Обложка
ищется

Обложка
ищется

XLVIII Сем. № 3.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 567.

Изъ физики судоходства.

Вопросы прикладной гидродинамики.

В. Б. ф. Чудноховскаго.

Переводъ съ нѣмецкаго.

*(Окончанiе *).*

Особенно замѣчательны слѣдующiе гидропланы **):

a) Гидропланъ Адера (1880 г.) совершенно своеобразной формы: по очертанiю аппаратъ похожъ на птицу съ распростертыми крыльями, которыя такъ же, какъ и хвостъ, состоятъ изъ расположенныхъ въ видѣ рѣшетки наклонныхъ плоскостей, лежащихъ поперечно къ направленiю движенiя;

b) „Автоматъ" Линдена, совершенно не той конструкцiи, что предыдущiй: лодка, снабженная на кормѣ горизонтальнымъ хвостовымъ плавникомъ, который приводится въ движенiе волнами и дѣйствуетъ, какъ двигатель.

*) См. „Вѣстникъ", № 565.

**) Ср. „Die Hydroplane oder Gleitboote" von Ch. Engel въ „Das Motorboot" 6, s. 20-23, 1909.

Во Франціи, гдѣ было построено много различныхъ аппаратовъ этого рода, ихъ называютъ „рикошетами", такъ какъ ихъ характерная черта состоитъ въ томъ, что они движутся рикошетомъ „отъ" воды, хотя и не скачками, какъ брошенный камень или настильно (горизонтально) выпущенное пушечное ядро (чѣмъ преднамѣренно пользовались въ часто употреблявшихся раньше, такъ называемыхъ „рикошетныхъ выстрѣлахъ" *). Какъ дальнѣйшій примѣръ, приведемъ:

c) Рикошетъ графа Ламберта: двѣ расположенныя рядомъ лодки соединены плотомъ изъ 5 параллельныхъ досокъ, наклоненныхъ подъ угломъ 5^0 къ горизонту; на немъ находятся двухцилиндровый моторъ Де-Діонъ-Бутона (De-Dion-Bouton), „обратимый винтъ", т. е. винтъ, снабженный передвижными лопастями для передняго и задняго хода безъ перемѣны направленія вращенія, системы Панара (Panhard). Уже при скорости въ 12 *км.* въ часъ онъ начинаетъ подыматься изъ воды и достигаетъ максимальной скорости въ 35 *км.* въ часъ.

Другіе аппараты этого рода были построены Гартфордомъ (Hartford) и Модзеролемъ (Motherol) въ Англіи, Фаберомъ (Fauber) и М. де-Бонмезономъ (M. de Bonnemaison) во Франціи, Форланини (Forlanini) въ Италіи. „Nautilus" Бонмезона всего 6 *м.* длины съ моторомъ только въ 9 силъ достигъ скорости 40 *км.* въ часъ! — Фоберъ прикрѣпилъ къ плоскому дну по обѣимъ сторонамъ по эдному ряду ступеньчато расположенныхъ небольшихъ плоскостей. — Рикошетъ Антуанетъ, построенный Ле-Ла (Le Las), съ моторомъ въ 50 силъ достигъ даже скорости въ 60 *км.*, или 8 нѣмецкихъ миль въ часъ.

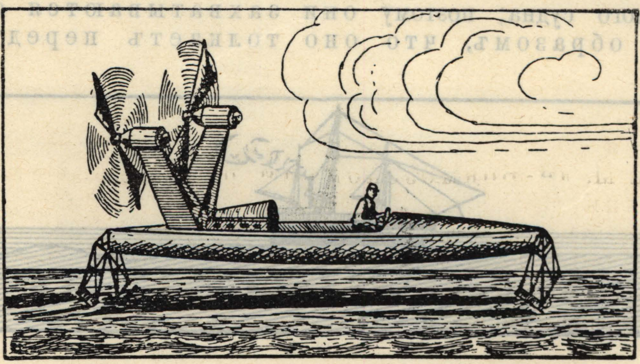
Подобно аппарату Адера причудливой конструкціей отличается гидропланъ, спроектированный и построенный извѣстнымъ авіаторомъ Сантосъ-Дюмономъ (Santos-Dumont); состоитъ онъ изъ одного большого и двухъ меньшихъ полыхъ металлическихъ тѣлъ въ формѣ торпеды; эти послѣднія прикрѣплены съ обѣихъ сторонъ перваго на нѣкоторомъ разстояніи отъ него; на среднемъ находится моторъ, состояшій изъ двухъ рядовъ цилиндровъ, расположенныхъ въ видѣ буквы *V*, затѣмъ на особой подставкѣ воздушный винтъ и позади сидѣнье для пассажира.

Столь же необычную конструкцію имѣетъ, наконецъ, гидропланъ Крокко (Crocco) и Рикальдони (Ricaldoni), фигура 6; длина его — только 8 *м.*, вѣсъ вмѣстѣ съ двумя пассажирами 1500 *кгр.* (около 94 пудовъ), моторъ Байяра (Bayard), дѣлающій 1200 оборотовъ въ минуту, два воздушныхъ винта, 2,5 *м.* въ поперечникѣ каждый, максимальная скорость для воднаго судна совершенно необычная: 70 *км.* въ часъ. Этотъ своеобразный аппаратъ представляетъ правильно построенную лодку, на переднемъ и заднемъ концахъ которой на особыхъ подставкахъ прикрѣплены скользящія поверхности въ формѣ линеекъ; при полной скорости онѣ совершенно

*) Ср. Ramsauer, „Der Rikochettschuss" Dissertation. Kiel, 1907.

приподнимаютъ лодку изъ воды, такъ что не особенно высокія волны свободно проходятъ подъ лодкой! — Изъ сказаннаго достаточно видно, что и въ этой узкой области имѣется уже относительное богатство формъ, нѣкоторыя изъ которыхъ имѣютъ очень причудливый характеръ. Замѣчательно, напримѣръ, то, что здѣсь съ большимъ успѣхомъ были примѣнены воздушные винты, хотя рѣчь идетъ не о воздушныхъ, а о водныхъ судахъ.

Гидропланы, какъ мы видѣли, это — суда, которыя во время движенія занимаютъ совершенно своеобразное положеніе относительно границы двухъ средъ, въ которыхъ они движутся, и усилія ихъ строителей направлены на то, чтобы по возможности заставить ихъ дви-



Фиг. 6.

Гидропланъ Крокко и Рикальдони.

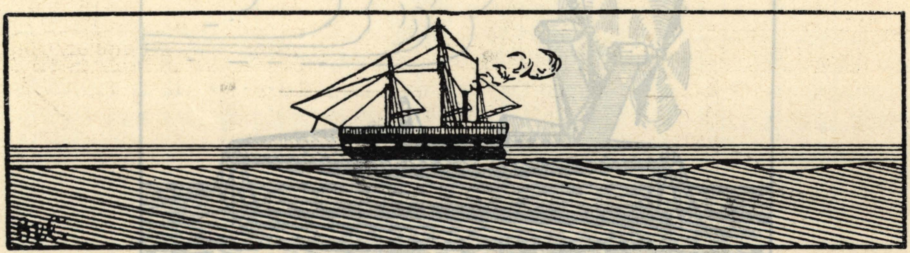
гаться въ средѣ, оказывающей меньшее сопротивленіе; наоборотъ, бываютъ случаи, когда судну приходится имѣть дѣло даже съ тремя средами, а именно, если вода ясно и рѣзко распадается на два слоя. При этихъ условіяхъ возникаютъ замѣчательныя явленія, которыя обозначаютъ общимъ названіемъ мертвая вода; проявляется она въ томъ, что судно вдругъ безъ всякой видимой причины перестаетъ слушаться руля, и въ кильватерѣ (борозда на водѣ, остающаяся позади движущагося судна) появляются своеобразныя „спорящія“, т. е., перекрещивающіяся волны. Тщательныя изслѣдованія В. Экмана (W. Eckman*) въ связи съ лабораторными опытами привели къ слѣдующему объясненію этого явленія:

Мертвая вода появляется лишь тамъ, гдѣ есть условія для существованія двухъ рѣзко различающихся слоевъ воды, такъ напримѣръ, вблизи

*) V. Walfrid Eckman „Über Totwasser“, Ann. d. Hydrographie u. maritim. Meteorologie“ 32, s. 562 — 574, 1904; тамъ же указана и дальнѣйшая литература вопроса.

устьевъ рѣкъ — напримѣръ, Конго — или вблизи движущихся въ экваторіальныхъ широтахъ ледяныхъ полей и горъ; въ такомъ случаѣ благодаря движенію судна возникаютъ двѣ различныхъ системы волнъ одна надъ другой: волны на наружной поверхности и на поверхности раздѣла двухъ слоевъ воды. Послѣднія возникаютъ даже въ томъ случаѣ, если судно и не погружается въ болѣе глубокій слой.

Явленіе мертвой воды съ физической точки зрѣнія сводится къ тому, что сильно увеличивается сопротивленіе движенію, и причина его лежитъ въ образованіи волнъ на поверхности раздѣла, на что и затрачивается извѣстное количество энергіи; скорость ихъ распространенія относительно очень мала, гораздо меньше, чѣмъ скорость движенія самого судна; поэтому они захватываются судномъ такимъ образомъ, что оно толкаетъ передъ собой



Фиг. 7.

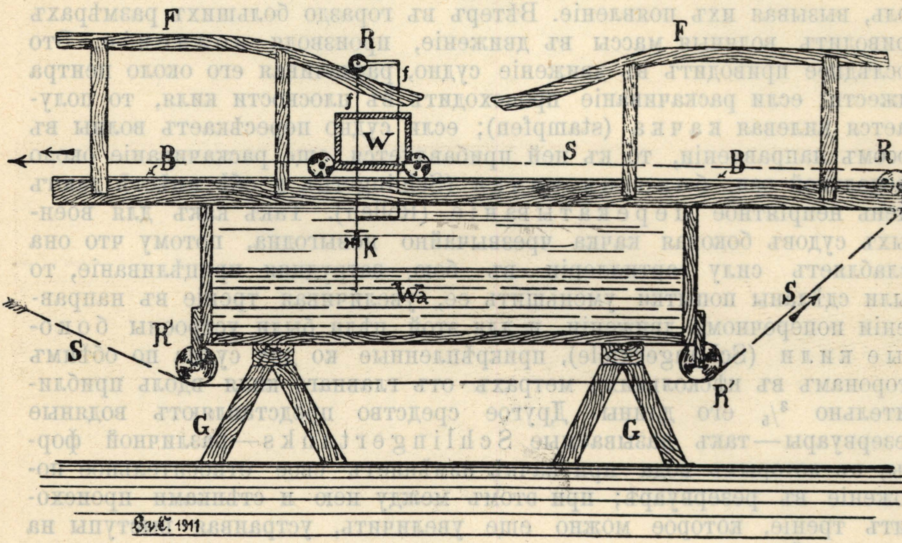
Мертвая вода.

извѣстную массу воды и вслѣдствіе этого находится все время въ такомъ положеніи, какъ будто бы ему приходилось подыматься по наклонной плоскости. За дальнѣйшими подробностями слѣдуетъ обратиться къ упомянутой оригинальной работѣ; для поясненія же сказаннаго можетъ служить фиг. 7. На ней изображено это явленіе въ вертикальномъ разрѣзѣ по изслѣдованіямъ Экмана — l. c. табл. 26, фиг. 1. — Относящееся сюда явленіе упоминаетъ впрочемъ еще Франклинъ, а именно онъ наблюдалъ при слабомъ движеніи судна значительныя движенія на границѣ воды и масла въ лампахъ въ каютѣ *). — Явленіе мертвой воды несомнѣнно одно изъ самыхъ интересныхъ въ области гидродинамики и благодаря своимъ, повидимому, совершенно необъяснимымъ дѣйствіямъ часто давало поводъ въ прежнія времена къ возникновенію различныхъ странныхъ сказокъ.

Въ предыдущемъ не разъ уже указывалось на движенія, возникающія въ сопротивляющейся средѣ непосредственно вблизи движущагося тѣла, ср. фиг. 3; въ послѣднее время Ф. Альборнъ (F. Ahlborn)

*) См. указанныя выше сочиненія Франклина.

произвелъ подробное экспериментальное изслѣдованіе ихъ *). Аппаратъ, которымъ онъ пользовался, изображенъ схематически на фиг. 8 (заимств. изъ цитир. статьи). На подставкахъ *GG* стоитъ призматическая ванна *Wa* съ зеркальными стеклами въ боковыхъ стѣнкахъ и днѣ; подлежащее изслѣдованію тѣло укрѣпляется въ зажимѣ *K*, который при помощи системы прутьевъ *ff* держится на телѣжкѣ *W* и при помощи блока *R* движется по рельсамъ *FF*. Когда телѣжка приводится въ движеніе веревкой *S*, перекинутой черезъ блоки *R'*, то тѣло въ началѣ движенія опускается вертикально въ воду, а въ концѣ бассейна опять подымается вверхъ. *B*, *B* обозначаетъ путь, по которому



Фиг. 8.

Аппаратъ Альборна.

движется телѣжка *W*. Этотъ приборъ даетъ возможность производить опыты надъ самыми различными тѣлами; волны и водовороты могутъ быть сфотографированы и измѣрены на снимкѣ. Цѣнность этихъ опытовъ заключается въ возможность получить системы теченій вокругъ движущихся тѣлъ различной формы и отсюда вывести распредѣленіе давленій, изъ которыхъ и состоитъ сопротивленіе. Альборнъ нашелъ, что оказывающія сопротивленіе теченія въ водѣ и въ воздухѣ принципіально одинаковы и что, слѣдовательно, результаты гидродинамическихъ опытовъ могутъ найти себѣ примѣненіе и въ вопросахъ аэронавтики; всегда наблюдается линія поднятія (Staulinie), которая

---

*) E. Ahlborns „Untersuchungen über den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes“. „Ann. d. Hydrographie“ 32, s. 504—514, 551—558, 1904, съ двумя таблицами.

вмѣстѣ съ „линіей уровня“, проходящей поперекъ направленія движенія и обозначающей переднюю границу неизмѣненнаго уровня, ограничиваетъ „поверхность поднятія“ (Staufläche), являющуюся интеграломъ всѣхъ наличныхъ силъ давленія на поверхности уровня. Форма и величина площади „поверхности поднятія“ зависятъ отъ формы движущихся поверхностей, при плоскихъ поверхностяхъ — отъ ихъ наклона и скорости и въ случаѣ нѣсколько поверхностей — отъ того, какъ онѣ скомбинированы. За дальнѣйшими подробностями приходится отослать къ самой статьѣ Альборна.

По отношенію къ волнамъ судна играютъ не только активную роль, вызывая ихъ появленіе. Вѣтеръ въ гораздо большихъ размѣрахъ приводитъ водяныя массы въ движеніе, производя волненіе. Это послѣднее приводитъ въ движеніе судно, раскачивая его около центра тяжести; если раскачиваніе происходитъ въ плоскости киля, то получается килевая качка (stampfen); если судно пересѣкаетъ волны въ косомъ направленіи, то къ ней прибавляется еще раскачиваніе около продольной оси, боковая качка (Schlingern), и обѣ вмѣстѣ даютъ очень непріятное перекатываніе (Rollen). Такъ какъ для военныхъ судовъ боковая качка чрезвычайно невыгодна, потому что она ослабляетъ силу артиллеріи въ бою, затрудняя прицѣливаніе, то были сдѣланы попытки уменьшить ее, увеличивая треніе въ направленіи поперечномъ движеніи, и для этой цѣли были устроены боковые кили (Schlingerkiele), прикрѣпленные ко дну судна по обѣимъ сторонамъ въ нѣсколькихъ метрахъ отъ главнаго киля вдоль приблизительно $^3/_5$ его длины. Другое средство представляютъ водяные резервуары — такъ называемые Schlingertanks — различной формы, въ которыхъ вода при качкѣ измѣняетъ свое относительное положеніе въ резервуарѣ; при этомъ между нею и стѣнками происходитъ треніе, которое можно еще увеличить, устраивая выступы на стѣнкахъ *).

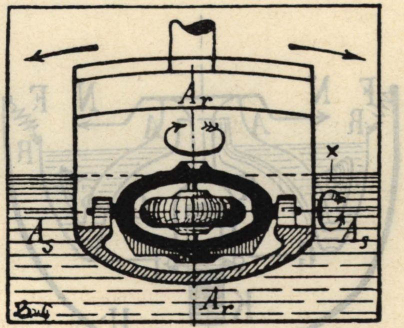
Гораздо болѣе могущественное средство представляетъ волчокъ, извѣстный издавна, какъ дѣтская игрушка подъ названіемъ „юлы“, „кубаря“ и т. п., который можно найти въ физическихъ кабинетахъ подъ именемъ „гироскопа“ или „гиростата“. Это — попросту тѣло, вращающееся около оси, проходящей черезъ его центръ тяжести. Такое тѣло стремится остаться въ своемъ абсолютномъ первоначальномъ положеніи и потому при всякой попыткѣ измѣнить направленіе его оси оказываетъ сопротивленіе, которое при извѣстныхъ условіяхъ можетъ быть очень значительнымъ. Для этого нужно, чтобы моментъ, а слѣдовательно, и масса гиростата были очень велики. Впервые осуществить эту идею имѣло смѣлость „Акціонерное общество почтоваго сообщенія Гамбургъ-Америка“. Въ бывшемъ флотскомъ судне „Seebär“ былъ устроенъ тяжелый гиростатъ, приводимый въ движеніе паромъ;

*) Такіе резервуары были устроены на новомъ пароходѣ акціонернаго общества почтоваго сообщенія между Гамбургомъ и Америкой „Viktoria Luise“, 16500 тоннъ, салонный пароходъ для 500 пассажировъ (B. L. A. 27 сент. 1911 г.).

расположеніе его показано на фиг. 9; равновѣсіе въ состояніи покоя достигается одностороннимъ отягощеніемъ рамы, кромѣ того, устроены — не изображенные на рисункѣ — гидравлическіе тормаза. Пробныя плаванія дали настолько удовлетворительные результаты, что названное общество снабдило такими судовыми гиростатами пароходъ большаго размѣра, обслуживающій курорты Сѣвернаго моря*).

Гораздо большее значеніе имѣетъ другой приборъ, который по всей вѣроятности найдетъ въ будущемъ широкое практическое примѣненіе, а именно „гиростатическій компасъ (Kreiselkompas)!

Старый магнитный компасъ имѣетъ очень много недостатковъ. А именно, 1) онъ указываетъ не вполнѣ точно на (Сѣверный) полюсъ, 2) это отклоненіе его отъ географическаго меридіана различно въ различныхъ мѣстахъ, 3) въ одномъ и томъ же мѣстѣ оно измѣняется съ теченіемъ времени, 4) показанія компаса сильно зависятъ отъ ближайшихъ окружающихъ его тѣлъ и становятся совершенно ненадежными, если компасъ находится на желѣзномъ суднѣ, которое, находясь въ земномъ полѣ, получаетъ еще во время постройки магнитную полярность. Эти вредныя вліянія можно до нѣкоторой степени устранить компенсированіемъ компаса при помощи шаровъ изъ мягкаго желѣза, желѣзныхъ прутьевъ (Flinder-Stange), вспомогательныхъ магнитовъ; кромѣ того, его устанавливаютъ свободно и высоко надъ палубой. Если компасъ со всѣхъ сторонъ окруженъ желѣзомъ — какъ напримѣръ, въ подводныхъ лодкахъ — то онъ вообще перестаетъ давать показанія. Поэтому былъ устроенъ — и съ полнымъ успѣхомъ — гидростатическій компасъ, совершенно независящій отъ магнитныхъ вліяній**). Гиростатическій компасъ системы Аншюцъ-Кемпфе (Anschütz-Kaempfe) снабженъ электрическимъ моторомъ, дѣлающимъ 20 000 оборотовъ въ минуту или 1 200 000 въ часъ; якорь, ось его и ея



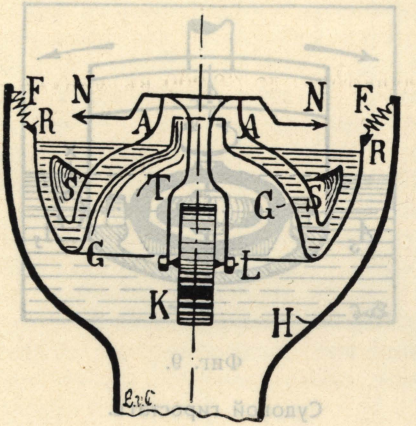
Фиг. 9.

Судовой гиростатъ.

*) Объ этомъ подробнѣе см. статью Б. Донатъ „Волчекъ и его будущее въ техникѣ“ „Вѣстникъ“ №№ 539, 540.

**) Ср. Martienssen, Physikal. Zeitschr. 7, Heft 15. — Maurer, „Der Kreiselkompass“, Die Flotte 14, s. 94 - 96, 1911. — Демонстраціонный опытъ: B. v. Czudnochowski, „Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unterr.“ 15, 141 - 142, 1902. — „Der Kreiselkompass“ по лекціи Dr. Anschütz-Kaempfe въ Герм. Морской Обсерваторіи 25 апрѣля 1909 г. „Ann. d. Hydrographie“ 37, 366 - 369, 1909. — Martienssen, „Die Verwendbarkeit des Rotationskompasses als Ersatz des magn. Kompasses“, „Ann. d. Hyhrographie, 34, 540 - 544, 1906. — K. Schönberg „Instrumente der Kriegs und Handelsmarine“, Ann. d. Hydrographie. 39, 289 - 294, 1911.

подставки сдѣланы изъ особо прочной никкелевой стали. Устройство показано на фиг. 10. Внутри компасной коробки H подвѣшенъ на пружинахъ F и карданов ыхъ кольцахъ R сосудъ G въ видѣ кругового желоба и наполненный ртутью; въ ртути плаваетъ кольцеобразное полое тѣло S, къ которому прикрѣплены сверху на подпоркахъ AA „роза“ N и снизу на обоймицѣ T гиростатъ K. При такой установкѣ компасъ долженъ показывать правильно. Но, когда устанавливается приспособленіе для заглушенія появляющихся колебаній, то и гиростатическій компасъ даетъ извѣстное отклоненіе, такъ называемую ошибку по широтѣ, которая исчезаетъ только на экваторѣ, а на 60^0 сѣверной широты составляетъ уже отклоненіе въ 2^0 къ востоку; происходитъ это отъ того, что послѣдовательныя положенія гиростата въ меридіанѣ непараллельны, и для того, чтобы оставаться въ меридіанѣ, ось гиростата должна повернуться въ пространствѣ. Кромѣ того имѣется еще ошибка отъ движенія (Fahrtfehler); происходитъ она отъ того, что при движеніи судна отъ экватора къ сѣверу или къ югу ось гиростата измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ, а именно относительно земной оси; при движеніи на 16 узловъ къ сѣверу эта ошибка составляетъ на экваторѣ 1^0, на 60^0 широтѣ — 2^0. Наконецъ, нужно упомянуть еще такъ называемыя баллистическія отклоненія; они происходятъ, напримѣръ, при быстрой остановкѣ, когда гиростатъ по инерціи выходитъ изъ своего правильнаго положенія (какъ разъ подъ мѣстомъ прикрѣпленія). Такимъ же образомъ ритмическія движенія судна (напримѣръ, при качкѣ) вызываютъ ошибки въ показаніяхъ компаса. Все это ведетъ къ тому, что гиростатическій компасъ благодаря такой своей чувствительности долженъ быть помѣщенъ въ самомъ спокойномъ мѣстѣ судна; но въ такомъ случаѣ его пришлось бы помѣстить слишкомъ далеко отъ тѣхъ мѣстъ, гдѣ нужны его показанія (напримѣръ, отъ штурвала); поэтому потребовалась передача на разстояніе положеній гиростата; а именно главный компасъ (Mutterkompass) дѣйствуетъ на вторичныя розы (Tochterrosen) или „вторичные компасы“ (Tochterkompasse), что достигается при помощи контактнаго приспособленія на оси мотора въ первомъ компасѣ и трехъ катушекъ, удаленныхъ на 120^0 другъ отъ друга, во вторичныхъ аппаратахъ. Для того, чтобы были замѣтны даже самые незначительные измѣненія курса, устраивается соединеніе главной розы вторичнаго компаса съ еще одной розой съ передачей 1 : 36, такъ что эта послѣдняя дѣлаетъ полный оборотъ при измѣненіи курса



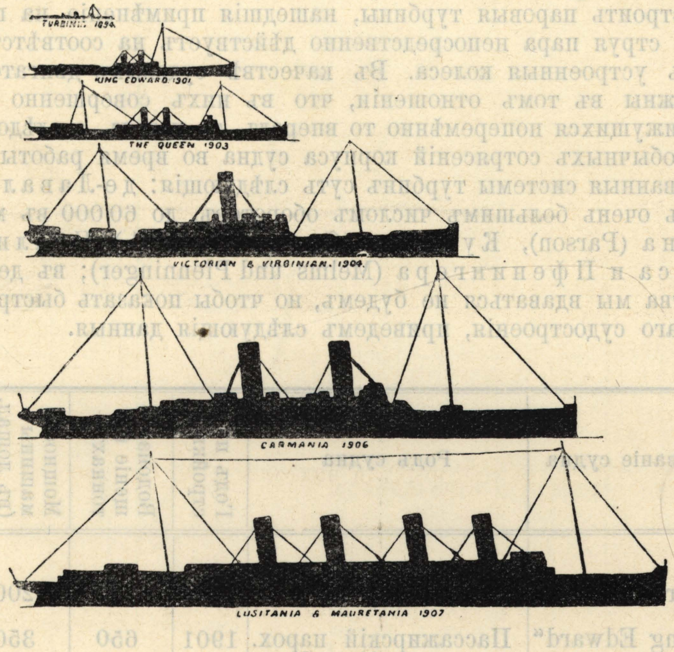
Фиг. 10.
Гиростатическій компасъ

всего на 10°, и такимъ образомъ самыя ничтожныя отклоненія становятся ясно замѣтными. Въ германскомъ военномъ флотѣ нѣкоторое число линейныхъ судовъ, большихъ крейсеровъ и подводныхъ лодокъ снабжены уже такими механическими компасами. Извѣстная фирма Гартманъ и Браунъ (Hartmann u. Braun) во Франкфуртѣ на Майнѣ устраиваетъ гиростатическіе компасы иной системы, съ которыми тоже уже произведенъ рядъ опытовъ на борту судна и не безъ успѣха.

На принципѣ гиростата основаны, строго говоря, и турбины, прототипомъ которыхъ является „паровой шаръ“ Герона и „паровое колесо“ Бранка (Branca). Но только въ послѣднее время удалось построить паровыя турбины, нашедшія примѣненіе на практикѣ; въ нихъ струя пара непосредственно дѣйствуетъ на соотвѣтственнымъ образомъ устроенныя колеса. Въ качествѣ судовыхъ двигателей турбины важны въ томъ отношеніи, что въ нихъ совершенно нѣтъ частей, движущихся попеременно то впередъ, то назадъ, а слѣдовательно, нѣтъ и обычныхъ сотрясеній корпуса судна во время работы машины. Испробованныя системы турбинъ суть слѣдующія: де-Лаваля (de-Laval) — съ очень большимъ числомъ оборотовъ, до 60 000 въ минуту, — Парсона (Parson), Куртиса (Curtis — A. E. G.), Цёлли (Zoelly), Мельмса и Пфенингера (Melms und Pfenninger); въ детали ихъ устройства мы вдаваться не будемъ, но чтобы показать быстрый ростъ турбиннаго судостроенія, приведемъ слѣдующія данныя.

	Названіе судна	Родъ судна	Годъ постройки	Водоизмѣщеніе (въ тоннахъ)	Мощность машины (въ лошад. силахъ)	Скорость (въ узлахъ)
1	„Turbinia“	Опытное судно	1894	44½	2000	34½
2	„King Edward“	Пассажирскій парох.	1901	650	3500	20½
3	„The Queen“	„ „	1903	1750	7600	21¾
4	„Victorian“	„ „	1904	15000	11000	17
5	„Carmania“	Океанскій пароходъ	1905	30000	22500	19
6	„Voiginian“	„ „	1905	15000	11000	17
7	„Lusitania“	„ „	1906	41000	70000	25

Относительная величина этихъ судовъ показана на фиг. 11; отсюда видно, что паровая турбина играетъ уже значительную роль наряду съ старой (поршневой) паровой машиной; дальнѣйшимъ доказательствомъ этого является то, что въ послѣднее время даже военныя суда большого размѣра (линейныя суда и бронированные крейсеры) снабжаются турбинными двигателями. Неудобство турбинъ состоитъ въ томъ, что онѣ могутъ вращаться только въ одномъ направленіи, а потому на военныхъ судахъ для маневрированія приходится устраивать еще особыя турбины для задняго хода. Затѣмъ для полученія большей скорости вращенія необходимо приспособить еще какія-нибудь новыя формы винтовъ, разысканіе которыхъ и является ближайшей задачей упомянутыхъ выше учрежденій для опытовъ съ моделями. А

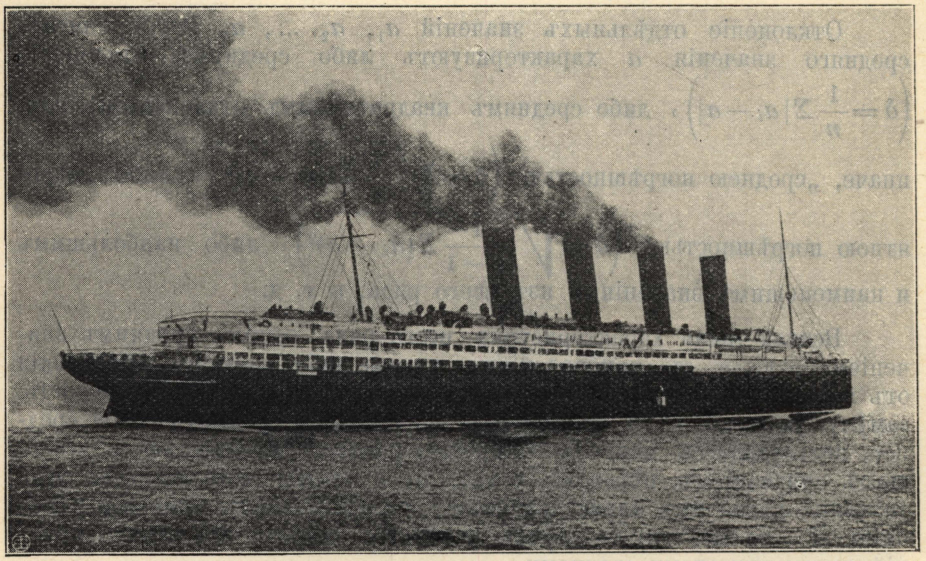


Фиг. 11.

Развитіе турбинныхъ пароходовъ.

именно, всякій винтъ при достаточномъ увеличеніи скорости вращенія ведетъ къ образованію углубленія или пониженія уровня воды непосредственно надъ винтомъ (Cavitation), такъ что, въ концѣ концовъ, ему приходится, хотя бы отчасти, двигаться въ воздухѣ, что немедленно сказывается въ пониженіи его работы.

Предыдущее изложеніе показываетъ, что и въ области судоходства нѣтъ недостатка въ интересныхъ съ физической точки зрѣнія и довольно сложныхъ проблемахъ; и здѣсь также пришлось постепенно перейти отъ чисто эмпирическихъ къ строго научнымъ методамъ и признать за измѣрительными опытами то значеніе, на которое они вправѣ претендовать. Изложенное, конечно, далеко не исчерпываетъ всѣхъ вопросовъ, интересныхъ и для широкой публики; пришлось отло-



Фиг. 12.

Турбинный пароходъ „Lusitania“, 41000 тоннъ, 76000 лошадиныхъ силъ. (На рисункѣ, между прочимъ ясно видны и носовая и кормовая волна).

жить многіе вопросы, которыхъ я надѣюсь коснуться впослѣдствіи и въ другой связи.

Центръ массъ, распредѣленныхъ на части земной поверхности.

Проф. Б. П. Вейнберга.

Если дано большое число значеній $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ какой-нибудь величины A, то для огульной оцѣнки всего такого ряда примѣняютъ различнаго рода „среднія значенія“, сопровождаемыя иногда суммарною характеристикою отклоненій ихъ отъ принятаго средняго.

Наиболѣе обычнымъ „среднимъ значеніемъ“ является среднее ариѳметическое $\left(a = \frac{1}{n} \Sigma a_i\right)$; примѣняются, кромѣ того, и среднее геометрическое $\left(a = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)$, и среднее квадратичное $\left(a = \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma a_i^2}\right)$

и наивѣроятнѣйшее среднее (въ кинетической теоріи газовъ — та скорость, вѣроятность которой наибольшая, и „срединное“ значеніе (если $n = 2m + 1$, то $a = a_{m+1}$) и т. д.

Отклоненіе отдѣльныхъ значеній a_1, a_2, ..., a_n отъ принятаго средняго значенія a характеризуютъ либо среднимъ отклоненіе $\left(\delta = \frac{1}{n} \Sigma \left| a_i - a \right| \right)$, либо среднимъ квадратичнымъ отклоненіемъ или, иначе, „среднею погрѣшностью“ $\left(\delta = \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma (a_i - a)^2} \right)$, либо „вѣроятною погрѣшностью“ $\left(\delta = \sqrt{\frac{1}{n-1} \Sigma (a_i - a)^2} \right)$, либо наибольшимъ и наименьшимъ значеніями изъ всего ряда, и т. д.

Всякая такая характеристика всего ряда однимъ среднимъ значеніемъ — даже съ прибавленіемъ какого либо средняго отклоненія отъ этого средняго — является вполнѣ условною. Эту условность, замѣчу, раздѣляетъ съ остальными средними и ариѳметическое среднее, пользующееся наиболѣе широкою распространенностью и всеобщимъ признаніемъ, вѣроятно, вслѣдствіе простоты того свойства ряда значеній, какое имъ характеризуется: сумма всѣхъ значеній величины A — та же, что въ случаѣ равенства каждаго изъ этихъ значеній ариѳметическому среднему.

Если величина A, о рядѣ значеній a_1, a_2, ..., a_n которой идетъ рѣчь, характеризуетъ собою нѣкоторую точку въ пространствѣ, то вопросъ объ огульной характеристикѣ всего ряда значеній величины A еще болѣе усложняется, — и самый вопросъ о необходимости или желательности такой характеристики поднятъ лишь относительно незначительнаго числа случаевъ, а рѣшенъ — въ смыслѣ условнаго общаго согласія пользоваться тѣмъ или другимъ способомъ для характеристики изучаемаго ряда значеній въ еще меньшемъ числѣ случаевъ.

Какъ примѣръ послѣдней категоріи случаевъ, укажу характеристику распредѣленія неизмѣняемой системы матеріальныхъ массъ m_1, m_2, ..., m_n, расположенныхъ въ точкахъ x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n, по отношенію къ свободному движенію и по отношенію къ внѣшнимъ силамъ, пропорціональнымъ массѣ и параллельнымъ. Общепринято эту совокупность массъ характеризовать центромъ инерціи, координаты x, y, z котораго опредѣляются уравненіями:

$$x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \quad y = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}, \quad z = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i}. \qquad (1)$$

По отношенію же къ вращенію вокругъ нѣкоторой оси такая совокупность характеризуется моментомъ инерціи относительно этой оси — суммою $\Sigma m_i r_i^2$, гдѣ r_i — разстояніе массы m_i отъ этой оси. Въ другихъ задачахъ механики примѣняются и другого рода „моменты“, обычнымъ общимъ типомъ которыхъ являются суммы вида $\Sigma m_i r_i^k$.

Упомяну еще, какъ примѣръ общаго соглашенія, характеристику совокупности магнитныхъ массъ, составляющихъ „магнитъ“, — центромъ магнита, его осью и его моментомъ*).

Въ настоящей замѣткѣ я остановлюсь на мало затронутомъ вопросѣ о центрѣ массъ, распредѣленныхъ на части земной поверхности, — вопросѣ, въ сущности, не болѣе условномъ, чѣмъ тѣ, о которыхъ шла рѣчь выше. Вопросъ этотъ затронутъ въ русской литературѣ Д. И. Менделеевымъ въ его работѣ О центрѣ Россіи (составляющей главу II его труда „Къ познанію Россіи“) по отношенію къ „центру поверхности“ и къ „центру населенности“.

Указавъ, что центръ поверхности „совершенно точно отвѣчаетъ центру тяжести“ и что для небольшихъ частей поверхности земли совершенно достаточно находить центръ тяжести соотвѣтствующаго вырѣзка карты, Менделѣевъ обращаетъ вниманіе на непримѣнимость подобнаго пріема для очень большихъ поверхностей страны. Причины этой непримѣнимости онъ видитъ, во-первыхъ, въ невозможности безъ искаженій изображать часть сферической поверхности на плоскости, а во-вторыхъ, въ томъ, что „истинный центръ тяжести любой части шаровой поверхности лежитъ, очевидно, не на ней, а внутри шара, отыскивается же центръ, лежащій на самой поверхности“. „Поэтому“ — продолжаетъ Менделѣевъ — „для нахожденія центра тяжести поверхности большой страны раціональнѣе всего отыскать сперва положеніе внутри земли находящагося центра тяжести шарообразной поверхности и затѣмъ проведя радіусъ, найти, съ какою точкою поверхности пересѣкается этотъ радіусъ, проведенный черезъ истинный центръ тяжести взятой части земной поверхности“.

Замѣняя площадь числомъ обитателей на ней, Менделѣевъ даетъ аналогичное опредѣленіе и центру населенности. Для нахожденія же на самомъ дѣлѣ, какъ центра поверхности, такъ и центра населенности, онъ предлагаетъ разбить всю страну на мелкіе площади, принять центръ тяжести каждой изъ нихъ за ея центръ и въ дальнѣйшемъ вмѣсто ряда этихъ мелкихъ площадей принимать во вниманіе рядъ точекъ, у каждой изъ которыхъ положеніе опредѣляется широтою l_i и долготою d_i центра соотвѣтствующей площади, а вѣсъ p_i — величиною поверхности этой площади, если рѣчь идетъ о нахо-

---

*) При разсмотрѣніи системы свободныхъ точекъ, между которыми дѣйствуютъ силы, пропорціональныя ихъ массамъ и обратно пропорціональныя k ой степени ихъ разстоянія, могутъ имѣть значеніе „центръ притяженія“ — точка x, y, z, для которой суммы

$$\Sigma \frac{m_i(x-x_i)}{\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right]^{\frac{k+1}{2}}}, \quad \Sigma \frac{m_i(y-y_i)}{\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right]^{\frac{k+1}{2}}}$$

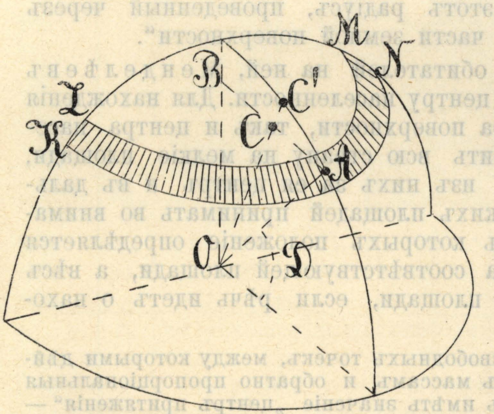
$$\text{и } \Sigma \frac{m_i(z-z_i)}{\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right]^{\frac{k+1}{2}}}$$

одновременно принимаютъ минимальныя значенія, — и „центръ потенціала“ — точка x, y, z, для которой $\Sigma m_i r_i^{-k+1} = min.$

жденіи центра поверхности или количествомъ жителей, населяющихъ эту площадь, если рѣчь идетъ о нахожденіи центра населенности *). Широту L и долготу D проекціи изъ центра земли на ея поверхность центра тяжести совокупности этихъ точекъ даютъ слѣдующія формулы, выведенныя сыномъ Д. И. Менделѣева, И. Д. Менделѣевымъ („Къ познанію Россіи", стр. 132):

$$\operatorname{tg} D = \frac{\Sigma p_i \sin d_i \cos l_i}{\Sigma p_i \cos d_i \cos l_i}, \quad \operatorname{tg} L = \frac{\cos D_i \Sigma p_i \sin l_i}{\Sigma p_i \cos d_i \cos l_i}. \qquad (2)$$

Менделѣевъ отчетливо представлялъ себѣ, что имѣетъ значеніе не только центръ поверхности, понимаемый, какъ проекція центра тяжести изъ центра земли на ея поверхность, но что есть „и многія другія точки, отвѣчающія центрамъ страны въ разныхъ смыслахъ" — и самъ указалъ еще два подобныхъ центра, а именно „срединный пунктъ" (Median point) и „центръ сходимости". Срединный пунктъ есть такая точка, „черезъ которую проходитъ параллельный кругъ, сѣвернѣе и южнѣе котораго располагается одинаковое число жителей страны; меридіанъ же, проходящій черезъ срединный пунктъ, раздѣляетъ жителей также на двѣ равныя половины: одна живетъ на востокъ, а другая половина на западъ отъ этого меридіана". Центръ же сходимости (задача о нахожденіи котораго, по выраженію Менделѣева, „ждетъ своего полнаго рѣшенія") есть та точка, „добраться до которой всѣмъ жителямъ можно, пройдя наименьшую сумму путей".



Но, сознавая условность принятаго имъ пониманія центра страны, какъ проекціи центра тяжести, Менделѣевъ недостаточно критически отнесся къ предложенному имъ опредѣленію, представлявшему собою развитіе идеи о центрѣ поверхности въ приложеніи къ части плоскости.

Въ самомъ дѣлѣ, можно показать, что для странъ, вытянутыхъ по параллелямъ, нѣкоторый центръ страны, — напримѣръ, центръ поверхности ея, вычисленный по формуламъ (2), долженъ оказаться лежащимъ на большей широтѣ, чѣмъ это соотвѣтствуетъ самой идеѣ о центрѣ. Приведу примѣръ, который ясно подтвердилъ бы это несоотвѣтствіе.

Представимъ себѣ часть $KLMN$ поверхности земли, ограниченную двумя параллелями, широты которыхъ $D - d$ и $D + d$, гдѣ d —

---

*) Или, прибавлю отъ себя, числомъ, характеризующимъ другой элементъ, центръ распредѣленія котораго я желаю изучить, — напримѣръ, количество атмосферныхъ осадковъ на данной площади, среднюю температуру потребленіе вина, добычу желѣза, рождаемость, преступность и т. д.

мало, и двумя меридіанами, долготы которыхъ $L-90^0$ и $L+90^0$. Естественно за центръ такой поверхности считать точку A, координаты которой будутъ D и L. Между тѣмъ центръ тяжести площади $KLMN$ будетъ въ точкѣ C, проекція которой C' имѣетъ долготою также L, а широтою

$$D' = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{tg} D\right), \tag{3}$$

что ясно изъ того, что

$$BC = \frac{2}{\pi} R \cos D, \quad OB = R \sin D. \tag{4}$$

Разность между D' и D, равная 0^0 при $D=0^0$ и при $D=90^0$, достигаетъ максимума, равнаго $12^0 50'$ при $D = \arcsin\sqrt{\frac{2\pi-4}{\pi^2-4}} = 38^0 35'$, когда $D' = 51^0 25'$.

Такимъ образомъ положенiе центра страны въ какомъ либо отношенiи, если опредѣлять его по формуламъ (2), можетъ оказаться въ противорѣчiи съ самою идеею о центрѣ*).

Для людей и всякихъ элементовъ на земной поверхности, представляющихъ для насъ интересъ, важны лишь разстоянiя, считаемые по земной поверхности [какъ это имѣлъ въ виду и Менделѣевъ, говоря о „центрѣ сходимости", имѣющемъ, впрочемъ, тотъ же недостатокъ, какъ и центръ, опредѣляемый формулами (2)]. Поэтому сохраняя идею о центрѣ, какъ о центрѣ тяжести, можно, я думаю, считать разстоянiе отъ искомой параллели центра по дугамъ меридiановъ, а разстоянiе отъ искомаго меридiана центра — по дугамъ параллелей. Тогда положенiе центра страны по отношенiю къ точкамъ, вѣса которыхъ суть $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а широты и долготы — соотвѣтственно l_1, d_1; l_2, d_2, ... l_n, d_n, будетъ опредѣляться формулами:

$$L = \frac{\Sigma p_i l_i}{\Sigma p_i}, \quad D = \frac{\Sigma p_i d_i \cos l_i}{\Sigma p_i \cos l_i}. \tag{5}$$

Это равносильно такому изображенiю страны на плоскоти, при которомъ дуги параллелей обращаются — безъ измѣненiя своей длины — въ прямыя линiи, перпендикулярные къ меридiану, проходящему черезъ искомый центръ.

При пользованiи формулами (5) вмѣсто (2) центръ поверхности всей Россiи оказался лежащимъ не „между Обью и Енисеемъ въ Енисейской губернiи, немного южнѣе города Туруханска, лежащаго въ близости отъ сѣвернаго полярнаго круга" ($L = 63^0 29'$, $D = 53^0 0'$), а значительно южнѣе ($L = 57^0 44'$, $D = 54^0 13'$). Центръ же населенiя, которое скучено главнымъ образомъ въ Европейской Россiи, претерпѣлъ отъ замѣны формулъ (2) формулами (5) не такое большое перемѣщенiе къ югу: его

*) Если представить себѣ, что страна занимаетъ цѣлую зону, ограниченную двумя параллелями, то „центръ поверхности страны" окажется внѣ страны и иногда даже очень далеко отъ нея. Такъ, еслибы страна занимала поясъ между экваторомъ и, скажемъ, 10^0 широты, то ея центръ оказался бы въ полюсѣ. *Ред.*

координаты изъ 53°20′ сѣверной широты и 10°23′ восточной долготы превратились въ 52°2′ сѣверной широты и 10°50′ восточной долготы.

Конечно, опредѣленія центра, подобныя всѣмъ приведеннымъ выше, пригодны лишь въ томъ случаѣ, если признавать, что значеніе разстоянія между двумя точками на земной поверхности опредѣляется первою его степенью. Если же, напримѣръ, обращать вниманіе не на время, потребное для доставки себя или груза, а на стоимость перевозки, то показатель степени надъ разстояніемъ правильнѣе было бы считать меньшимъ 1.

Главная цѣль настоящей замѣтки заключается въ томъ, чтобы обратить вниманіе на затронутые въ ней вопросы и вызвать, быть можетъ, обмѣнъ мнѣній по нимъ — обмѣнъ, который особенно полезенъ въ подобныхъ случаяхъ, гдѣ рѣшеніе вопроса представляетъ собою не что иное, какъ просто результатъ взаимнаго соглашенія. Яркій примѣръ этого есть тотъ „принципъ ариѳметическаго средняго", о которомъ я упоминалъ въ началѣ этой замѣтки.

Къ реформѣ преподаванія математики въ средней школѣ.

V.

Элементы теоріи чиселъ въ средней школѣ*).

И. И. Чистякова.

Милостивыя государыни и милостивые государи!

Тяжела участь референта, которому приходится послѣ только что прочитанныхъ докладовъ, касающихся высшихъ областей математической науки, ввести вниманіе аудиторіи въ область самую элементарную — въ область ариѳметики. Мнѣ можно, однако, утѣшиться словами Гаусса: „Математика — царица наукъ и ариѳметика — царица математики".

Подъ именемъ ариѳметики геніальный авторъ „Disquisitiones arithmeticae" разумѣетъ ариѳметику теоретическую, или, точнѣе, теорію чиселъ, — науку, изучающую свойства цѣлыхъ положительныхъ чиселъ. Какъ же поставлено у насъ въ средней школѣ изученіе столь важной области знаній? Какія ему ставятся цѣли и какіе достигаются результаты?

Обыкновенно ариѳметика изучается у насъ (въ учебныхъ заведеніяхъ наиболѣе распространенныхъ типовъ) въ младшихъ классахъ; затѣмъ въ среднихъ классахъ она совершенно не проходится и лишь въ выпускномъ классѣ полагается повторить ее съ прибавленіемъ нѣсколькихъ вопросовъ изъ теоретической ариѳметики. При этомъ преподаваніе ариѳметики въ младшихъ классахъ преслѣдуетъ главнымъ образомъ чисто практическія цѣли и имѣетъ въ виду научить учащихся

*) Докладъ, читанный 31 декабря 1911 г. на І-мъ Всероссійскомъ Съѣздѣ Преподавателей Математики въ С.-Петербургѣ.

производить дѣйствія надъ всевозможными числами — отвлеченными и именованными, цѣлыми и дробными, а также — рѣшать спеціально придуманныя задачи quasi-практическаго характера: на вычисленіе времени, проценты, составленіе смѣси (безъ прибыли и убытка!) и т. д. Единственная статья теоретическаго характера — о дѣлимости чиселъ — проходится обыкновенно тоже лишь съ цѣлью ея дальнѣйшаго практическаго примѣненія и не сопровождается упражненіями, которыя производились бы не механически, а заставляли бы ученика размышлять. Такъ, я замѣчалъ, что учащіеся, прошедшіе этотъ отдѣлъ, все же затрудняются рѣшеніемъ задачъ въ родѣ слѣдующей: „Дѣлимое 100, остатокъ 6, найти дѣлитель и частное". Точно также ихъ затрудняютъ задачи съ конкретнымъ содержаніемъ, въ которыхъ требуется найти общее наименьшее кратное или общій наибольшій дѣлитель нѣсколькихъ чиселъ. Нѣсколько странно, что авторы русскихъ учебниковъ ариѳметики совсѣмъ не приводятъ подобныхъ задачъ; въ иностранныхъ руководствахъ и задачникахъ этому пункту удѣляется гораздо большее вниманіе. Въ среднихъ классахъ, не смотря на прохожденіе алгебры, знакомство со свойствами цѣлыхъ чиселъ тоже не много подвигается впередъ, и свѣдѣніями изъ алгебры учащіеся рѣдко пользуются при ариѳметическихъ выкладкахъ; такъ, при вычисленіи выраженій вида $\sqrt{a^2 - b^2}$ лишь немногіе прибѣгаютъ къ разложенію на множители подкореннаго выраженія. Мнѣ кажется, что едва ли не все увеличеніе ариѳметическихъ свѣдѣній отъ прохожденія математики въ среднихъ классахъ состоитъ въ томъ, что учащіеся запоминаютъ результаты возведенія въ квадратъ нѣкоторыхъ простѣйшихъ чиселъ и результаты извлеченія корня изъ простѣйшихъ точныхъ квадратовъ. Въ выпускномъ классѣ полагается повторять ариѳметику съ прибавленіемъ нѣкоторыхъ статей теоретическаго характера; это является какъ бы подведеніемъ фундамента подъ ариѳметическія знанія, но на все это отводится крайне мало времени, едва ли болѣе $^1/_2$ часа въ недѣлю. Оффиціальная программа гимназій при этомъ гласитъ: „при повтореніи ариѳметики доказываются основныя теоремы о дѣлимости чиселъ; теоремы, на которыхъ основывается нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго двумя способами; теоремы, дающія необходимыя и достаточныя условія обращенія обыкновенныхъ несократимыхъ дробей въ десятичныя конечныя и періодическія". Въ реальныхъ училищахъ въ курсъ ариѳметики VII класса включено еще рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій въ числахъ цѣлыхъ и положительныхъ; въ программахъ же гимназій та же самая статья отнесена къ алгебрѣ; такое колебаніе, конечно, весьма характерно. Желая знать, что именно разумѣется въ программѣ подъ названіемъ основныхъ теоремъ о дѣлимости чиселъ, я навелъ справки въ оффиціальной объяснительной запискѣ къ программѣ гимназій и былъ не мало удивленъ, ибо тамъ сказано слѣдующее: „Подъ теоремами о дѣлимости чиселъ слѣдуетъ разумѣть двѣ слѣдующія: 1) если число дѣлитъ каждое слагаемое порознь, то оно дѣлитъ и сумму ихъ; 2) если число дѣлитъ нацѣло сумму двухъ слагаемыхъ и одно изъ нихъ, то оно раздѣлитъ и другое слагаемое; эти двѣ теоремы даютъ необходимое и достаточное условіе дѣлимости на данное число. Подъ теоремами, на которыхъ основывается нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго должно понимать теоремы, служащія для доказательства возможности разложить число на первоначальныхъ множителей только однимъ способомъ".

Независимо отъ того, что перечисленныя теоремы представляютъ собою весьма незначительное пополненіе элементарнаго курса едва ли даже и самую формулировку ихъ можно признать вполнѣ удачной и ясной. Такъ, 1-ая теорема позволяетъ судить о дѣлимости суммы, а 2-я — одного слагаемаго; обѣ вмѣстѣ онѣ не могутъ относиться къ одному и тому же случаю. Да и вообще всякія теоремы о дѣлимости должны выводиться изъ разсмотрѣнія дѣленія съ остаткомъ; (такова въ алгебрѣ теорема о дѣлимости цѣлаго многочлена, расположеннаго по убывающимъ степенямъ перемѣннаго x, на двучленъ $(x - a)$. Но я ужъ не буду входить въ болѣе подробную критику этого бѣднаго матеріала; скажу только о результатахъ. Присутствуя на экзаменахъ гимназистовъ и реалистовъ выпускного класса по ариѳметикѣ, я вынесъ впечатлѣніе, что она является для нихъ обремененіемъ, но какого либо расширенія знакомства со свойствами чиселъ они отъ изученія теоремъ о числахъ совершенно не получаютъ; простѣйшей задачи, относящейся къ перечисленнымъ статьямъ, они рѣшить не могутъ. Когда, напримѣръ, я предлагалъ такую задачу: „сумма двухъ чиселъ равна 96, а общій наибольшій дѣлитель ихъ 12, найти эти числа", то обыкновенно учащіеся не знали даже, какъ къ рѣшенію ея и приступить.

Въ общемъ развитіе числовыхъ понятій у абитуріентовъ нашихъ среднихъ учебныхъ заведеній весьма слабо. Не увеличивается оно и въ тѣхъ случаяхъ, когда они пытаются сами пройти теоретическую ариѳметику болѣе подробно. Такъ, на конкурсныхъ экзаменахъ въ Московскомъ Инженерномъ училищѣ, въ которыхъ я принимаю участіе въ качествѣ экзаменатора, требуется знаніе теоретической ариѳметики по довольно широкой программѣ, и учащіеся знаютъ множество теоремъ о числахъ, но достаточнаго пониманія свойствъ цѣлыхъ чиселъ я не замѣчалъ. Слабость числовыхъ представленій и понятій у нашихъ учащихся напоминаетъ часто наблюдающееся у нихъ же отсутствіе стереометрическихъ представленій. На вопросъ: будетъ ли двугранный уголъ между боковыми гранями правильной четыреугольной пирамиды острымъ, прямымъ или тупымъ, можно услышать и тотъ, и другой, и третій отвѣтъ. На вопросъ, будетъ ли $\sqrt[10]{10}$ меньше, равенъ или больше 1, учащіеся могутъ дать всѣ три отвѣта. Вообще можно констатировать печальный фактъ, что наши учащіеся знаютъ о свойствахъ цѣлыхъ чиселъ весьма мало, — менѣе, пожалуй, чѣмъ о логариѳмахъ, ирраціональныхъ количествахъ или о непрерывныхъ дробяхъ. Не помогаетъ дѣлу и прохожденіе неопредѣленныхъ уравненій, куда бы ихъ ни ставила оффиціальная программа, — въ курсъ алгебры или въ курсъ ариѳметики.

Между тѣмъ, такое пренебреженіе къ знанію свойствъ цѣлыхъ чиселъ идетъ въ разрѣзъ, прежде всего, съ исторіей науки. Свойствами цѣлыхъ чиселъ: дѣлимостью, простѣйшими числовыми функціями и пр.

люди интересовались во всѣ времена. Вокругъ нихъ создавались суевѣрія, но возникали и глубокія философскія ученія. Изученіе свойствъ чиселъ имѣло важное значеніе для развитія всѣхъ частей математической науки. Вспомнимъ, что, напримѣръ, самое открытіе Пиѳагоровой теоремы ставится въ связь съ случайнымъ открытіемъ подходящей комбинаціи цѣлыхъ чиселъ. Въ дальнѣйшемъ теорія чиселъ всегда имѣла самое благотворное вліяніе на развитіе анализа. Совсѣмъ недавно Георгъ Канторъ изъ разсмотрѣнія натуральнаго ряда чиселъ создалъ ученіе о множествахъ и числахъ трансфинитныхъ, а Кронекеръ высказалъ увѣренность, что можно вывести всѣ математическія понятія изъ единаго понятія о цѣломъ и положительномъ числѣ.

Несомнѣнно, далѣе, что теорія чиселъ имѣетъ не менѣе важное развивающее значеніе, чѣмъ многіе отдѣлы математики, изучаемые въ настоящее время, такъ какъ объектомъ здѣсь является цѣлое положительное число, т. е. понятіе наиболѣе простое, съ которымъ учащіеся знакомятся ранѣе всего. Ознакомленіе со свойствами чиселъ часто увлекаетъ учащихся и представляетъ для нихъ большой интересъ. Это подтверждаютъ, напримѣръ, результаты извѣстной анкеты о методѣ математической работы, предпринятой въ 1905 г. между математиками различныхъ странъ журналомъ „L'enseignement mathématique". Первый вопросъ этой анкеты былъ: въ какомъ возрастѣ, по вашимъ воспоминаніямъ, и при какихъ обстоятельствахъ у васъ пробудился интересъ къ математикѣ? И изъ полученныхъ отвѣтовъ оказывается, что этотъ интересъ возникаетъ чаще всего въ возрастѣ отъ 11 до 15 лѣтъ, преимущественно при рѣшеніи задачъ относительно свойствъ чиселъ. Я не имѣлъ смѣлости принять участіе въ названной анкетѣ, но я живо помню моментъ, когда у меня пробудился интересъ къ математикѣ: во 2-мъ классѣ гимназіи мнѣ попалась задача: доказать, что всякое простое число увеличенное, либо уменьшенное, единицей, дѣлится на 6. Мнѣ удалось это доказать, что доставило мнѣ тогда большое удовольствіе. Вскорѣ затѣмъ меня заинтересовалъ вопросъ, почему 5-я степень всякаго числа оканчивается на ту же цифру, какъ и 1-я; и хотя доказать этого мнѣ уже не удалось, но интересъ къ математикѣ у меня съ тѣхъ поръ уже не ослабѣвалъ. Въ біографіи недавно скончавшагося извѣстнаго русскаго ученаго, профессора Г. Ѳ. Вороного, сообщается, что онъ получилъ интересъ къ математикѣ, когда ему удалось рѣшить задачу изъ области теоріи чиселъ, предложенную въ „Журналѣ Элементарной Математики", издававшемся профессоромъ В. П. Ермаковымъ, и это опредѣлило направленіе научной дѣятельности Г. Ѳ. Вороного на всю жизнь.

На задачахъ, касающихся свойствъ чиселъ, я позволю себѣ остановиться болѣе подробно. Вопросы подобнаго рода почти не встрѣчаются въ нашихъ алгебраическихъ и ариѳметическихъ задачникахъ, но они во множествѣ разсѣяны по математическимъ хрестоматіямъ, встрѣчаются въ сборникахъ темъ, предлагавшихся на конкурсныхъ экзаменахъ, распространяются между учащимися путемъ устнаго преподанія. Онѣ во множествѣ фигурируютъ въ математическихъ журналахъ, напримѣръ, въ „L'Education mathématique" и „Journal de mathématiques élémentaires“, издаваемыхъ Vuibert'омъ въ Парижѣ, въ „Zeitschrift für mathem. und natur. Unterricht“. Hoffmann'а и проч. Онѣ составляютъ значительный процентъ задачъ, помѣщаемыхъ для учащихся въ журналѣ „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики“. Названныя задачи обыкновенно касаются вида чиселъ. дѣлящихся на то или иное число, простѣйшихъ числовыхъ функцій, раціональныхъ выраженій для элементовъ треугольниковъ и пр. Для рѣшенія такихъ задачъ учащіеся, не знакомые съ элементами теоріи чиселъ, не имѣютъ общихъ методовъ и должны пользоваться разными искусственными пріемами, въ родѣ разложенія на множителей, сложныхъ алгебраическихъ преобразованій и т. п. Несомнѣнно, что это имѣетъ и выгодную сторону, такъ какъ изощряется изобрѣтательность учащихся, и невыгодную, такъ какъ много энергіи тратится на преодолѣваніе затрудненій, которыя при большемъ запасѣ свѣдѣній изъ теоретической ариѳметики не возникали бы. Получается нѣкоторая аналогія съ тѣмъ, что недавно еще имѣло мѣсто въ области задачъ на построеніе: онѣ тоже раньше рѣшались безъ общихъ методовъ, каждая въ отдѣльности; есть и сейчасъ еще сборники задачъ на построеніе, въ которыхъ онѣ не приведены въ систему по способамъ рѣшенія. Однако, нѣсколько десятилѣтій назадъ Петерсенъ заграницею и И. И. Александровъ у насъ въ Россіи разработали общіе методы рѣшенія, и съ тѣхъ поръ оно было поставлено на твердый фундаментъ и сдѣлалось полезною частью учебнаго матеріала. Подобнымъ же подведеніемъ фундамента подъ задачи названнаго типа было бы ознакомленіе учащихся съ элементами теоріи чиселъ. Оно позволило бы углубить и расширить эту область упражненій, которая пока по необходимости касается весьма ограниченнаго круга темъ. Но въ пользу введенія въ средне-учебный курсъ свѣдѣній изъ теоріи чиселъ, за которое я высказываюсь, настоящее время можно привести и многіе другіе аргументы. Однимъ изъ нихъ является и предстоящее введеніе въ курсъ средней школы понятія о функціяхъ и объ ихъ измѣненіи. При этомъ необходимо придется пользоваться понятіемъ о непрерывности. Но было бы слишкомъ одностороннимъ знакомить учениковъ только съ функціями, обладающими свойствами непрерывнаго измѣненія. Существуетъ множество и прерывныхъ функцій; прерывность измѣненія величинъ наблюдается и въ природѣ. Элементарная теорія чиселъ даетъ намъ въ числовыхъ функціяхъ простѣйшіе, понятные для всѣхъ примѣры величинъ, измѣняющихся прерывно, и ознакомленіе съ ними учащихся будетъ содѣйствовать болѣе полному ихъ математическому развитію. Напомню, что покойный профессоръ Московскаго Университета Н. В. Бугаевъ придавалъ чрезвычайно важное значеніе теоріи прерывныхъ функцій и теоріи чиселъ, какъ простѣйшему ея виду, предсказывалъ ей важное будущее и ставилъ ученіе о прерывности въ связь съ глубокими философскими проблемами. Въ настоящее время эта идея находитъ все большее признаніе и теорія чиселъ изучается параллельно съ анализомъ, не смотря на преобладающіе успѣхи послѣдняго. Въ 1908 г. докторъ Вольфскелль въ Дармштадтѣ завѣщалъ, какъ извѣстно, 100 000 марокъ тому, кто дастъ доказательство знаменитаго предложенія Ферм а та о невозможности рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ уравненія $x^n + y^n = z^n$. Это повело къ оживленію интереса къ теоріи чиселъ среди большой публики; отзвуки этого оживленія черезъ общую прессу доходятъ, конечно, и до нашихъ учащихся,—и они такимъ несовершеннымъ путемъ узнаютъ впервые о существованіи науки — теоріи чиселъ и ея великихъ задачъ.

Изложу теперь свое предложеніе въ конкретной формѣ. Сущность его сводится къ слѣдующему: теоретическая ариѳметика поставлена у насъ совершенно неудовлетворительно и знанія свойствъ цѣлыхъ чиселъ учащіеся изъ школы не выносятъ. Поэтому я предлагаю ввести явно въ курсъ математики изученіе началъ теоріи чиселъ вмѣсто ея суррогатовъ. Я разумѣю здѣсь въ частности понятіе о простѣйшихъ числовыхъ функціяхъ, теорію сравненій 1-й степени, теоремы Эйлера, Ферматa и Вильсона, понятіе о степенныхъ вычетахъ. Время для прохожденія этихъ статей могло бы быть использовано то самое, которое до сихъ поръ тратилось на изученіе теоремъ о числахъ и неопредѣленныхъ уравненій. Изучать теорію чиселъ можно въ одномъ изъ старшихъ классовъ, съ надлежащими упражненіями, матеріалу для которыхъ, какъ было упомянуто, накопилось множество. Въ младшихъ же классахъ слѣдуетъ стремиться къ возможно тѣсной связи между ариѳметикой и алгеброй и къ тому, чтобы алгебраическія свѣдѣнія попутно утилизировались для изученія свойствъ чиселъ. Такъ, къ большому числу задачъ о числахъ приводятъ формулы сокращеннаго умноженія; обширное примѣненіе можетъ имѣть статья о разложеніи алгебраическихъ выраженій на множители, которая въ этомъ направленіи сейчасъ почти не утилизируется и пр.

Я долженъ указать, что попытки введенія элементовъ теоріи чиселъ въ курсъ ариѳметики дѣлаются на Западѣ уже и сейчасъ. И подобно тому, какъ введеніе началъ анализа и аналитической геометріи въ средне-учебный курсъ впервые имѣло мѣсто во Франціи, тамъ же дѣлаются и первыя попытки введенія теоріи чиселъ. Такъ, укажу на прекрасный курсъ Humbert'a „Traité d'arithmétique“ Въ этой книгѣ въ изложеніе ариѳметики введена теорія сравненій 1-ой степени, теоремы Эйлера, Фермата и Вильсона, понятія о простѣйшихъ числовыхъ функціяхъ и степенныхъ вычетахъ, теорема о разложеніи цѣлаго числа на 4 квадрара и пр., имѣется и нѣкоторое число соотвѣтствующихъ упражненій. Предисловіе къ книгѣ написано недавно скончавшимся извѣстнымъ ученымъ Tannery, который горячо привѣтствуетъ идею Humbert'a ввести въ изложеніе ариѳметики статьи изъ теоріи чиселъ. Еще съ большими подробностями Tannery ввелъ теорію чиселъ, въ видѣ приложенія, и въ свой извѣстный курсъ ариѳметики; у него есть даже доказательство закона взаимности простыхъ чиселъ и цѣнныя историческія примѣчанія. Изъ своего личнаго опыта я могу еще сообщить, что мнѣ приходилось знакомить учащихся съ элементами теоріи чиселъ, при чемъ они ее усваивали легко и съ большою охотою. Нерѣдко съ этою цѣлью я давалъ отдѣльнымъ учащимся книгу профессора А. В. Васильева: „Введеніе въ анализъ“, при чемъ они читали ее съ горячимъ увлеченіемъ, какъ, впрочемъ и всякій, кто только имѣлъ эту прекрасную книгу въ рукахъ.

Таковы мои аргументы въ пользу введенія элементовъ теоріи чиселъ въ среднюю школу. Но я могу прибавить еще, что теорія чиселъ есть та именно область математической науки, въ которой съ особеннымъ успѣхомъ подвизались русскіе ученые. Напомню о замѣчательныхъ трудахъ въ этой области Буняковскаго, Чебышева, Бугаева, Вороного и др., не говоря о нынѣ здравствующихъ ученыхъ. Труды ихъ составляютъ честь и гордость русской математической науки, и наилучшимъ возданіемъ ихъ памяти было бы введеніе основъ теоріи чиселъ въ среднюю школу.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей привагъ-доцента Е. Л. Буницкаго.

№ 42 (6 сер.). Доказать, что при нечетномъ n уравненіе

$$x^n + y^n = z^n$$

неразрѣшимо въ цѣлыхъ числахъ, если z есть простое число или степень простого числа, при условіи принимать во вниманіе лишь тѣ рѣшенія, въ которыхъ значеніе каждаго изъ неизвѣстныхъ отлично отъ нуля.

И. Грингаузъ (Саратовъ).

№ 43 (6 сер.) Доказать неравенство

$$a^3 + b^3 \geqq a^2 b + ab^2$$

при положительныхъ значеніяхъ a и b. Какому соотношенію между a и b отвѣчаетъ знакъ равенства?

А. Кисловъ (Москва).

№ 44 (6 сер.). Функція отъ x

$$\frac{3x^2 + a}{x + 3}.$$

гдѣ a — постоянное количество, имѣетъ maximum, равный (—42). Опредѣлить a и найти minimum той же функціи.

Б. Щиголевъ (Варшава).

№ 45 (6 сер.). Вычислить сумму

$$\cos(2-1)\omega + \cos(2^2-1)\omega + \cdots + \cos(2^n-1)\omega.$$

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 475 (5 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$x^2 - y = a(xy - 1),$$

$$y^2 - x = b(xy - 1).$$

Запишемъ первое уравненіе въ видѣ $x^2 - axy = y - a$, вычтемъ изъ обѣихъ частей по bx и вынесемъ x въ первой части за скобки. Тогда первое уравненіе принимаетъ видъ:

$$x(x - ay - b) = y - bx - a. \qquad (1)$$

Послѣ ряда аналогичныхъ преобразованій второе уравненіе принимаетъ видъ:

$$y(y - bx - a) = x - ay - b. \qquad (2)$$

Подставивъ значеніе $y - bx - a$ изъ уравненія (1) въ уравненіе (2), получимъ:

$$xy(y - bx - a) = y - bx - a, \qquad (3)$$

или

$$(xy - 1)(y - bx - a) = 0. \qquad (4)$$

Наоборотъ, подставляя значеніе $y - bx - a$ изъ уравненія (3) въ уравненіе (1), находимъ:

$$x(x - ay - b) = xy(y - bx - a), \quad \text{или} \quad x[y(y - bx - a) - (x - ay - b)] = 0,$$

откуда

$$y(y - bx - a) = x - ay - b, \quad \text{если} \quad x \neq 0.$$

Итакъ, изъ системы равенствъ (1) и (3), вытекаетъ система (1) и (4), если $x \neq 0$, а потому системы (1), (3) и (1), (4) равносильны, если $x \neq 0$. Рѣшимъ теперь систему уравненій (1), (4). Изъ уравненія (4) имѣемъ $xy - 1 = 0$ или $y - bx - a = 0$, т. е.

$$xy = 1 \quad (5) \qquad \text{или} \quad y = bx + a. \qquad (6)$$

Подставивъ значеніе y изъ уравненія (5) въ уравненіе (1) или же, что удобнѣе, въ первое изъ данныхъ уравненій, получимъ $x^2 - \frac{1}{x} = 0$, $x^3 - 1 = 0$, откуда $x = 1$ или $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, т. е.

$$x_1 = \alpha, \qquad (7)$$

гдѣ α есть одно изъ трехъ значеній корня кубичнаго изъ единицы.

Такъ какъ изъ уравненія (5) $y = \frac{1}{x}$, то $y_1 = \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^3}{\alpha} = \alpha^2$. Итакъ, формула (7) и

$$y_1 = \alpha^2 \qquad (8)$$

даютъ рѣшенія системы уравненій (1), (4), т. е. данной системы (такъ какъ $\alpha \neq 0$). Подставивъ значеніе y изъ уравненія (6) въ уравненіе (1), находимъ:

$$x^2(1 - ab) - (a^2 + b)x = 0. \qquad (9)$$

Изъ этого уравненія, если $1-ab\neq 0$, имѣемъ:

$$x_2=\frac{a^2+b}{1-ab},\ (10)\qquad \text{или}\quad x_3=0,\qquad (11)$$

откуда [см. (6)] находимъ соотвѣтственно:

$$y_2=\frac{a+b^2}{1-ab},\ (12)\qquad y_3=a.\qquad (13)$$

Итакъ, формулы (7), (8); (10), (12); (11), (13) даютъ всѣ рѣшенія системы (1), (4), при чемъ формулы (10), (12) предполагаютъ, что $1-ab\neq 0$ (такъ что для полноты рѣшенія случай, когда $1-ab=0$, надо изслѣдовать при рѣшеніи системы (1), (4) особо). Обратимся теперь къ системѣ (1), (2), равносильной данной системѣ уравненій. Выше было показано, что система (1), (2) равносильна системѣ (1), (4), если $x\neq 0$. Поэтому прежде всего рѣшимъ вопросъ, можетъ ли данная система удовлотворяться при $x=0$. При $x=0$ данная система обращается въ равенства $y=a$, $y^2+b=0$, что возможно лишь при выполненіи условія $a^2+b=0$. Итакъ, цѣлесообразно разбить все изслѣдованіе на два случая, когда $a^2+b=0$ и когда $a^2+b\neq 0$. Пусть $a^2+b=0$. Тогда имѣемъ рѣшеніе $x=0$, $y=a$. Формулы (7), (8) даютъ также рѣшеніе данной системы, такъ какъ $a\neq 0$. Формулы (10), (12) даютъ снова рѣшеніе $x=0$, $y=a$, если $1-ab\neq 0$. Если же $a^2+b=0$ и $1-ab=0$, то уравненіе (9), полученное изъ уравненій (6), (1), обращается въ тожество, откуда приходимъ къ безконечному множеству рѣшеній, выражаемыхъ равенствомъ $y=bx+a$ при x неопредѣленномъ. Итакъ, если $a^2+b=0$, $1-ab\neq 0$, то всѣ рѣшенія данной системы выражаются формулами:

$$x_{1,2,3}=\alpha,\quad y_{1,2,3}=\alpha^2;\quad x_4=0,\quad y_4=a;$$

а если $a^2+b=0$ и $1-ab=0$, то всѣ рѣшенія данной системы суть

$$x_{1,2,3}=\alpha,\quad y_{1,2,3}=\alpha^2;\quad y_4=bx_4+a\ (\text{при любомъ } x_4),$$

такъ какъ, при $x_4=0$, $y_4=a$. Разсуждая аналогичнымъ образомъ, находимъ что при $a^2+b\neq 0$, $1-ab\neq 0$, всѣ рѣшенія данной системы суть

$$x_{1,2,3}=\alpha,\quad y_{1,2,3}=\alpha^2;\quad x_2=\frac{a^2+b}{1-ab},\quad y_2=\frac{a+b^2}{1-ab};$$

а при $a^2+b\neq 0$, $1-ab=0$ остаются лишь рѣшенія

$$x_{1,2,3}=\alpha,\quad y_{1,2,3}=\alpha^2.$$

Во всѣхъ указанныхъ случаяхъ α есть одно изъ трехъ значеній корня кубичнаго изъ единицы. Замѣтимъ еще, что случай

$$a^2+b=0,\ (14)\qquad 1-ab=0\qquad (15)$$

навѣрно возможенъ, а именно тогда и только тогда, если $a=\eta$, $b=-\eta^2$ гдѣ η — одно изъ значеній корня кубичнаго изъ (-1).

П. Тикуновъ (Козловъ); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
пщется

Обложка
пщется