръ, являются ли онѣ яркими

*) Это относится ко всѣмъ роулендовскимъ рѣшеткамъ, какія мнѣ приходилось видѣть, за исключеніемъ одной, которую я имѣлъ случай испытать въ физической лабораторіи Геттингенскаго университета. Ея раздѣляющая сила была около 200 000.

или блѣдными, расплывчатыми или рѣзкими, узкими или широкими, симметричными или несимметричными, обращенными и т. д. Этой характеристикѣ мы приписываемъ теперь величайшее значенiе, такъ какъ она даетъ намъ указанiя на строенiе и движенiе атомовъ, колебанiя которыхъ производятъ эти излученiя.

Одна изъ самыхъ трудныхъ и тонкихъ проблемъ современной астрономiи состоитъ въ измѣренiи смѣщенiя спектральныхъ линiй благодаря кажущемуся измѣненiю длины волны вслѣдствiе „радiальной скорости", или движенiя по лучу зрѣнiя. Это — такъ называемый принципъ Допплера, давно уже установленный для звуковыхъ волнъ (свистокъ локомотива кажется болѣе высокаго тона при приближенiи и болѣе низкаго — при удаленiи), для свѣта же онъ былъ впервые подтвержденъ только въ 1871 г. Гёггинсомъ (Huggins и Фогелемъ (Vogel), которые установили смѣщенiе солнечныхъ и звѣздныхъ спектральныхъ линiй, наблюдая послѣдовательно то приближающiйся, то удаляющiй край солнечнаго диска.

Здѣсь нужно указать на ту степень точности, которой требуютъ подобныя измѣренiя. Скорость вращенiя солнечнаго экватора равна приблизительно двумъ километрамъ въ секунду, между тѣмъ какъ скорость свѣта составляетъ 300 000 *км.* въ секунду. Согласно принципу Допплера соотвѣтствующее измѣненiе длины волны должно быть равно $^1/_{150\,000}$, — величина слишкомъ малая для того, чтобы быть „раздѣленной" какой бы то ни было существующей призмой или рѣшеткой. Но при достаточномъ числѣ тщательныхъ микрометрическихъ измѣренiй положенiя середины данной спектральной линiи среднiя значенiя двухъ такихъ рядовъ измѣренiй укажутъ искомое различiе. Во всякомъ случаѣ, очевидно, что если такiя радiальныя скорости должны быть опредѣлены съ сколько нибудь значительной степенью точности, то для этого должны употребляться самыя сильныя рѣшетки съ максимальной раздѣляющей силой.

Другое крайне важное примѣненiе спектроскопiи къ физикѣ солнца привело въ рукахъ Гэля (Hale) и Деландра (Deslandres) къ громадному расширенiю нашихъ знанiй о той колоссальной дѣятельности, которая разыгрывается въ нашемъ центральномъ свѣтилѣ.

Спектрогелiографъ, изобрѣтенный Гэлемъ въ 1889 г., состоитъ изъ спектроскопа съ рѣшеткой, снабженнаго двумя подвижными щелями, одна изъ которыхъ находится, какъ и всегда, въ фокусѣ коллиматора, другая же — какъ разъ въ фокусѣ фотографическаго объектива. Обѣимъ щелямъ сообщается равномѣрное движенiе, такъ что первая движется поперекъ изображенiя солнечнаго диска, въ то время какъ другая непрерывно открываетъ все новыя части фотографической пластинки. Если спектроскопъ установленъ такъ, что черезъ него проходитъ только свѣтъ съ длиной волны, соотвѣтствующей опредѣленной свѣтлой линiи въ солнечномъ выступѣ (напримѣръ, линiя водорода или кальцiя), то на пластинкѣ получается снимокъ солнечныхъ выступовъ или пятенъ, факеловъ и т. д. Но характеръ этой фотографiи зависитъ отъ того, какая часть свѣтлой спектральной „линiи" дѣйствуетъ въ данномъ случаѣ, и такъ какъ вся ширина свѣта въ этой линіи можетъ составлять всего лишь тридцатую часть разстоянія между линіями натрія, то для отдѣленія дѣйствующихъ въ данномъ случаѣ лучей, такъ, чтобы они не налегали другъ на друга, потребовалась бы разрѣшающая сила, по крайней мѣрѣ, въ 100 000.

Какъ другой примѣръ важности высокой раздѣляющей силы для разрѣшенія новыхъ проблемъ, разсмотримъ прекрасныя изслѣдованія Зеемана (Zeemann) надъ лучами въ магнитномъ полѣ. Результатъ, какъ мы знаемъ, есть раздѣленіе первоначально простого луча на три и даже больше, съ составляющими, поляризованными подъ прямыми углами другъ къ другу. Это — одинъ изъ весьма немногихъ случаевъ, гдѣ оказывается возможнымъ дѣйствительно измѣнить колебанія атома (электрона), и тотъ фактъ, что этотъ результатъ, какъ впервые показалъ Лоренцъ, можетъ быть непосредственно вычисленъ, даетъ намъ очень важныя указанія относительно строенія и движенія самихъ атомовъ.

Опытъ состоитъ въ томъ, что источникъ свѣта (какой нибудь раскаленный газъ или паръ) помѣщается между полюсами сильнаго электромагнита, и свѣтъ изслѣдуется скпектроскопически. Фарадей давно уже пытался произвести этотъ опытъ; но спектроскопы, которыми онъ располагалъ въ то время, были еще совершенно непригодны для этой цѣли.

Даже въ первоначальномъ опытѣ самого Зеемана ему удалось наблюдать не дѣйствительное раздѣленіе, но лишь расширеніе спектральной линіи. Въ самомъ дѣлѣ, разстояніе между подлежавшими наблюденію слагающими было порядка одной сотой разстоянія между линіями натрія, такъ что для яснаго раздѣленія ихъ, а тѣмъ болѣе для точнаго измѣренія ихъ разстоянія нужна большая раздѣляющая сила, чѣмъ та, которую давали существовавшія въ то время рѣшетки.

Какъ послѣдній примѣръ, разсмотримъ строеніе самихъ спектральныхъ „линій“. Въ великолѣпномъ атласѣ Роуланда многія линіи, считавшіяся до того простыми, показаны, какъ двойныя, тройныя и кратныя; кромѣ того, въ немъ имѣются ясныя указанія на то, что даже простыя линіи отличаются одна отъ другой по ширинѣ, рѣзкости и симметричности. Но общій вопросъ о распредѣленіи свѣта въ спектральныхъ линіяхъ былъ едва затронутъ. Здѣсь тоже полная „ширина“ линіи относится къ порядку одной десятитысячной разстоянія между линіями натрія очевидно, безъ еще болѣе сильныхъ инструментовъ нѣтъ надежды на дальнѣйшій прогрессъ въ этомъ направленіи.

Изложенное выше съ достаточной ясностью обнаруживаетъ, что современныя проблемы требуютъ максимальной силы лучшихъ спектроскоповъ и техническаго умѣнія самыхъ опытныхъ экспериментаторовъ.

Около 20 лѣтъ тому назадъ былъ изобрѣтенъ методъ, правда, не прямой и нѣсколько кропотливый, но за то обѣщавшій дать средство подойти ко всѣмъ этимъ проблемамъ, методъ, гораздо болѣе могущественный, чѣмъ диффракціонныя рѣшетки.

Этотъ по основному замыслу чрезвычайно простой приборъ, такъ называемый интерферометръ состоитъ изъ двухъ плоскихъ стеклянныхъ пластинокъ. Онѣ могутъ быть установлены вполнѣ параллельно и разстояніе между ними можетъ быть измѣняемо по желанію. Если свѣтъ отражается отъ двухъ поверхностей, обращенныхъ другъ къ другу, то два отраженныхъ луча „интерферируютъ" такъ, что или слагаются другъ съ другомъ, образуя свѣтлый максимумъ, или взаимно уничтожаются, образуя промежуточныя темныя пространства.

Чередованіе свѣтлыхъ и темныхъ полосъ, которое появляется, если глазъ смотритъ въ направленіи нормали къ поверхности пластинокъ, выражено очень рѣзко, пока пластинки находятся очень близко одна къ другой, — но при увеличеніи разстоянія интерференціонныя полосы становятся все менѣе и менѣе ясными, пока наконецъ на нѣкоторомъ разстояніи, которое зависитъ отъ характера падающаго свѣта, онѣ не исчезаютъ совершенно. Между „кривой яркости"*) и характеромъ свѣта существуетъ вполнѣ опредѣленное соотношеніе, такъ что одно можетъ быть выведено изъ другого.

„Разрѣшающая сила" такого прибора измѣряется числомъ свѣтовыхъ волнъ въ удвоенномъ разстояніи между поверхностями. При разстояніи въ одинъ дюймъ она равна приблизительно 100 000; но такъ какъ разстояніе на дѣлѣ можетъ быть измѣняемо неограниченно и такъ какъ самъ приборъ фактически свободенъ отъ какихъ бы то ни было ошибокъ, то его раздѣляющая сила на практикѣ неограниченна.

Примѣненіе этого метода анализа свѣтовыхъ волнъ сопряжено съ извѣстными трудностями, и получаемые разультаты не всегда вполнѣ достовѣрны; но такъ какъ въ то время не былъ изобрѣтенъ еще никакой другой настолько же могущественный способъ, то онъ и пользовался вполнѣ заслуженно самимъ широкимъ примѣненіемъ. Среди полученныхъ при его помощи результатовъ можно отмѣтить слѣдующіе: раздѣленіе многихъ, считавшихся простыми линій на двойныя, четверныя и т. д., измѣреніе ихъ разстояній другъ отъ друга; распредѣленіе свѣта въ составляющихъ; измѣреніе ихъ ширины и измѣненій, производимыхъ въ нихъ температурой, давленіемъ и присутствіемъ магнитнаго поля.

Среди изученныхъ такимъ образомъ излученій одно оказалось настолько однороднымъ, что можно было наблюдать больше 200 000 интерференціонныхъ полосъ. Другими словами, оказалось всегда возможнымъ во всякомъ данномъ разстояніи, скажемъ въ десяти сантиметрахъ, опредѣлить точное число свѣтовыхъ волнъ и путемъ сравненія съ образцовымъ метромъ измѣрить абсолютную длину волны этого излученія и положить ее въ основу измѣренія всѣхъ длинъ волнъ.

*) Подробное выясненіе того, что разумѣютъ подъ кривой яркости, а также многихъ другихъ вопросовъ, вкратцѣ затронутыхъ въ настоящей статьѣ можно найти въ сочиненіи того же автора: А. Майкельсонъ „Свѣтовыя волны и ихъ примѣненія" переводъ съ англійскаго В. О. Хвольсонъ подъ редакціей профессора О. Д. Хвольсона. Одесса. „Mathesis". 1911.

Самъ эталонъ длины, образцовый метръ, опредѣляется, какъ разстояніе между двумя линіями на металлическомъ стержнѣ; и несмотря на всю тщательность его приготовленія и сохраненія, нѣтъ увѣренности въ томъ, что онъ не подвергается постоянному медленному измѣненію, конечно, самому незначительному, но всетаки могущему быть обнаруженнымъ современными утонченными способами измѣренія, если бы только нашелся основной, абсолютно неизмѣнный образецъ, съ которымъ его можно было бы сравнить. Окружность земли считалась такимъ образцомъ, и первоначально метръ былъ опредѣленъ, какъ одна десятимилліонная часть земного меридіана; но различныя измѣренія этого меридіана дали настолько различные результаты, что эта мысль была оставлена. Попытка принять за образецъ длину секунднаго маятника оказалась не болѣе успѣшной.

Но теперь мы имѣемъ способъ сравнить образцовый метръ съ длиной свѣтовой волны (образцовый метръ содержитъ 1 553 163 волны красныхъ лучей, испускаемыхъ парами кадмія), такъ что, если бы нынѣшній образецъ былъ потерянъ или испорченъ или, если бы длина его съ теченіемъ времени измѣнилась, мы могли бы возстановить его первоначальное значеніе съ такой точностью, что никакой микроскопъ не открылъ бы разницы. Правда, въ теченіе милліоновъ лѣтъ свойства атомовъ, испускающихъ эти лучи, и среды, въ которой они распространяются, могутъ измѣниться, — но возможно, что за это время человѣческій родъ потеряетъ интересъ къ этому вопросу.

Нужно сознаться, что трудности примѣненія интерферометра для рѣшенія спектроскопическихъ проблемъ были настолько серьезны, что было въ высшей степени желательно изобрѣтеніе другого прибора, въ которомъ ихъ можно было бы избѣжать. Эта потребность была удовлетворена „эшелономъ", или „ступенчатой рѣшеткой", приборомъ, основаннымъ на томъ же принципѣ, что и диффракціонная рѣшетка, но состоящимъ изъ столбика стеклянныхъ пластинокъ совершенно одинаковой толщины, образующихъ нѣчто вродѣ лѣстницы (отсюда и названіе прибора*).

Дѣйствіе рѣшетки состоитъ въ томъ, что она собираетъ вмѣстѣ свѣтовыя волны, послѣдовательные ряды которыхъ запаздываютъ на нѣкоторое небольшое цѣлое число волнъ (обыкновенно меньше шести, такъ какъ разстояніе между штрихами составляетъ около шести свѣтовыхъ волнъ), между тѣмъ какъ въ эшелонѣ это запаздываніе составляетъ нѣсколько тысячъ волнъ.

Но разрѣшающая сила зависитъ отъ полнаго запаздыванія крайнихъ лучей, а его можно сдѣлать очень большимъ либо употребляя большое число элементовъ съ большими запаздываніями либо сравнительно небольшое число элементовъ съ большими запаздываніями. Такъ, напримѣръ, эшелонъ изъ тридцати стеклянныхъ пла-

*) Авторъ не упоминаетъ, что честь изобрѣтенія этого прибора принадлежитъ ему. См. указанное выше сочиненіе.

Перев.

стинокъ толщиною въ одинъ дюймъ, изъ которыхъ каждая даетъ запаздываніе въ 25 000 волнъ, долженъ имѣть раздѣляющую силу 750 000 — приблизительно въ семь разъ больше, чѣмъ рѣшетка; и эта величина была, дѣйствительно, осуществлена на практикѣ.

Перо (Perot) и Фабри (Fabry) одновременно показали, что можно получить большую раздѣляющую силу путемъ повторныхъ отраженій отъ двухъ посеребренныхъ поверхностей*), а нѣсколько лѣтъ спустя Лёммеръ (Lummer) изобрѣлъ пластинчатый интерферометръ, осуществляющій эту идею на практикѣ.

Разрѣшающая сила всѣхъ этихъ новѣйшихъ приборовъ во много разъ больше, чѣмъ у прежнихъ рѣшетокъ, но всѣ они одинаково имѣютъ тотъ же недостатокъ, которымъ (но въ гораздо меньшей степени) страдаетъ и рѣшетка, а именно различные послѣдовательные спектры отчасти налагаются другъ на друга. Этотъ недостатокъ можно, правда, устранить (хотя и съ нѣкоторымъ уменьшеніемъ простоты прибора и съ значительной потерей свѣта) при помощи вспомогательныхъ призмъ, рѣшетокъ, эшелоновъ и т. д., и въ такомъ видѣ всѣ эти современные приборы дали результаты глубокой важности, получить которые при помощи прежнихъ инструментовъ было бы невозможно.

Диффракціонная рѣшетка обладаетъ столькими преимуществами по своей простотѣ и удобству обращенія съ нею, что даже и теперь она употребляется предпочтительно передъ современными приборами, кромѣ, конечно, тѣхъ тончайшихъ изслѣдованій, для которыхъ требуется исключительно высокая разрѣшающая сила. Но дѣйствительно ли мы уже достигли предѣла раздѣлительной силы рѣшетки? мы видѣли, что она зависитъ отъ числа штриховъ, и число это, конечно, можно увеличить. Но теоретическая величина разрѣшающей силы можетъ быть достигнута лишь въ томъ случаѣ, если штрихи проведены очень аккуратно; такъ, напримѣръ, раздѣлительная сила рѣшетки Роулэнда составляетъ только треть ея теоретической величины, и это есть прямое слѣдствіе неполной точности въ проведеніи линій. Если бы можно было построить вполнѣ точную рѣшетку съ 250 000 линій, то ея разрѣшающая сила была бы та же, что у самаго сильнаго эшелона. Вопросъ о приготовленіи такихъ рѣшетокъ занималъ меня въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ, и тѣ колоссальныя затрудненія, съ которыми пришлось столкнуться, даютъ прекрасное мѣрило для правильной оцѣнки уже достигнутаго, и можно надѣяться, что въ ближайшемъ будущемъ мы получимъ еще лучшіе результаты.

Существенную часть всѣхъ употребляемыхъ теперь дѣлительныхъ машинъ составляетъ винтъ, который для каждаго послѣдовательнаго штриха подвигаетъ подлежащую заштрихованію оптическую поверхность на одинаковую величину порядка отъ $^5/_{100}$ до $^1/_{1000}$ миллиметра; и главная трудность при устройствѣ такой машины состоитъ въ томъ,

*) Булучъ (Bouloch) въ 1893 г, наблюдалъ при помощи тонкой серебряной пленки, что натріевыя кольца раздваиваются какъ при отраженіи (большой уголъ паденія), такъ и при прохожденіи (уголъ паденія, равный нулю).

чтобы сдѣлать винтъ и его монтировку настолько точными, чтобы ошибки были невелики по сравненію съ $^1/_{1000}$ долей миллиметра.

Это достигается долгой и утомительной работой шлифовки и провѣрки, которая тѣмъ труднѣе, чѣмъ длиннѣе винтъ. Винтъ, достаточный для заштрихованія рѣшетки въ 2 дюйма, можетъ быть приготовленъ въ нѣсколько недѣль. Чтобы приготовить винтъ Роуленда, который заштриховываетъ шести-дюймовыя рѣшетки, потребовалось два года или даже больше. Приготовленіе же винта для заштрихованія рѣшетки въ 15 дюймовъ должно, очевидно, потребовать еще больше времени, и дѣйствительно, на него пришлось затратить больше 10 лѣтъ*).

Да будетъ позволено мнѣ указать на нѣкоторыя изъ трудностей, встрѣтившихся въ этой работѣ; несомнѣнно, ихъ было бы гораздо меньше, если бы мои предшественники въ этой области были болѣе сообщительными.

Во первыхъ, нужно указать на приводящую въ отчаяніе медленность процесса отшлифовыванія и провѣрки винта. Его нельзя ускорить ни шлифованіемъ съ большей скоростью, ни употребленіемъ какихъ нибудь, не самыхъ тончайшихъ сортовъ шлифовальнаго матеріала. Первое вызвало бы неравномѣрное расширеніе винта отъ нагрѣванія; послѣднее быстро привело бы къ разрушенію нарѣзки, пока отъ первоначальной формы ничего не осталось бы.

Во вторыхъ, при приготовленіи большой рѣшетки, которое можетъ занять отъ восьми до десяти дней, штрихующій алмазъ (который долженъ быть выбранъ и установленъ съ величайшей тщательностью) долженъ провести на поверхности, твердой, какъ сталь, черту въ общемъ въ нѣсколько миль длиною, — и часто случается, что онъ ломается, когда рѣшетка еще только на половину закончена. Продолжать прежнюю работу съ новымъ алмазомъ нельзя; ее приходится выбросить и начать новую рѣшетку.

Въ третьихъ, самый слабый сдвигъ или пропущенное движеніе въ какой бы то ни было части — винтѣ, гайкѣ, тележкѣ или рѣшетки, или въ механизмѣ для движенія штрихующаго алмаза — тотчасъ обнаруживается въ соотвѣтствующемъ дефектѣ рѣшетки. Случается, что послѣ недѣль, а то и мѣсяцевъ подготовительныхъ работъ, когда все, повидимому, уже готово и можно начинать штриховать, остріе алмаза ломается, и опять приходится затрачивать столько же времени, для того, чтобы выбрать новый алмазъ.

И вотъ, когда нагроможденіе трудностей начинаетъ уже казаться непреодолимымъ, получается прекрасная рѣшетка, вопросъ уже считается рѣшеннымъ, и это событіе радостно привѣтствуется — только для того, чтобы при слѣдующей же попыткѣ потерпѣть неудачу. И

*) Въ настоящее время испытывается методъ приготовленія рѣшетокъ, точность котораго не зависитъ отъ какихъ бы то ни было механическихъ достоинствъ прибора; состоитъ онъ въ томъ, что штрихованіе регулируется непосредственнымъ сравненіемъ съ свѣтовыми волнами какого нибудь однороднаго источника свѣта, напримѣръ, краснаго кадміеваго пламени.

дѣйствительно, благодаря такой преждевременной увѣренности въ успѣхѣ было потеряно гораздо больше времени, чѣмъ при откровенномъ признаніи громадныхъ трудностей.

Можно придти въ заключеніе къ тому, чтобы видѣть въ этой машинѣ настоящій индивидуальный характеръ — я бы сказалъ даже женскій характеръ — то требовательный, то уступчивый, то ласковый и угодливый, то даже угрожающій! Но въ концѣ концовъ мы убѣждаемся однако, что это — характеръ ловкаго и искуснаго игрока въ какой нибудь сложной, но увлекательной игрѣ, который готовъ немедленно воспользоваться всѣми ошибками своего противника, который готовитъ ему самые коварные сюрпризы, который никогда не играетъ на удачу, — но который тѣмъ не менѣе всегда играетъ честно и въ полномъ согласіи съ правилами игры. Онъ твердо знаетъ эти правила, но если вы ихъ не знаете, не ждите отъ него снисхожденія. Если же и вы выучили ихъ и играете согласно съ ними, то игра идетъ нормально.

Чтобы иллюстрировать степень успѣха, достигнутаго въ этомъ дѣлѣ, я укажу на сравненіе, которое недавно продѣлали гг. Гель и Лемонъ (Lemon) надъ дѣйствіемъ рѣшетки съ заштрихованной поверхностью въ $6^1/_2$ дюймовъ, съ одной стороны, и эшелона, интерферометра Перо и Фабри и пластинки Лёммера, съ другой стороны. Пробнымъ объектомъ были зеленые лучи раскаленныхъ паровъ ртути. Спектръ этихъ лучей считался простымъ, пока интерферометръ не показалъ, что онъ состоитъ изъ пяти или даже больше составляющихъ, причемъ вся группа линій занимаетъ пространство около $^1/_{15}$ разстоянія между линіями натрія.

Рѣшетка ясно раздѣляетъ шесть составляющихъ; другіе новѣйшіе инструменты даютъ отъ шести до девяти. Двѣ изъ этихъ составляющихъ отстоятъ другъ отъ друга всего на $^1/_{150}$ разстоянія между линіями натрія, и они настолько хорошо раздѣляются рѣшеткой, что можно было бы различить двойныя линіи съ вдвое и даже втрое меньшимъ разстояніемъ; такъ что дѣйствительная раздѣляющая сила этой рѣшетки — отъ 300 000 до 400 000 — того же порядка, слѣдовательно, что и раздѣляющая сила эшелона.

Здѣсь можно спросить, конечно, нужно ли идти въ этомъ направленіи еще дальше. Этотъ же самый вопросъ былъ заданъ, когда двадцать лѣтъ тому назадъ Роулэндъ поразилъ ученый міръ разрѣшающей силой въ 100 000, — и онъ самъ былъ убѣжденъ, что ширина самихъ спектральныхъ линій такова, что никакое дальнѣйшее раздѣленіе уже невозможно. Но потомъ достаточно ясно обнаружилось, что эта оцѣнка ошибочна, и мы знаемъ теперь, что существуютъ проблемы, для разрѣшенія которыхъ нужна раздѣляющая сила, по крайней мѣрѣ, въ милліонъ, и предвидятся другія, которыя потребуютъ десяти милліоновъ, и можно быть увѣреннымъ, что предложеніе не отстанетъ отъ спроса.

Возвратимся къ нашему сравненію телескопа и спектроскопа; съ увеличеніемъ размѣровъ и раздѣляющей силы телескопа наши знанія о звѣздномъ мірѣ будутъ, конечно, расширяться; но тутъ мы наталкиваемся на серьезную трудность: намъ приходится наблюдать черезъ всю толщу атмосферы, которая составляетъ много миль и которая никогда не бываетъ вполнѣ спокойна. Соотвѣтствующей границы для силы спектроскопа не существуетъ, и мы можемъ съ увѣренностью ожидать въ ближайшемъ будущемъ разрѣшенія проблемъ о подъ-атомномъ строеніи и движеніяхъ этой ультра-микроскопической вселенной.

Тѣ вѣсти, которыя мы получаемъ изъ глубинъ звѣзднаго неба или изъ вольтовыхъ дугъ нашихъ лабораторій, доходятъ ли онѣ до насъ въ милліонную долю секунды или въ сотни свѣтовыхъ лѣтъ, все это — правдивые свидѣтели о процессахъ, имѣющихъ для насъ глубокое значеніе. Онѣ приходятъ къ намъ въ шифрованномъ видѣ — на языкѣ, который мы только начинаемъ понимать.

Наша обязанность — сдѣлать возможнымъ полученіе и запротоколированіе этихъ вѣстей. Когда придетъ время и явятся новый Кеплеръ и Ньютонъ, которые сумѣютъ расшифровать ихъ, тогда мы можемъ ожидать чудесъ, для пониманія которыхъ потребуются всѣ силы нашего ума.

О геометрическихъ построеніяхъ при помощи циркуля и постоянной прямой.

В. Романовскаго.

Извѣстно, что всѣ геометрическія построенія, которыя выполняются при помощи линейки и циркуля, могутъ быть выполнены также при помощи линейки и постояннаго круга, который данъ въ плоскости чертежа и центръ котораго извѣстенъ. Справедливость этого предложенія была показана знаменитымъ Штейнеромъ въ его книгѣ „Ueber geometrische Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises“. Любопытно, что справедливо также предложеніе, которое въ извѣстномъ смыслѣ можно разсматривать, какъ предложеніе, обратное доказанному Штейнеромъ, и которое можно формулировать слѣдующимъ образомъ.

Всякое геометрическое построеніе, выполнимое при помощи линейки и циркуля, можно выполнить также при помощи циркуля и постоянной прямой, заданной гдѣ угодно, т. е. и не въ плоскости чертежа, а въ какой угодно другой плоскости, при чемъ всѣ прямыя, задаваемыя для построенія, кромѣ этой постоянной прямой, могутъ быть заданы каждая двумя лежащими на ней различными точками, такъ что никакихъ иныхъ точекъ на этихъ прямыхъ можетъ быть не дано*).

Настоящая статья посвящается доказательству этого предложенія.

Во всякой задачѣ на построеніе при помощи циркуля и линейки могутъ быть даны круги, прямыя и отрѣзки нѣкоторыхъ прямыхъ, дуги нѣкоторыхъ круговъ и углы.

Мы покажемъ далѣе, какъ для даннаго круга или дуги круга всегда возможно найти центръ при помощи циркуля и постоянной прямой. Поэтому мы всегда можемъ предполагать, что для всякаго даннаго круга или дуги круга извѣстенъ центръ.

Когда задачей на построеніе намъ будетъ дана прямая, то мы будемъ это понимать въ томъ смыслѣ, что намъ даны какія либо двѣ различныя точки на этой прямой. Точно такъ же мы будемъ считать, что намъ данъ отрѣзокъ, если даны двѣ точки на концахъ его. Согласно съ этими условіями, мы всякія данныя прямыя должны бы были изображать каждую двумя точками. Однако, мы не будемъ такъ дѣлать съ той цѣлью, чтобы облегчить пониманіе чертежей. И чтобы отличить отъ прямыхъ, данныхъ точками, постоянную прямую, которая начерчена, т. е. всѣ точки которой даны, мы введемъ для послѣдней постоянное обозначеніе и будемъ называть ее прямой KL.

Постоянную прямую KL можно предполагать начерченной въ плоскости чертежа и безъ ущерба общности высказаннаго выше предложенія, какъ читатель легко увидитъ изъ нашихъ построеній.

Данные углы могутъ быть заданы тремя точками, при чемъ одна лежитъ въ вершинѣ угла, или двумя прямыми, точка пересѣченія которыхъ не дана и которыя заданы каждая двумя точками. Мы увидимъ далѣе, какъ можно найти точку пересѣченія этихъ прямыхъ при помощи циркуля и постоянной прямой.

Послѣ этихъ разъясненій замѣтимъ, что всякое построеніе, выполнимое при помощи циркуля и линейки, приводится къ той или

---

*) Высказанное авторомъ предложеніе, конечно, справедливо: болѣе того, не нужна и вспомогательная прямая. Какъ извѣстно, еще Москерони доказалъ, что всякое построеніе которое можетъ быть выполнено циркулемъ и линейкой, можетъ быть также осуществлено однимъ циркулемъ, если понимать заданія именно такъ, какъ это указываетъ авторъ настоящей статьи. Автору понадобилась прямая именно потому, что онъ не справился со случаемъ II задачи 9-ой. Подробности можно найти въ сочиненіи Адлера „Теорія геометрическихъ построеній". Авторъ очевидно, не знакомъ съ построеніемъ Москерони, ибо на стр. 315 онъ прямо высказываетъ сомнѣнія, чтобы всѣ построенія, о которыхъ идетъ рѣчь, выполнялись однимъ циркулемъ. Но такъ какъ авторъ самостоятельно и чисто оригинально справляется почти со всѣми построеніями Маскерони, то мы помѣщаемъ здѣсь его работу, которая для многихъ читателей несомнѣнно будетъ интересна.

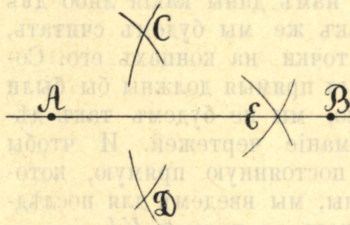
Ред.

иной комбинаціи построеній четырехъ выраженій.

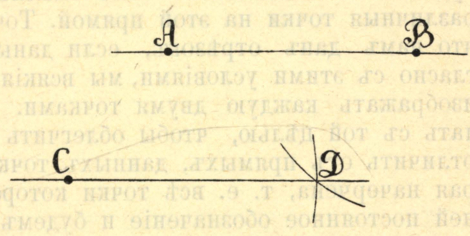
$$a \pm b, \quad \frac{ab}{c}, \sqrt{a^2 \pm b^2}, \quad \sqrt{ab},$$

въ которыхъ a, b, c обозначаютъ нѣкоторые данные отрѣзки. Мы изложимъ теперь рѣшеніе ряда элементарныхъ въ нашемъ изслѣдованіи задачъ, на которыхъ основывается построеніе этихъ выраженій при помощи циркуля и постоянно прямой. Элементарныя задачи, конечно, будутъ рѣшены при помощи тѣхъ же средствъ.

1-ая задача. На данной прямой AB, заданной двумя точками A и B, найти какую нибудь третью точку, отличную отъ точекъ A и B.



Къ задачѣ № 1.



Къ задачѣ № 2.

Возьмемъ гдѣ нибудь точку C такъ, чтобы точки A, B и C могли служить вершинами треугольника и опишемъ изъ точекъ A и B дуги радіусовъ AC и BC соотвѣтственно. Эти дуги, кромѣ точки C, пересѣкутся еще въ нѣкоторой точкѣ D. Изъ точекъ C и D, радіусомъ, отличнымъ отъ AC и BC, опишемъ двѣ дуги. Каждая изъ точекъ ихъ пересѣченія, напримѣръ точка E, будетъ лежать на прямой AB и будетъ отлична отъ точекъ A и B.

Описаннымъ способомъ можно найти на прямой AB сколько угодно точекъ.

2-ая задача. Отъ точки C провести прямую, параллельную данной прямой AB.

Мы будемъ считать искомую прямую проведенной, если укажемъ на ней точку, отличную отъ C.

Чтобы найти эту точку, проводимъ изъ B дугу радіуса AC и изъ C дугу радіуса AB. Въ пересѣченіи ихъ будетъ лежать искомая точка D, такъ что прямая CD будетъ параллельна AB.

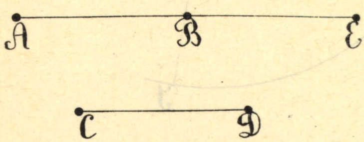
Рѣшеніе этой задачи попутно приводитъ также къ рѣшенію слѣдующей.

3-ья задача. Отъ точки C отложить отрѣзокъ, равный и параллельный данному отрѣзку AB.

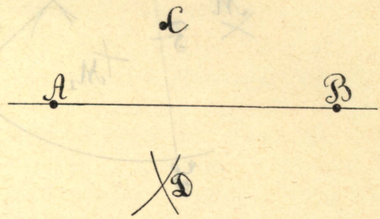
4-ая задача. Отъ конца B даннаго отрѣзка AB, по направленію его, отложить равный ему отрѣзокъ.

Отъ какой нибудь точки C откладываемъ отрѣзокъ CD, равный и параллельный отрѣзку AB. Затѣмъ, отъ точки B, откладываемъ отрѣзокъ BE, равный и параллельный отрѣзку CD. Очевидно, что отрѣзокъ $AE = 2AB$ и точки A, B и E лежатъ на одной прямой.

5-ая задача. Изъ точки C, лежащей внѣ прямой AB, опустить на послѣднюю перпендикуляръ.

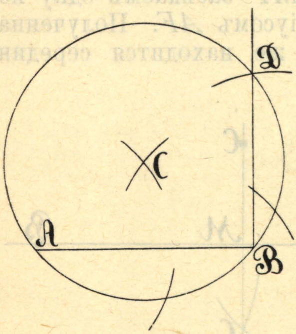


Къ задачѣ № 4.



Къ задачѣ № 5.

Проводимъ изъ A и B дуги радіусовъ AC и BC соотвѣтственно и находимъ ихъ точку пересѣченія D. Прямая, опредѣляемая точками C и D, будетъ искомымъ перпендикуляромъ. Ниже мы увидимъ, какъ найти точку пересѣченія ея съ прямой AB.



Къ задачѣ № 6.

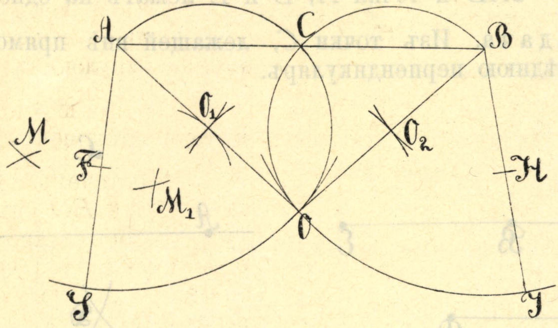
6-ая задача. Въ точкѣ B отрѣзка AB возстановить къ нему перпендикуляръ.

Изъ точекъ A и B проводимъ двѣ пересѣкающіяся дуги одного и того же радіуса. Изъ точки ихъ пересѣченія C радіусомъ CA проведемъ окружность, которая пройдетъ и черезъ точку B. Изъ точки A откладываемъ одну за другой три дуги радіуса AC. Тогда точка D будетъ лежать на діаметрѣ начерченной окружности, проходящемъ черезъ A, и потому прямая, опредѣляемая точками B и D, будетъ перпендикулярна къ AB.

7-ая задача. Раздѣлить данный отрѣзокъ AB пополамъ.

Отложимъ отъ точекъ A и B какіе либо отрѣзки AF и BH, равные между собой и превосходящіе каждый четверть разстоянія между точками A и B. Затѣмъ отъ точекъ F и H отложимъ отрѣзки $FG = AF$ и $HI = BH$ по направленіямъ прямыхъ AF и BH (4-ая задача). Опишемъ теперь радіусами AG и BI изъ точекъ A и B двѣ дуги до ихъ взаимнаго пересѣченія въ точкѣ O и изъ этой точки проведемъ окружность радіуса AF. Далѣе проведемъ изъ точекъ

A и B радіусомъ AF двѣ дуги, которыя коснутся окружности, описанной изъ точки O, въ точкахъ O_1 и O_2. Наконецъ, изъ O_1 и O_2 описываемъ двѣ окружности радіуса OO_1, которыя, кромѣ точки O, пересѣкутся еще въ нѣкоторой точкѣ C. Эта точка и будетъ дѣлить отрѣзокъ AB пополамъ, что нетрудно доказать.

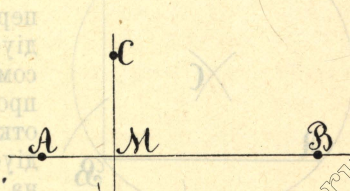


Къ задачѣ № 7.

Точки O_1 и O_2, найденныя какъ точки касанія нѣкоторыхъ окружностей, могутъ быть найдены и какъ точки пересѣченія окружностей. Покажемъ, это построеніе для точки O_1. Изъ точекъ A и G проводимъ двѣ дуги равныхъ радіусовъ, пересѣкающіяся въ точкѣ M. Изъ точекъ A и O проводимъ двѣ дуги тѣмъ же радіусомъ, пересѣкающіяся въ точкѣ M_1 и изъ M_1 радіусомъ MF засѣкаемъ одну изъ дугъ, проведенныхъ изъ A или изъ O радіусомъ AF. Полученная точка будетъ серединой отрѣзка AO. Такъ же находится середина отрѣзка BO.

8-ая задача. Найти точку пересѣченія двухъ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ AB и CD.

Описываемъ изъ A и B радіусами AC и BC двѣ дуги, которыя, кромѣ точки C, пересѣкутся еще въ нѣкоторой точкѣ C_1. Раздѣливъ отрѣзокъ CC_1 пополамъ (7-ая задача), найдемъ, очевидно, точку пересѣченія прямыхъ AB и CD.

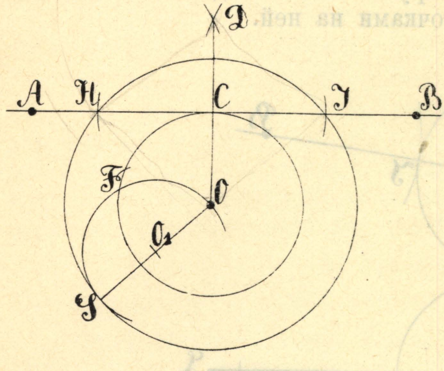


Къ задачѣ № 8.

9-ая задача. Найти точки пересѣченія данной прямой AB съ данной окружностью O.

Прямая AB можетъ не проходить черезъ центръ данной окружности и можетъ проходить черезъ него. Вопросъ о томъ, какой изъ этихъ случаевъ мы имѣемъ, всегда можно рѣшить. Дѣйствительно, описывая изъ точекъ A и B данной прямой дуги, проходящія черезъ центръ O данной окружности, мы получимъ или пересѣкающіяся дуги или касающіяся одна другой. Первое обстоятельство укажетъ намъ на первый случай, второе — на второй.

Согласно съ этимъ замѣчаніемъ мы разсмотримъ рѣшеніе нашей задачи въ этихъ двухъ случаяхъ, причемъ для перваго случая мы рѣшимъ ее безъ помощи постоянной прямой KL и при помощи ея.



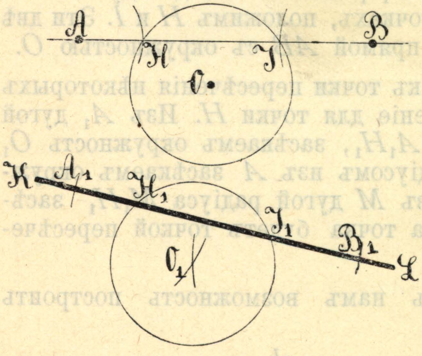
Къ задачѣ № 9.
1-й случай, 1-е рѣшеніе.

1-й случай: Данная прямая не проходитъ черезъ центръ данной окружности.

1-е рѣшеніе — безъ помощи постоянной прямой KL.

Изъ точекъ A и B радіусами AO и BO описываемъ двѣ дуги, которыя, кромѣ точки O, пересѣкутся въ точкѣ D. Пусть точка C дѣлитъ отрѣзокъ OD пополамъ (7 задача). Тогда изъ O радіусомъ OC описываемъ окружность, которую пересѣкаемъ въ точкѣ F окружностью, построенной на какомъ либо радіусѣ OG данной окружности, какъ на діаметрѣ (7 задача). Изъ точки C засѣкаемъ теперь данную окружность дугою радіуса FG въ точкахъ H и I. Эти точки и будутъ точками пересѣченія прямой AB съ окружностью O.

Если точка C окажется на окружности O, то она будетъ точкой касанія прямой AB съ данной окружность. Если же она окажется внѣ этой окружности, то данныя прямыя и окружность не пересѣкаются.



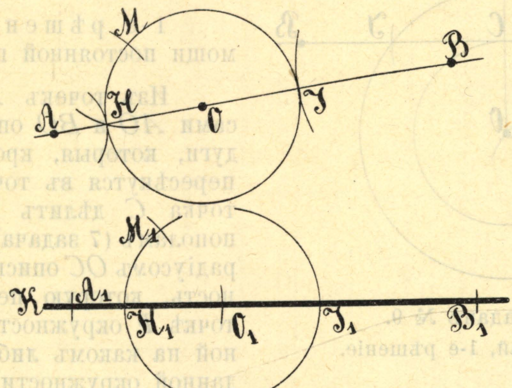
Къ задачѣ № 9.
1-й случай, 2-е рѣшеніе

2-е рѣшеніе — при помощи постоянной прямой KL.

На постоянной прямой KL откладываемъ гдѣ нибудь отрѣзокъ $A_1B_1 = AB$ и изъ точекъ A_1 и B_1 проводимъ дуги радіусовъ AO и BQ. Изъ ихъ точки пересѣченія O_1 проводимъ окружность радіуса данной окружности O, пересѣкающую, положимъ, прямую KL въ точкахъ H_1 и I_1. Засѣкая теперь дугами радіусовъ A_1H_1 и B_1I_1 изъ точекъ A и B данную окружность, получимъ точки пересѣченія H и I данной прямой и данной окружности.

2-й случай. Данная прямая проходитъ черезъ центръ данной окружности.

Найти точки пересѣченія данной прямой съ данной окружностью въ этомъ случаѣ безъ помощи постоянной прямой намъ не удалось. Но если бы оказалосъ, что задачу возможно рѣшить и въ этомъ случаѣ безъ помощи прямой KL, то, какъ увидитъ читатель изъ всего слѣдующаго, можно бы было утверждать, что всѣ построенія, выполнимыя при помощи циркуля и линейки, были бы выполнимы при помощи одного циркуля, причемъ круги можно задавать безъ центровъ, а каждую прямую — двумя точками на ней.



Къ задачѣ № 9. 2-й случай.

На постоянной прямой KL откладываемъ гдѣ нибудь отрѣзокъ $A_1B_1 = AB$ и изъ точки A_1 дугой радіуса AO засѣкаемъ въ O_1 прямую KL. Изъ O_1 описываемъ окружность радіуса данной окружности, — мы получимъ точки пересѣченія ея H_1 и I_1 съ прямой KL. Теперь изъ A и B радіусами A_1H_1 и B_1I_1 описываемъ двѣ дуги, которыя коснутся данной окружности въ точкахъ, положимъ H и I. Эти двѣ точки и будутъ точками пересѣченія прямой AB съ окружностью O.

Точки H и I можно найти и какъ точки пересѣченія нѣкоторыхъ окружностей. Покажемъ такое построеніе для точки H. Изъ A_1 дугой какого либо радіуса, превосходящаго A_1H_1, засѣкаемъ окружность O_1 въ точкѣ M_1 и точно такимъ же радіусомъ изъ A засѣкаемъ окружность O въ точкѣ M. Наконецъ, изъ M дугой радіуса M_1H_1 засѣкаемъ окружность O въ точкѣ H. Эта точка будетъ точкой пересѣченія прямой AB съ окружностью O.

Рѣшенныя выше задачи даютъ намъ возможность построить выраженія

$$a \pm b, \quad \sqrt{a^2 \pm b^2}, \quad \sqrt{ab}, \quad \frac{ab}{c},$$

къ чему мы сейчасъ и перейдемъ.

10-ая задача. По направленію прямой AB, заданной двумя точками A и B, отъ точки A отложить данный отрѣзокъ CD.

Умѣя рѣшать эту задачу, мы, очевидно, легко построимъ первое изъ написанныхъ выше выраженій.

Предложенная задача легко рѣшается. Изъ точки A описываемъ окружность радіуса CD и находимъ точку пересѣченія ея A_1 съ прямой AB (9-ая задача, II-й случай), лежащую по ту же сторону отъ A, по какую лежитъ точка B. Отрѣзокъ $AA_1 = CD$ и отложенъ отъ A по направленію AB.

11-ая задача. Построить гипотенузу прямоугольнаго треугольника, катеты a и b котораго даны.

Чертимъ гдѣ нибудь окружность радіусомъ, равнымъ одному изъ катетовъ, и изъ какого либо конца одного изъ ея радіусовъ возстанавливаемъ перпендикуляръ (6-ая задача), по которому откладываемъ отъ его основанія другой изъ данныхъ катетовъ (9-ая задача, 2-й случай). Отрѣзокъ, соединяющій не сходящіеся концы отложенныхъ такимъ образомъ данныхъ катетовъ, будетъ искомой гипотенузой.

12-ая задача. По даннымъ гипотенузѣ a и по катету b прямоугольнаго треугольника построить другой катетъ его.

Откладываемъ, какъ выше, катетъ b и въ концѣ возстанавливаемъ къ нему перпендикуляръ (6-ая задача). Изъ другого конца катета b описываемъ окружность радіусомъ, равнымъ данной гипотенузѣ a, и находимъ одну изъ точекъ пересѣченія ея съ возстановленнымъ ранѣе перпендикуляромъ (9-ая задача, 1-й случай). Отрѣзокъ перпендикуляра отъ его основанія до этой точки пересѣченія будетъ искомымъ катетомъ.

13-ая задача. Построить отрѣзокъ, средній пропорціональный между двумя данными отрѣзками a и b.

Отъ какой либо точки A откладываемъ по обѣ стороны ея отрѣзки a и b такъ, чтобы они лежали на одной прямой (9-ая задача, 2-й случай). Получившійся отрѣзокъ, равный суммѣ отрѣзковъ a и b, дѣлимъ пополамъ (7-ая задача) и изъ середины его описываемъ окружность радіусомъ $\frac{1}{2}(a+b)$. Изъ точки A возстанавливаемъ перпендикуляръ къ прямой, по направленію которой откладывались отрѣзки a и b (6 задача), и находимъ точку пересѣченія его B съ проведенной окружностью (9-ая задача, 1-ый случай). Отрѣзокъ AB будетъ искомымъ.

14-ая задача. Построить отрѣзокъ, четвертый пропорціональный къ даннымъ отрѣзкамъ a, b и c.

Иначе говоря, мы должны построить отрѣзокъ x удовлетворяющій условію

$$x = \frac{ab}{c}, \quad \text{или} \quad cx = ab.$$

Изъ отрѣзковъ a и b, которые, вообще говоря, неравны, отрѣзокъ a мы всегда можемъ считать большимъ, такъ какъ это дѣло обозначенія.

Поэтому въ нашихъ построеніяхъ, которыя будутъ различны для случаевъ

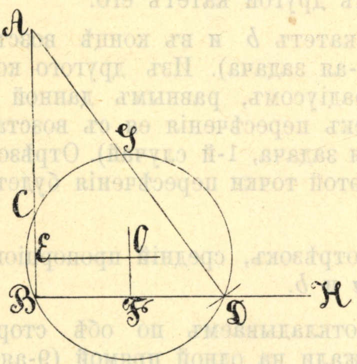
$$c > a \quad \text{и} \quad c < a,$$

мы будемъ всегда считать, что

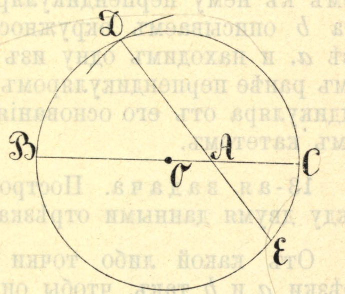
$$a < b.$$

1-й случай: $c > a$.

Отъ произвольной точки A откладываемъ $AB = a$ и $AC = b$ такъ, чтобы точки A, B и C лежали на одной прямой (9-ая задача, 2-й случай). Къ прямой AB въ точкѣ B возстанавливаемъ перпендикуляръ BH (6-ая задача) и, проведя окружность радіуса c изъ точки A, находимъ точку пересѣченія ея D съ BH (9-ая задача, 1-й случай). Дѣлимъ далѣе BC и BD пополамъ (7-ая задача) и изъ срединъ ихъ E и F проводимъ къ нимъ перпендикуляры, которые легко задать точками пересѣченія дугъ равныхъ радіусовъ, проведенныхъ изъ точекъ B, C и D. Найдя точку пересѣченія этихъ перпендикуляровъ O (8-ая задача), опи-



Къ задачѣ № 14, 1-й случай.



Къ задачѣ № 14, 2-й случай.

сываемъ изъ нея радіусомъ OB окружность, которая пройдетъ и черезъ точки C и D. Наконецъ, находимъ точку пересѣченія этой окружности съ прямой AD (9-ая задача); пусть эта точка будетъ G. Тогда

$$x = AG,$$

ибо, какъ извѣстно,

$$AB \,.\, AC = AD \,.\, AG,$$

или

$$ab = AG \,.\, c.$$

2-й случай: $c < a$.

Отъ любой точки A откладываемъ $AB = a$ и $AC = b$ такъ, чтобы точки A, B и C лежали нв одной прямой (9-ая задача, 2-й случай). Затѣмъ дѣлимъ отрѣзокъ BC пополамъ (7-ая задача) и изъ середины его O описываемъ окружность радіусомъ OB, которая пройдетъ и черезъ точку C. Изъ точки A опишемъ дугу радіуса c и пусть она пересѣчетъ окружность O въ точкѣ D. Найдя точку пересѣченія E прямой AD съ окружностью O (9-ая задача, 1-ый случай), мы получимъ отрѣзокъ AE, который будетъ искомымъ, ибо

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE,$$

или

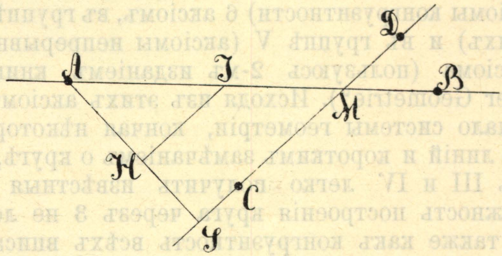
$$ab = AE \cdot c.$$

Задачи 10, 11, 12, 13 и 14 рѣшаютъ вопросъ о построеніи выраженій

$$a \pm b, \quad \sqrt{a^2 \pm b^2}, \quad \sqrt{ab}, \quad \frac{ab}{c}$$

при помощи циркуля и постоянной прямой KL. Мы покажемъ теперь, какъ найти при помощи тѣхъ же средствъ центръ даннаго круга и рѣшимъ для этого слѣдующую вспомогательную задачу, которая имѣетъ значеніе и интересна и сама по себѣ.

15-ая задача. Найти точку пересѣченія двухъ произвольныхъ прямыхъ AB и CD, заданныхъ каждая двумя точками.



Къ задачѣ № 15.

На прямой AB, между точками A и B можно найти какую либо точку I (1-ая задача). Опустимъ далѣе изъ A на CD перпендикуляръ (5-ая задача), найдемъ точку пересѣченія его G съ CD (8-ая задача) и изъ I на AG опустимъ также перпендикуляръ, точка пересѣченія котораго съ AG пусть будетъ H. Находимъ теперь отрѣзокъ x, удовлетворяющій условію:

$$\frac{AI}{x} = \frac{AH}{HG}$$

(14-ая задача, 2-ой случай, такъ какъ $AH < AI$). Отложивъ, наконецъ, отъ точки I по направленію AI отрѣзокъ $IM = x$ (10-ая задача), найдемъ точку пересѣченія M данныхъ прямыхъ AB и CD.

16-ая задача. Найти центръ данной окружности.

Взявъ какія либо три точки на данной окружности и описавъ изъ нихъ пересѣкающіяся дуги одинаковаго радіуса, мы опредѣлимъ двѣ прямыя, на пересѣченіи которыхъ будетъ лежать искомый центръ. Ихъ точку пересѣченія мы найдемъ по способу, предложеному въ предыдущей задачѣ, и найдемъ, слѣдовательно, центръ данной окружности.

Съ выполненіемъ этого послѣдняго построенія можно считать доказаннымъ наше предложеніе о возможности построенія всѣхъ задачъ на построеніе, рѣшающихся при помощи циркуля и линейки, при помощи одного циркуля и постоянной прямой.

Интуиція въ работѣ Д. Гильберта.

Н. Извольскаго.

D. Hilbert „Grundlagen der Geometrie" I.

Д. Гильбертъ поставилъ задачу выдѣлить всѣ аксіомы, на которыхъ покоится развитіе системы геометріи и показать возможность развить эту систему изъ аксіомъ помощью только логики. Всѣ аксіомы Гильбертъ раздѣлилъ на 5 группъ: въ группѣ I (аксіомы сопряженія) 8 аксіомъ, въ группѣ II (аксіомы распредѣленій) 4 аксіомы, въ группѣ III (аксіомы конгруэнтности) 6 аксіомъ, въ группѣ IV одна аксіома (о параллельныхъ) и въ группѣ V (аксіомы непрерывности) 2 аксіомы, — итого 21 аксіома (пользуюсь 2-мъ изданіемъ книги D. Hilbert „Grundlagen der Geometrie"). Исходя изъ этихъ аксіомъ Гильбертъ развиваетъ начало системы геометріи, кончая нѣкоторыми свойствами параллельныхъ линій и короткимъ замѣчаніемъ о кругѣ, что съ помощью аксіомъ группъ III и IV легко получить извѣстныя свойства круга, особенно возможность построенія круга черезъ 3 не лежащія на одной прямой точки, также какъ конгруэнтность всѣхъ вписанныхъ, опирающихся на одну и ту же хорду, угловъ и теорему объ углахъ вписаннаго въ кругъ четырехугольника.

Такимъ образомъ, основная мысль работы Гильберта, точно также какъ и другихъ изслѣдователей основъ геометріи, состоитъ въ возможности отдѣлить логику отъ интуиціи: интуиція устанавливаетъ аксіомы, логика развиваетъ изъ нихъ систему геометріи.

Читая самую работу Гильберта невольно склоняешься къ мысли, что роль интуиціи въ созданіи системы геометріи значительнѣе, чѣмъ это указывается работою Гильберта. Прежде всего возникаетъ сомнѣніе о возможности только логикою получить тѣ свойства круга, которыя отчасти лишь перечисляются Гильбертомъ, а отчасти обозначаются имъ суммарно: „Извѣстныя свойства круга". Другое сомнѣніе возникаетъ на той почвѣ, что въ § 5, озаглавленномъ „Слѣдствія изъ аксіомъ конгруэнтности" авторъ все время прибѣгаетъ къ чертежамъ: если точки и прямыя суть только безформенные объекты, удовлетворяющіе перечисленнымъ аксіомамъ, природа же которыхъ намъ неизвѣстна, да и надобности нѣтъ ее знать, то естественно развивать слѣдствія изъ аксіомъ лишь называя эти объекты именами (a, b, c... A, B, C...), а не прибѣгать къ ихъ образному представленію. Кто знаетъ, можетъ быть благодаря этимъ чертежамъ авторъ вноситъ въ развитіе своихъ „Слѣдствій изъ аксіомъ конгруэнтности" нѣчто (можетъ быть и очень мелкое), не содержащееся въ аксіомахъ, а заимствованное имъ изъ образнаго представленія. Изслѣдовать этотъ вопросъ было бы не безинтересно.

Наконецъ, и указаніе на это является цѣлью настоящей замѣтки, вотъ два мѣста изъ работы Гильберта, гдѣ авторъ съ несомнѣнностью пользуется новыми аксіомами, не входящими въ вышеперечисленныя.

Авторъ даетъ опередѣленіе: „Уголъ, который конгруэнтенъ своему смежному, называется прямымъ угломъ" (§ 6) и затѣмъ доказываетъ теорему (теорема 15) „всѣ прямые углы равны между собою", причемъ указываетъ, что Евклидъ напрасно призналъ это свойство за аксіому. Конечно, говорить о свойствахъ прямыхъ угловъ не имѣло бы смысла, если не было бы выяснено предварительно, что существованіе въ системѣ объектовъ геометріи такихъ угловъ не противорѣчитъ аксіомамъ, которымъ обязана удовлетворить эта система. Этого Гильбертъ не сдѣлалъ и такимъ образомъ онъ здѣсь, не высказывая этого, пользуется одною изъ слѣдующихъ аксіомъ: (a) изъ точки A взятой на прямой a (распадающейся на лучи a' и a'') можно построить лучъ b такъ, чтобы $\angle(a', b) \equiv \angle(b, a'')$, или по крайней мѣрѣ: ($b$) существованіе равныхъ смежныхъ угловъ не противорѣчитъ остальнымъ аксіомамъ. Ученіе о перпендикулярахъ у Гильберта не развивается и поэтому для него возможно ограничиться аксіомою (b), но для полнаго построенія системы геометріи ученіе о перпендикулярахъ настолько существенно, что ограничиться аксіомою (b) не представляется возможнымъ и необходимо принять аксіому (a).

Далѣе Гильбертъ въ § 7 начинаетъ ученіе о параллельныхъ замѣчаніемъ, что изъ выше данныхъ аксіомъ слѣдуетъ извѣстнымъ образомъ Евклидовская теорема, что внѣшній уголъ треугольника больше внѣшняго съ нимъ несмежнаго. На основаніи этой теоремы Гильбертъ устанавливаетъ возможность построенія прямой, не пересѣкающей данной (параллельной) черезъ точку внѣ ея въ плоскости, опредѣляемой данными прямою и точкою.

Но Евклидово доказательство теоремы о внѣшнемъ углѣ опирается на предложеніе, что всякій отрѣзокъ можетъ быть раздѣленъ пополамъ которое доказывается при помощи перваго предложенія Евклида, что на всякомъ отрѣзкѣ можетъ быть построенъ равносторонній треугольникъ. Такое изложеніе къ системѣ Гильберта не примѣнимо, такъ какъ опредѣленіе круга, какъ было указано, дано лишь послѣ ученія о параллельныхъ (въ § 7), при чемъ еще много сомнѣній можетъ вызвать вопросъ о пересѣченіи двухъ круговъ (и Евклидъ, нигдѣ этого не высказывая, принимаетъ за аксіому, что двѣ равныя окружности радіусы которыхъ равны разстоянію между ихъ центрами пересѣкаются. Такимъ образомъ Гильбертъ здѣсь неявно подразумѣваетъ еще аксіому: у всякаго прямолинейнаго отрѣзка есть середина.

Замѣтимъ еще, что Евклидъ имѣетъ твердое основаніе для того, чтобы изучать перпендикуляры и прямые углы: онъ при помощи того же равносторонняго треугольника устанавливаетъ возможность построенія перпендикуляра къ данной прямой. Не такъ поступаетъ Гильбертъ: онъ ограничивается только лишь опредѣленіемъ прямого угла ...

Остановимся еще на педагогическихъ соображеніяхъ: нашъ обычный курсъ геометріи (по учебникамъ А. Киселева, А. Давыдова и др.) говоритъ въ самомъ началѣ и о серединѣ отрѣзка, и о биссекторѣ угла, и о перпендикулярѣ, не установивъ возможности осуществленія этихъ понятій. Не задумываясь, слѣдуетъ отбросить такой порядокъ: надо либо, слѣдуя Евклиду, основать эти понятія на построеніи равносторонняго треугольника, либо дождаться того момента, когда середина отрѣзка, биссекторъ угла и перпендикуляръ сами собою войдутъ въ курсъ при изученіи параллелограмма и ромба. Конечно, построеніе послѣднихъ должно быть опять таки основано на аксіомѣ, что двѣ окружности при выполненіи извѣстныхъ условій (2-ая окружность имѣетъ точки внутри и внѣ первой) пересѣкаются. Поэтому послѣдняя система, не отличаясь по существу отъ Евклидовой, удобнѣе лишь тѣмъ, что не требуетъ спеціальнаго изученія и соотвѣтствующихъ построеній вопросовъ о серединѣ отрѣзка, о бисссекторѣ угла и о перпендикулярѣ.

Къ статьѣ Н. Извольскаго „Интуиція въ работѣ Д. Гильберта“.

Мы дали мѣсто предыдущей статьѣ г. Извольскаго, главнымъ образомъ потому, что замѣчанія объ интуиціи въ системѣ Гильберта намъ приходилось нерѣдко слышать. Такъ въ засѣданіи Математическаго Кружка въ Петербургѣ (въ Педагогическомъ музеѣ военно-учебныхъ заведеній), въ которомъ намъ пришлось присутствовать этой зимой, были высказаны тѣ же сомнѣнія. Пишущій эти строки считаетъ себя обязаннымъ высказаться рѣшительно въ защиту системы Гильберта, хотя онъ и лишенъ возможности привести здѣсь доводы, способные убѣдить тѣхъ, у кого возникли сомнѣнія.

Работа Гильберта, вышедшая уже третьимъ изданіемъ*) не имѣетъ цѣлью развить систему геометріи. Для этого потребовалось бы неизмѣримо больше мѣста. Гильбертъ даетъ только руководящія указанія относительно того, какъ можно построить геометрію на основаніи предложенныхъ имъ аксіомъ. Система Гильберта, конечно, не свалилась съ неба. И до него многообразно въ дѣйствительно научныхъ изслѣдованіяхъ обсуждались тѣ положенія, изъ которыхъ можно было бы развить геометрію. Сюда относятся работы Тили, Паша, Піери, Падуа, Пеано, Кассини, Веронезе

*) Она переводится въ настоящее время и на русскій языкъ.

и др. Въ этихъ работахъ было въ значительной мѣрѣ выяснено, гдѣ лежатъ, такъ сказать, узлы вопроса, развязать которые наиболѣе трудно. Вотъ почему, когда появилась работа Гильберта (съ тѣми исправленіями, которыя сдѣланы во второмъ изданіи), то спеціалистамъ дѣла стало ясно, что задача здѣсь разрѣшена. Поэтому аксіомы Гильберта и были признаны достаточными для логическаго обоснованія геометріи. Чтобы убѣдить въ этомъ лицъ, менѣе знакомыхъ со спеціальной литературой, нужно написать геометрію на указанныхъ Гильбертомъ основаніяхъ. Авторъ настоящей замѣтки написалъ такого рода книгу*) и полагаетъ, что въ ней интуиціи нѣтъ, какъ нѣтъ и чертежей; онъ исходятъ правда изъ иной системы аксіомъ, но это не такъ существенно. Но сочиненіе это также преслѣдовало научныя цѣли и потому является труднымъ для неспеціалистовъ. Мы надѣемся еще вмѣсто второго изданія указанной книги дать болѣе доступное изложеніе предмета. Ясно, что никакого иного пути для этой цѣли нѣтъ. Мы лишены возможности поэтому убѣдить въ этомъ г. Извольскаго, но въ системѣ Гильберта интуиціи дѣйствительно нѣтъ.

В. Каганъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Причины свѣточувствительности селена. Сѣрая крупнозернистая разновидность селена обладаетъ весьма извѣстнымъ замѣчательнымъ свойствомъ дѣлаться лучшимъ проводникомъ электричества подъ вліяніемъ освѣщенія. Многочисленныя работы посвящены какъ изслѣдованіямъ экспериментальнымъ этого свойства, такъ и попыткамъ теоретическаго разъясненія его.

По химической теоріи, высказанной Берндтомъ и разработанной Маркомъ, свѣточувствительный селенъ состоитъ изъ двухъ кристаллическихъ разновидностей, находящихся въ динамическомъ равновѣсіи между собою. При освѣщеніи это равновѣсіе нарушается, возстанавливаясь вновь по прекращеніи освѣщенія. Съ идеями Марка согласенъ Покеттино, недавно опубликовавшій рядъ изслѣдованій надъ свѣточувствительнымъ селеномъ.

Противъ химической теоріи съ цѣлымъ рядомъ вѣсскихъ возраженій выступилъ Рисъ, много работавшій въ этой области, авторъ большой монографіи о селенѣ. Какъ онъ указываетъ, при освѣщеніи селеноваго элемента не происходитъ замѣтныхъ термическихъ процессовъ, необходимыхъ при химическихъ реакціяхъ. Далѣе, при — 185° свѣточувствительность селена почти такова же, что и при комнатной температурѣ. По этимъ и еще инымъ соображеніямъ Рисъ рѣшительно высказывается противъ химической теоріи и склоняется на сторону физической теоріи, еще ранѣе высказанной Гезехусомъ и Шроттомъ. Эта теорія сводитъ дѣйствіе свѣта при освѣщеніи селена къ іонизаціи.

Въ пользу этой теоріи говорятъ, между прочимъ, интересныя данныя опытовъ Вильсона и Пфунда. Вильсонъ нашелъ, что сухое іодистое серебро при ультрафіолетовомъ освѣщеніи даетъ интенсивный фотоэлектрическій эффектъ, т. е. высылаетъ электроны; фіолетовые лучи этого эффекта не

*) „Основанія Геометріи". Опытъ обоснованія Евклидовой геометріи.

вызываютъ. Обратно, на проводимость іодистаго серебра оказываютъ вліяніе фіолетовые лучи въ гораздо большей степени, нежели ультрафіолетовые. Можно думать, что и тѣ и другіе лучи вызываютъ освобожденіе электроновъ, но первые лучи освобождаютъ электроны съ гораздо меньшими скоростями, нежели лучи ультрафіолетовые. Поэтому освѣщеніе первыми лучами вызываетъ увеличеніе проводимости (вслѣдствіе увеличенія числа свободныхъ электроновъ), а освѣщеніе вторыми лучами вызываетъ фотоэлектрическій эффектъ (т. е. вылетаніе электроновъ). Изслѣдованія Пфунда надъ селеномъ привели къ заключенію, что максимальное вліяніе на электропроводность его оказываетъ красный свѣтъ съ длиной волны въ 700 $\mu\mu$.

Согласно теоріи Гезехуса—Шротта—Риса явленіе увеличенія проводимости селена при его освѣщеніи есть явленіе резонанса. При освѣщеніи лучами видимаго свѣта начальная скорость освобождаемыхъ электроновъ не настолько велика, чтобы они вылетали изъ селена; оставаясь внутри металла, они повышаютъ его электропроводность. По прекращеніи освѣщенія электроны вновь присоединяются къ атомамъ. Такъ какъ, по закону Видеманна—Франца, электропроводнось и теплопроводность металловъ измѣняются параллельно, то освѣщеніе селена должно вызывать измѣненіе его теплопроводности; наблюденія это вполнѣ подтверждаютъ.

Новѣйшія изслѣдованія Пигулевскаго надъ аналогичнымъ явленіемъ свѣточувствительности сѣры также подтверждаютъ эту теорію.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей привать-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

ОТДѢЛЪ I.

№ 37 (6 сер). Узнать, что больше, 15^{16} или 16^{15}, безъ непосредственнаго возвышенія въ степень.

А. Кисловъ (Москва).

№ 38 (6 сер.). Доказать, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ справедливо тожество

$$1 - \frac{1}{3\cos^2 x} - \frac{2}{3}\cos x < 0.$$

Я. Назаревскій (Харьковъ).

ОТДѢЛЪ II.

Задачи на изслѣдованіе хода и свойствъ функцій.

№ 15) Доказать, что то основаніе, при которомъ данное положительное число равно своему логариѳму, заключается между 0 и $e^{\frac{1}{e}}$ (e — основаніе натуральныхъ логариѳмовъ).

Р. Витвинскій (Тирасполь).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 471 (5 сер.). *Доказать, что многочленъ*

$$x^{mn+1} - x^{mn} - x + 1,$$

гдѣ m, *и* n *суть цѣлыя и положительныя взаимно простыя числа, дѣлится на многочленъ*

$$x^{m+n} - x^m - x^n + 1.$$

Разсматриваемые многочлены можно представить сотвѣтственно слѣдующимъ образомъ:

$$x^{mn+1} - x^{mn} - x + 1 = (x^{mn} - 1)(x - 1),$$

$$x^{m+n} - x^m - x^n + 1 = (x^m - 1)(x^n - 1).$$

Согласно съ извѣстной формулой дѣлимости имѣемъ:

$$\frac{(x^{mn}-1)(x-1)}{(x^m-1)(x^n-1)} = \frac{x^{mn}-1}{x^m-1}\cdot\frac{x-1}{x^n-1} = \frac{x^{(n-1)m} + x^{(n-2)m} + \cdots + x^{2m} + x^m + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1}. \quad (1)$$

Такъ какъ m и n числа взаимно простыя, то совокупность остатковъ отъ дѣленія чиселъ $(n-1)m$, $(n-2)m, \ldots, 2m$, m на n есть, по извѣстной теоремѣ, нѣкоторая перестановка чиселъ $1, 2, \ldots, n-1$. Итакъ, называя частныя отъ дѣленія указаннаго ряда чиселъ на n соотвѣтственно черезъ $q_{n-1}, q_{n-2}, \cdots, q_2, q_1$, имѣемъ:

$$(n-1)m = nq_{n-1} + r_1,\ (n-2)m = nq_{n-2} + r_2,\ \ldots,\ 2m = nq_2 + r_{n-2},$$

$$m = nq_1 + r_{n-1},$$

гдѣ рядъ чиселъ r_1, r_2, ..., r_{n-1} есть нѣкоторая перестановка чиселъ $1, 2, \ldots, n-1$. Поэтому

$$x^{(n-1)m} + x^{(n-2)m} + \cdots + x^{2m} + x^m + 1 = x^{nq_{n-1}+r_1} - x^{r_1} + x^{nq_{n-2}+r_2} - x^{r_2} + \cdots +$$

$$+ x^{nq_1+r_{n-1}} - x^{r_{n-1}} + x^{r_1} + x^{r_2} + \cdots + x^{r_{n-1}} + 1 = \quad (2)$$

$$(x^{nq_{n-1}} - 1)x^{r_1} + (x^{nq_{n-2}} - 1)x^{r_2} + \cdots + (x^{nq_1} - 1)x^{r_{n-1}} +$$

$$+ (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1).$$

Каждая изъ разностей $x^{nq_{n-1}}-1$, $x^{nq_{n-2}}-1, \ldots, x^{nq_1}-1$ дѣлится на x^n-1, а потому дѣлится и на дѣлителя $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ разности x^n-1. Слѣдовательно, [см. (2)] многочленъ $x^{(n-1)m}+x^{(n-2)m}+\cdots+x^{2m}+x^m+1$ дѣлится на многочленъ $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$, т. е. [см. (1)] многочленъ $x^{mn+1}-x^{mn}-x+1$ дѣлится на многочленъ $x^{m+n}-x^m-x^n+1$.

М. Пистракъ (Лодзь).

№ 476 (5 сер.) *Доказать тожество*

$$\frac{b^2-c^2}{r_b-r_c}+\frac{c^2-a^2}{r_c-r_a}+\frac{a^2-b^2}{r_a-r_b}=4(R+r),$$

гдѣ a, b, c, R, r, r_a, r_b, r_c *суть соотвѣтственно стороны и радіусы круговъ описааннаго, вписаннаго и внѣвписанныхъ.*

Называя черезъ s и p площадь и полупериметръ треугольника, имѣемъ:

$$r_b-r_c=\frac{s}{p-b}+\frac{s}{p-c}=\frac{s(b-c)}{(p-b)(p-c)},$$

откуда

$$\frac{b^2-c^2}{r_b-r_c}=\frac{(b+c)(p-b)(p-c)}{s}=\frac{(2p-a)(p-b)(p-c)}{s}=$$

$$\frac{p(p-b)(p-c)}{s}+\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{s}.$$

Но

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{s}=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{sp}=\frac{s^2}{sp}=\frac{s}{p}=r.$$

Поэтому

$$\frac{b^2-c^2}{r_b-r_c}=\frac{p(p-b)(p-c)}{s}+r \tag{1}$$

и подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\frac{c^2-a^2}{r_b-r_c}=\frac{p(p-c)(p-a)}{s}+r. \tag{2}$$

Складывая равенства (1), (2) и замѣчая, что

$$p(p-b)(p-c)+p(p-c)(p-a)=p(p-c)(2p-a-b)=cp(p-c),$$

получимъ:

$$\frac{b^2-c^2}{r_b-r_c}+\frac{c^2-a^2}{r_b-r_c}=\frac{cp(p-c)}{s}+2r. \tag{3}$$

Но

$$\frac{a^2-b^2}{r_a-r_b}=\frac{(2p-c)(p-a)(p-b)}{s}=\frac{2(p-c)(p-a)(p-b)}{s}+$$

$$+\frac{c(p-a)(p-b)}{s}=\frac{c(p-a)(p-b)}{s}+2r,$$

откуда, такъ какъ

$$c(p-a)(p-b)=c[p^2-p(a+b)+ab]=abc+c[p^2-p(2p-c)]=abc-cp(p-c)$$

и $\dfrac{abc}{4s}=R$.

$$\frac{a^2-b^2}{r_a-r_b}=\frac{abc}{s}-\frac{cp(p-c)}{s}+2r=4R-\frac{cp(p-c)}{s}+2r.$$

Итакъ,

$$\frac{a^2-b^2}{r_a-r_b}=4R-\frac{cp(p-c)}{s}+2r. \qquad (4)$$

Сложивъ формулы (3) и (4), получимъ:

$$\frac{b^2-c^2}{r_b-r_c}+\frac{c^2-a^2}{r_c-r_a}+\frac{a^2-b^2}{r_a-r_b}=4(R+r).$$

М. Добровольскій (Сердобскъ).

№ 477 (5 сер.). *Доказать, что сумма квадратовъ пяти послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ не можетъ быть точнымъ квадратомъ.*

Называя среднее изъ пяти послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ черезъ n, находимъ послѣ обычныхъ преобразованій

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10=5(n^2+2).$$

Изъ полученнаго выраженія $5(n^2+2)$ для изслѣдуемой суммы квадратовъ мы видимъ, что эта сумма вседа дѣлится на 5. Но множитель n^2+2 не кратенъ 5 ни при какомъ цѣломъ значеніи n. Въ самомъ дѣлѣ, цѣлое число n всегда можно представить въ видѣ $5t+r$, гдѣ r имѣетъ одно изъ пяти значеній 0, ± 1, ± 2. Поэтому

$$n^2+2=(5t+r)^2+2=5t(5t+2r)+(r^2+2),$$

гдѣ r имѣетъ одно изъ указанныхъ пяти значеній. Такимъ образомъ число n^2+2 есть сумма кратнаго пяти слагаемаго $5t(5t+2r)$ и слагаемаго r^2+2, имѣющаго одно изъ значеній $0^2+2=2$, $(\pm 1)^2+2=3$, $(\pm 2)^2+2=6$, каждое изъ которыхъ не кратно пяти. Значитъ, n^2+2 не дѣлится на 5, а потому $5(n^2+2)$ не кратно 25. Итакъ, сумма квадратовъ пяти послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ кратна 5, но не кратна квадрата этого простого числа. Слѣдовательно, разсматриваемая сумма не есть точный квадратъ.

М. Добровольскій (Сердобскъ); *Л. Марголисъ* (Петербургъ); *Г. Варкентинъ* (Одесса); *П. Тикуновъ* (Козловъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

А. О. Филипповъ, преподаватель Могилевъ-Подольскаго Коммерческаго училища имени Государя Наслѣдника Цесаревича Алексѣя Николаевича. *Четыре ариѳметическихъ дѣйствія.* Числа натуральныя. Изданіе „Mathesis“. Одесса, 1912. Стр. VII + 87. Ц. 70 к.

В. Л. Некрасовъ. *Основанія сферической тригонометріи.* Часть первая. „Теорія“. Изданіе Томскаго Технологическаго Института. Томскъ, 1912. Стр. XI + 186. Ц. 2 р.

А. Н. Желтухинъ. *Уравненія кривыхъ второго порядка въ геометріи Н. И. Лобачевскаго.* (Изложеніе весьма сжатое). Казань, 1912. Стр. 31.

Сборникъ задачъ и примѣровъ для обученія начальной ариѳметикѣ въ сельской школѣ Выпускъ I. На числа первой сотни съ примѣненіемъ принципа наглядности (сокращенное изданіе задачника „Живыя числа“). Составленъ кружкомъ преподавателей подъ редакціей Н. И. Лаврова. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина Москва, 1912. Стр. 64. Ц. 15 к.

Каталогъ экспонатовъ Педагогическаго Музея военно-учебныхъ заведеній на выставкѣ „Устройство и оборудованіе школы“ 1912 г. С.-Петербургъ, 1912. Стр. 324 Ц. 50 к.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская. № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется