Обложка
ищется

Обложка
пщется

XLIX Сем. № 9.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 585.

Генрихъ Веберъ.

Свѣтлой памяти дорогого учителя.

Я. Шатуновскаго.

17 мая н. с. въ Страсбургѣ скончался профессоръ Страсбургскаго университета Генрихъ Веберъ (H. Weber). Въ могилу сошелъ одинъ изъ тѣхъ математиковъ, на смѣну которымъ не скоро являются замѣстители.

Г. Веберъ, сынъ извѣстнаго Гейдельбергскаго профессора исторіи, родился 5 марта 1842 года въ Гейдельбергѣ, учился въ Берлинѣ и Гёттингенѣ, былъ профессоромъ сперва въ Кёнигсбергѣ, потомъ въ Страсбургѣ. Въ Страсбургъ онъ пріѣхалъ еще молодымъ человѣкомъ и тамъ провелъ свою долгую жизнь.

Г. Веберъ—ученикъ наиболѣе выдающихся математиковъ XIX-го вѣка Кронекера и Римана, и это сказалось на всемъ строѣ его работъ. Отъ Кронекера онъ унаслѣдовалъ строгость обработки, любовь къ теоріи чиселъ и къ алгебрѣ. Отъ Римана онъ унаслѣдовалъ способность доходить до крайнихъ глубинъ разсматриваемой проблемы, то геометрическое воображеніе, безъ котораго римановская теорія функцій такъ мало доступна, и способность разбираться не только въ вопросахъ чистой математики, но и въ наукѣ о природѣ —

въ теоретической физикѣ, а отъ обоихъ — беззавѣтную любовь къ математикѣ, къ ея изученію, ея научному изложенію и къ ея преподаванію.

У Вебера много оригинальныхъ мемуаровъ въ самыхъ различныхъ областяхъ математики. Имъ доказаны нѣкоторыя замѣчательныя теоремы, которыя сохранятъ его имя навсегда*). Веберъ указалъ и новые пути для математическаго творчества, — напримѣръ, въ своемъ ученіи о функціоналахъ. Своими оригинальными работами Веберъ завоевалъ себѣ имя въ исторіи математики, но главное значеніе Вебера не въ нихъ.

Математическіе мемуары, разсѣянные по разнымъ математическимъ журналамъ, пишутся всегда сжато. Въ этой сжатости есть своя красота; но, кто пробовалъ прослѣдить какой-нибудь вопросъ по литературѣ, знаетъ, какого колоссальнаго напряженія они требуютъ и какъ часто величайшія работы страдаютъ скрытыми за этой сжатостью дефектами. Огромная и богатѣйшая математическая литература въ значительныхъ своихъ частяхъ остается поэтому обыкновенно извѣстной только по названіямъ; лишь немногіе, наиболѣе добросовѣстные ученые въ нее углубляются, и первое мѣсто среди нихъ принадлежало въ этомъ отношеніи Веберу. Врядъ ли въ настоящее время есть ученый, владѣющій такимъ широкимъ и глубокимъ математическимъ образованіемъ, какимъ обладалъ Веберъ. Это, быть можетъ, единственный математикъ, который сумѣлъ за годы напряженнаго труда изучить и глубоко продумать, если не всю современную математику, то во всякомъ случаѣ чрезвычайно обширные ея отдѣлы, который сумѣлъ побывать на всѣхъ ея неприступныхъ вершинахъ и уже оттуда обозрѣвать эту горную страну.

Результатомъ этой работы-подвига, на который ушли лучшія силы и многіе годы, была его трехтомная „Алгебра"**). Это трудъ въ 2300 страницъ, которыя сдѣлали доступными всему математическому міру результаты изслѣдованій, составлявшихъ достояніе немногихъ избранниковъ; эти страницы связали математическія богатства современной алгебры въ систему, и эта горная страна — да будетъ мнѣ позволено пользоваться этой метафорой! — сдѣлалась доступной скромному путнику благодаря проложеннымъ въ ней Веберомъ дорогамъ, тропинкамъ и мостамъ.

„Алгебра" Вебера представляетъ собой классическій трактатъ, по которому учатся преподающіе и изучающіе современную алгебру; свое первенствующее значеніе это сочиненіе сохранитъ на многія десятилѣтія. Нужно сказать, что алгебру Веберъ понималъ въ очень широкомъ смыслѣ слова: она охватываетъ всю теорію чиселъ, а

---

*) Очень замѣчательна, напримѣръ, слѣдующая теорема изъ области алгебраической теоріи уравненій: всѣ абелевы числовые корпусы, принадлежащіе абсолютной области раціональности, представляютъ собою корпусы корней изъ единицы. Это предложеніе было высказано въ видѣ предположенія Кронекеромъ, но доказать его онъ не былъ въ состояніи.

**) H. Weber — „Lehrbuch der Algebra".

третій томъ содержитъ замѣчательное изложеніе теоріи эллиптическихъ функцій.

Совершенно другой области посвящены два тома его дифференціальныхъ уравненій теоретической физики*). Въ этой области, гдѣ, по выраженію Гильберта, такъ много wohl и doch, установить порядокъ, продумать математически то, что создавалось не математически, углубиться въ дисциплину, гдѣ такъ часты натяжки, гдѣ такъ мало ясности, это очень трудная задача. И съ этой задачей Веберъ справился мастерски. Нѣтъ другого сочиненія по математической физикѣ, въ которомъ разнообразный матеріалъ такъ разработанъ и объединенъ.

Этотъ трудъ извѣстенъ подъ краткимъ именемъ Риманъ-Вебера. Веберъ въ ранней юности слушалъ лекціи Римана по этому предмету, и нужна была Веберовская скромность, чтобы назвать этотъ трудъ изложеніемъ лекцій Римана и добавленіями къ нимъ. Веберъ могъ назвать этотъ трудъ своимъ съ гораздо большимъ правомъ, чѣмъ многіе другіе называютъ такъ не только свое изложеніе той или иной дисциплины, но даже свои ученыя статьи. Подъ тѣмъ же названіемъ Риманъ-Вебера много лѣтъ былъ извѣстенъ и третій томъ его „Алгебры", главныя части котораго носили много лѣтъ названіе „Теоріи эллиптическихъ функцій и алгебраическихъ чиселъ въ изложеніи Римана". Многолѣтнія настоянія друзей побудили его выпустить эту книгу въ видѣ 3-го тома его „Алгебры", но онъ всегда говорилъ, что всѣмъ этимъ онъ обязанъ Риману. Въ этомъ онъ слѣдовалъ своему любимому другу Дедекинду, который свою классическую обработку теоріи чиселъ тоже назвалъ, по имени своего учителя, лекціями Леженъ-Дирихле.

Въ этомъ сказалась общая участь всѣхъ тѣхъ, кто учился у геніевъ. Имъ, дѣйствительно, почти никогда не удается отдѣлить свое, отъ безчисленнаго ряда мыслей, соображеній и замѣчаній учителя. Имъ всегда кажется, что то, что они дѣлаютъ, это только разработка; въ этомъ отношеніи быть ученикомъ геніальнаго человѣка бываетъ несчастіемъ для тѣхъ, кому необходимо различать, что у нихъ свое и что заимствовано отъ учителя; но для такихъ людей, какъ Веберъ и Дедекиндъ, это великое счастье. Они не заняты пріоритетами, самооцѣнкой, не ищутъ признаній. Считая, что они передаютъ имъ завѣщанное, они работаютъ съ тѣмъ благоговѣніемъ, безъ котораго можетъ быть и нельзя было бы создать такой трудъ, какъ эти „Дифференціальныя уравненія теоретической физики".

Благоговѣйная любовь къ Риману и благодарность великому учителю жила въ Веберѣ неугасаемо всю его жизнь. Риманъ, какъ извѣстно, напечаталъ въ своей жизни очень немного. Своими идеями, которыми живетъ и еще долго будетъ жить математика, онъ

*) „Die Partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik". Nach Riemanns Vorlesungen bearbeitet von H. Weber. 5-е изданіе, вышедшее въ 1910—1912 г.г., представляетъ собою фактически новое сочиненіе, содержащее вполнѣ современное изложеніе математической физики.

дѣлился со своими учениками. Онъ оставилъ ихъ въ рядѣ работъ, не напечатанныхъ, неготовыхъ, иногда представляющихъ собою, на первый взглядъ, лишенные связи обрывки. Многіе величайшіе математики, — напримѣръ, Софусъ Ли, — указывали на то, что было бы очень большой заслугой, если бы кто-либо взялъ на себя трудъ прослѣдить и изложить развитіе идей въ той или иной работѣ Римана; но эти работы нужно было сначала собрать, нужно было въ нихъ углубиться, нужно было проникнуться планами геніальнаго зодчаго, такъ рано отнятаго у науки злымъ недугомъ, и изъ оставленныхъ имъ кирпичей сложить эти готическія башни. Это сдѣлалъ Веберъ. Это было дѣломъ его жизни. Полное собраніе сочиненій Римана — небольшой томъ, содержанія котораго хватило бы на цѣлую библіотеку, — вышло подъ его редакціей и снабжено его указаніями и примѣчаніями. Веберъ былъ единственный человѣкъ, который зналъ всѣ работы Римана, который выяснилъ себѣ всю глубину ихъ содержанія. Выяснить всѣ эти идеи и другимъ онъ, конечно, не могъ. — Онъ изложилъ въ своей жизни больше, чѣмъ это въ человѣческихъ силахъ, но дѣлать это онъ умѣлъ и дѣлалъ непрерывно. Онъ часто предлагалъ изложеніе вопросовъ, возникающихъ при чтеніи Римана, своимъ ученикамъ, какъ темы докторскихъ работъ, сообщая имъ для этого все необходимое — всѣ доказательства и всѣ результаты.

Его часто огорчало, что его „Алгеброй" пользуются, какъ учебникомъ, начинающіе, для которыхъ она не была писана, и онъ мечталъ найти досугъ для того, чтобы написать краткую „Алгебру". Онъ осуществилъ эту мечту незадолго до смерти*). Сдѣлать по отношенію къ анализу то, что было сдѣлано имъ по отношенію къ алгебрѣ, теоріи чиселъ, приложеніямъ анализа къ физикѣ, онъ не видѣлъ особой надобности, считая, что это выполнено другими. Но на своихъ лекціяхъ и въ своемъ семинарѣ онъ поражалъ глубокой продуманностью всѣхъ вѣтвей математики, полнымъ знакомствомъ со всякими источниками.

Веберъ былъ не только ученымъ — онъ былъ профессоромъ, и главныя свои силы онъ отдалъ преподаванію и своимъ ученикамъ. Не придавая большого значенія лекціямъ и тому, что студенты оттуда выносятъ, онъ создалъ въ Страсбургѣ атмосферу семинарскаго преподаванія, — я бы сказалъ: Сократовской системы. Отъ студента онъ требовалъ, чтобы онъ кратчайшими путями дошелъ до способности читать оригинальную литературу и работать самостоятельно. Въ одинъ семестръ онъ прочитывалъ превосходный, но, конечно, конспективный курсъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія, въ другой — чрезвычайно интересный и своеобразный курсъ опредѣленныхъ интеграловъ и теоріи функцій. Рядомъ съ этимъ онъ въ тѣ же два семестра читалъ алгебру и теорію алгебраическихъ чиселъ. Уже на третьемъ семестрѣ студентамъ открывались двери математическихъ семинаровъ. Unterseminar велъ его ученикъ и другъ — профессоръ Вельштейнъ. Oberseminar велъ онъ самъ въ сотрудничествѣ съ осталь-

*) H. Weber — „Lehrbuch der Algebra". Kleine Ausgabe in einem Bande, 1912.

ными профессорами и доцентами, и здѣсь студентъ научался разбираться въ трудномъ вопросѣ и излагать его; здѣсь онъ встрѣчалъ тѣ цѣнныя указанія, безъ которыхъ не только начинающіе, но и уже испытанные ученые занимаются обыкновенно давно извѣстнымъ или, по существу, для нихъ недоступнымъ вслѣдствіе отсутствія тѣхъ или иныхъ знаній; здѣсь онъ встрѣчалъ оцѣнку своихъ дарованій, здѣсь же онъ отучивался отъ заносчивости, къ которой такъ часто склоненъ юноша, рѣшившій второстепенную задачу. Его отучала отъ нея скромность учителя, его безконечная готовность терпѣливо выслушать своего ученика, указать ему его ошибки и заблужденія, предсказать ему результаты его изслѣдованій съ тѣмъ поразительнымъ чутьемъ, которое выработало въ немъ безконечное количество продуманныхъ и продѣланныхъ изслѣдованій.

Окружая себя учениками, онъ окружалъ себя и доцентами, выбирая безспорно талантливыхъ. Веберъ былъ центромъ школы, изъ которой вышелъ рядъ ученыхъ, и, когда въ прошломъ году Веберу исполнилось 70 лѣтъ, его ученики и друзья подчеркнули это, выпустивъ въ честь его сборникъ своихъ статей, многообразное содержаніе котораго было отраженіемъ многообразнаго содержанія самого Вебера.

Посвящая такъ много вниманія своимъ ученикамъ, какъ будущимъ математикамъ, Веберъ не упускалъ изъ виду, что изъ его аудиторіи выходятъ будущіе учителя средней школы. Система, при которой студентъ при вступленіи въ высшую школу долженъ забыть все то, чему онъ учился въ средней, а учитель, при вступленіи въ среднюю, долженъ забыть все то, чему онъ учился въ университетѣ,— система, такъ мѣтко названная Клейномъ системой двойного забвенія,—встрѣтила своего противника въ Веберѣ гораздо раньше, чѣмъ въ Клейнѣ. Вопросъ о томъ, что́ высшая школа можетъ дать средней и каково должно быть преподаваніе въ средней, чтобы знанія, въ ней пріобрѣтенныя, не было необходимости забыть при поступленіи въ высшую, всегда его занималъ, и онъ ввелъ въ Страсбургскомъ университетѣ посвященныя этому лекціи по элементарной математикѣ. Эти лекціи были единственными въ своемъ родѣ. Даже въ Германіи мало профессоровъ, которые способны были бы читать такіе курсы. Лекціи по элементарной математикѣ читаются еще въ Гёттингенѣ, но тамъ это лекціи, посвященныя труднѣйшимъ математическимъ проблемамъ, мало доступныя и далеко не элементарныя.

Эта большая заслуга Вебера передъ элементарной математикой не ограничивается Страсбургскимъ университетомъ. Его „Энциклопедія Элементарной Математики“ сдѣлалась настольной книгой всякаго вдумчиваго учителя независимо отъ того, нѣмецъ ли онъ или итальянецъ, русскій или японецъ. Вебера всегда очень огорчало неудачно выбранное названіе „Энциклопедія“, отъ котораго каждый ждетъ изложенія всего, но въ дѣйствительности въ ней изложено, если не все, то очень многое. Веберъ написалъ для нея только первый томъ. Второй написалъ Вельштейнъ, третій—другой его ученикъ Якобсталь и его сынъ, профессоръ математики въ Ростокѣ, Р. Веберъ; но все это прошло его редакцію, все это писалось по его указанію и подъ его непосредственнымъ руководствомъ; рядъ главъ и во второмъ и въ третьемъ томѣ написалъ онъ самъ. Читая свой курсъ лекцій по элементарной математикѣ, онъ ставилъ проблемы и создавалъ къ нимъ интересъ. Этому вліянію мы обязаны многими работами, посвященными элементарной математикѣ и написанными людьми съ математическимъ образованіемъ, которые обыкновенно вмѣстѣ съ этимъ образованіемъ теряютъ вкусъ къ задачамъ элементарной математики, оставляя ея разработку и изложеніе людямъ, математически мало образованнымъ.

По Улицѣ Молчаливыхъ Домовъ (Schweighäuserstrasse) каждый день къ 8-ми часамъ утра шелъ изъ своего дома въ университетъ выдающійся человѣкъ и тамъ дѣлалъ большое дѣло. Теперь его не стало.

Когда такой учитель сходитъ въ могилу, міръ его ученика тускнѣетъ, и въ немъ становится жутко. Гдѣ-то тамъ далеко жилъ яркій источникъ свѣта, и можно было надѣяться освѣтить темноту своихъ сомнѣній, можно было надѣяться освѣтить ту тьму, которой такъ много на пути начинающаго. Онъ потухъ, и эта надежда погасла. Тѣмъ дороже и цѣннѣе теперь то, что осталось. Остались томы его книгъ, его завѣты и яркая память о человѣкѣ, который отдалъ и тебѣ часть своего большого ума и своего любящаго сердца.

Миръ праху твоему, дорогой учитель!

Изслѣдованіе числового тождества, какъ общій методъ рѣшенія аналитическихъ задачъ школьной ариѳметики.

Н. Псарева.

При прохожденіи систематическаго курса ариѳметики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ и въ высшей народной школѣ аналитическія задачи предлагаются учащимся почти на первыхъ ступеняхъ курса, именно — въ отдѣлѣ задачъ на всѣ четыре дѣйствія съ цѣлыми числами. Задачи этого рода рѣшаются и въ начальной школѣ въ послѣдній годъ обученія. Для рѣшенія задачъ этого типа пользуются болѣе или менѣе искусственными пріемами, органически не связанными съ частями курса и потому трудно усвояемыми учащимися. Иногда преподаватель, съ отчаянія предъ разнообразіемъ пріемовъ, знакомитъ учащихся съ буквенными обозначеніями чиселъ и прибѣгаетъ при рѣшеніи задачъ къ алгебрѣ, часто въ донельзя упрощенной формѣ.

Не отрицая возможности и пользы совмѣстнаго систематическаго прохожденія курса ариѳметики и алгебры цѣлыхъ положительныхъ чиселъ (ср. «A New Algebra», by S. Barnard and S. Child, ч. I), я полагаю, что въ рукахъ преподавателя ариѳметики есть общій ариѳметическій способъ рѣшенія аналитическихъ задачъ, органически связанный съ проходимымъ курсомъ и вмѣстѣ съ тѣмъ представляющій прекрасную переходную ступень къ алгебрѣ; этотъ способъ заключается въ слѣдующемъ: приводимъ вопросъ, сообразно условіямъ задачи, къ формѣ числового тождества (какъ въ алгебрѣ вопросъ приводится къ уравненію) и, пользуясь ученіемъ объ измѣненіи суммы, разности, произведенія и частнаго, изслѣдуемъ это тождество.

Для примѣра я беру изъ «Сборника ариѳметическихъ задачъ» Шапошникова и Вальцева (часть I, 17 изд.) задачу № 1421:

«Задумано нѣкоторое число; если его умножить на 3 и потомъ изъ произведенія вычесть 8, то получимъ 28. Какое число задумано?»

Возьмемъ произвольное число, хотя бы 5; сообразно условіямъ задачи пишемъ тождество: $5 \cdot 3 - 8 = 7$. Разность 7 меньше разности, данной въ задачѣ, на 21. Чтобы увеличить ее на 21, мы должны уменьшаемое увеличить или вычитаемое уменьшить, или произвести ту и другую операцію, выбравъ подходящія числа. Вычитаемое 8 есть данное задачи, измѣнять его мы не будемъ; уменьшаемое же представляетъ произведеніе 5 на 3, при чемъ 3 — число, данное условіемъ, и потому мы измѣнять его не будемъ. Если сомножитель 5 увеличимъ на единицу, то уменьшаемое и разность увеличатся на 3 единицы; эту операцію мы должны повторить столько разъ, сколько разъ 3 содержится въ 21, т. е. 7 разъ. По выполненіи операціи въ правой части тождества должно получиться 28; пишемъ тождество: $12 \cdot 3 - 8 = 28$. Провѣрка вычисленіемъ показываетъ дѣйствительность тождества; слѣдовательно, искомое число есть 12.

Возьмемъ задачу № 1438:

«Если изъ неизвѣстнаго числа вычесть 7, разность раздѣлить на 2 и къ частному прибавить 28, то получится 37. Найти неизвѣстное».

Возьмемъ произвольное число, но такое, чтобы по вычитаніи изъ него семи разность дѣлилась на 2, и напишемъ числовое тождество:

$$\frac{17-7}{2}+28=33.$$

Полученная сумма меньше суммы, данной въ условіи задачи, на 4. Оставляя второе слагаемое, какъ данное, безъ измѣненія, увеличимъ первое слагаемое на 4. Первое слагаемое представляетъ собою частное. Чтобы частное отъ дѣленія на 2 увеличить на 4, мы должны дѣлимое увеличить на $4 \cdot 2$, т. е. на 8; дѣлимое представляетъ изъ себя разность, при чемъ 7 есть данное задачи; увеличиваемъ на 8 уменьшаемое; получимъ тождество:

$$\frac{25-7}{2}+28=37,$$

которое провѣряемъ вычисленіемъ, и получаемъ отвѣтъ 25.

Возьмемъ задачу № 1168 изъ задачника Верещагина (20 изд., 1908 г.):

«Смѣшано два сорта кофе, цѣною по 85 коп. и 48 коп. за фунтъ, и получено 5 пудовъ 22 фунта смѣси, которая стоитъ всего 142 руб. 08 коп. Сколько каждаго сорта кофе пошло на эту смѣсь? Къ задачѣ приложенъ планъ рѣшенія: 1) Сколько могла бы стоить вся смѣсь, если бы каждый фунтъ ея стоилъ 85 к.? 2) Вслѣдствіе чего полученная стоимость смѣси болѣе дѣйствительной, и что выражаетъ разность между ними? 3) Если увеличить цѣну каждаго фунта второго сорта на 37 коп., т. е. вмѣсто 48 коп. считать 85 коп., то насколько увеличится цѣна всей смѣси? 4) Сколько фунтовъ второго сорта было взято?

Искусственность пріема очевидна, а, кромѣ того, по моему мнѣнію, первое и третье допущенія не могутъ быть и сдѣланы, такъ какъ цѣна смѣси и цѣны сортовъ тоже даны. Наше рѣшеніе таково: предполагаемъ, что перваго сорта кофе пошло въ смѣсь 100 фунтовъ; слѣдовательно, второго сорта пошло 122 фунта; стоимость смѣси выразится числовымъ тождествомъ $85 \cdot 100 + 48 \cdot 122 = 14356$. Полученная нами стоимость смѣси больше данной на 148; чтобы уменьшить 14 356, мы должны уменьшить слагаемыя. Въ слагаемыхъ сомножители 85 и 48, какъ данныя задачи, оставляемъ безъ измѣненія. Уменьшая одного изъ вторыхъ сомножителей, мы другой должны настолько же увеличить, такъ какъ сумма ихъ должна равняться данному условіемъ задачи числу 222; такимъ образомъ, мы должны уменьшить то слагаемое, у котораго первый сомножитель больше. Уменьшивъ 100 на единицу, мы уменьшимъ слагаемое и сумму на 85; увеличивъ же 122 на единицу, мы увеличимъ слагаемое и сумму на 48; слѣдовательно, сумма уменьшится на 37; а такъ какъ сумму нужно уменьшить на 148, то вышеприведенную операцію мы должны повторить столько разъ, сколько разъ 37 содержится въ 148, т. е. 4 раза. Уменьшивъ 100 на 4 и увеличивъ 122 на 4, мы должны получить въ правой части равенства 14 208, т. е. $85 \cdot 96 + 48 \cdot 126 = 14208$. Вычисленіемъ провѣряемъ дѣйствительность тождества и приходимъ къ заключенію, что искомыя числа суть 96 и 126.

Приведенныхъ примѣровъ, я полагаю, достаточно для выясненія сущности предлагаемаго метода изслѣдованія числового тождества. Давая большой просторъ инициативѣ учащагося, онъ вмѣстѣ съ тѣмъ наводитъ на размышленія о свойствахъ чиселъ; рѣшаемая задача является не фокусомъ, ключъ къ которому нужно хранить въ памяти, а интереснымъ вопросомъ, рѣшаемымъ на основаніи изученныхъ свойствъ чиселъ и дѣйствій надъ ними. При рѣшеніи этимъ способомъ особой провѣрки не нужно, такъ какъ провѣрка тожества замѣнитъ провѣрку рѣшенія *).

Аллотропія химическихъ элементовъ.

Прив.-доц. Е. Ельчанинова.

*(Окончаніе **).*

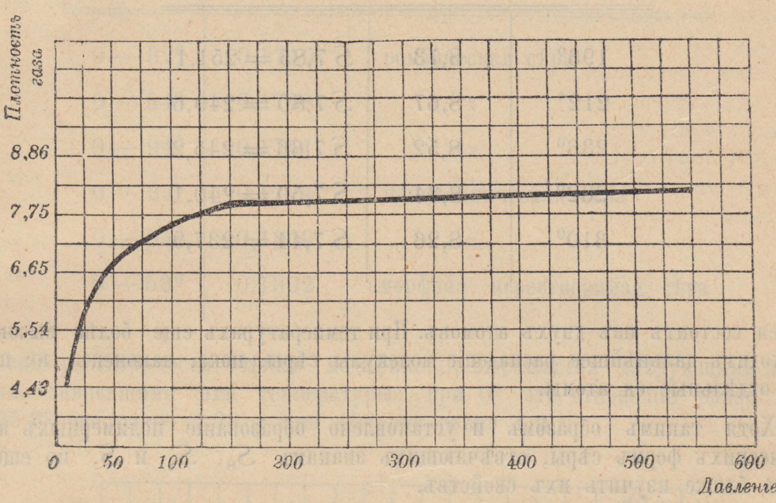
Весьма интересные результаты получились также при изслѣдованіи аллотропіи сѣры. Аллотропія въ сѣрѣ наблюдается во всѣхъ трехъ ея состояніяхъ, при чемъ явленіе, наблюдаемое въ газообразномъ и жидкомъ состояніяхъ, слѣдуетъ отнести къ случаямъ химической изомеріи.

При превращеніи сѣры въ парообразное состояніе наблюдается интересное явленіе; именно: происходитъ постепенная диссоціація сложныхъ частицъ ея, состоящихъ изъ 8 атомовъ, пока, наконецъ, при высокой температурѣ не получатся отдѣльные атомы. Теченію этого процесса распаденія благопріятствуютъ повышеніе температуры и пониженіе давленія. Надо думать, что распадъ со-

*) Признавая такого рода пріемъ цѣлесообразнымъ въ качествѣ упражненія, мы не думаемъ, чтобы можно было рекомендовать систематически обращаться къ совершенно случайнымъ числамъ. *Ред.*

**) См. № 583-584 „Вѣстника“.

вершается въ три стадіи. Въ первой стадіи происходитъ: $S_8 \leftrightarrows 2S_4$; во второй: $S_4 \leftrightarrows 2S_2$ и, наконецъ, въ третьей: $S_2 \leftrightarrows 2S$; процессъ заканчивается. Бильцъ (Biltz) изслѣдовалъ зависимость теченія процесса отъ давленія и температуры. Фиг. 1 графически выясняетъ зависимость плотности отъ давленія.



Фиг. 1.

Таблица 2 указываетъ на зависимость плотности и молекулярнаго вѣса отъ температуры.

Таблица 2.

Температура	Плотность	Молекулярный вѣсъ
468^0	7,8	$S\,7{,}1 = 227$
481^0	7,5	$S\,6{,}7 = 215$
523^0	7,1	$S\,6{,}4 = 205$
581^0	5,5	$S\,4{,}7 = 159$
606^0	4,7	$S\,4{,}2 = 134$

Слѣдующая таблица 3 (см. стр. 242) указываетъ на величины плотности и молекулярныхъ вѣсовъ, измѣренныхъ при болѣе низкихъ температурахъ, чѣмъ въ предыдущей таблицѣ.

Изъ приведенныхъ таблицъ ясно видно, что съ пониженіемъ температуры составъ молекулы приближается къ S_8. Напротивъ, при повышеніи ея наблюдается распадъ, тѣмъ болѣе полный, чѣмъ выше температура. Установлено, что при $t^0 = 1719^0$ молекулярный вѣсъ сѣры равенъ 64, т. е. моле-

Таблица 3.

Темпера-тура	Плотность	Молекулярный вѣсъ
193^0	8,73	$S\,7{,}85 = 251{,}1$
212^0	8,67	$S\,7{,}80 = 249{,}6$
236^0	8,52	$S\,7{,}66 = 245{,}2$
262^0	8,34	$S\,7{,}50 = 240{,}1$
310^0	8,26	$S\,7{,}44 = 237{,}9$

кула ея состоитъ изъ двухъ атомовъ. При температурахъ еще болѣе высокихъ происходитъ дальнѣйшее распаденіе молекулы сѣры, пока, наконецъ, не получатся отдѣльные ея атомы.

Хотя такимъ образомъ и установлено образованіе полимерныхъ аллотропическихъ формъ сѣры, отвѣчающихъ знакамъ S_8, S_2 и S, но еще не удалось ближе изучить ихъ свойствъ.

Разсмотрѣнные случаи аллотропіи относятся къ газообразному состоянію сѣры. Газообразныя аллотропическія модификаціи образуютъ однородную систему равновѣсія. Такая же система образуется нѣкоторыми аллотропическими формами жидкой сѣры. Однако, въ виду ея значительной сложности мы ея касаться здѣсь не будемъ, а перейдемъ къ разсмотрѣнію той аллотропіи сѣры, гдѣ она образуетъ систему неоднородную.

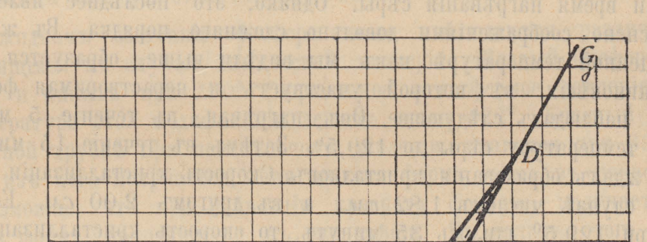
Сѣра способна появляться въ видѣ нѣсколькихъ формъ. Изъ нихъ лучше всего извѣстны ромбическая и моноклиническая сѣра. Изъ кристаллографіи извѣстно, что эти двѣ модификаціи находятся одна къ другой въ отношеніи энантіотропіи. При температурѣ $95{,}6^0$ между ними устанавливается равновѣсіе, которое сдвигается въ сторону одной или другой формы въ зависимости отъ температуры. Ниже $95{,}6^0$ отличается бóльшею устойчивостью ромбическая сѣра, а выше этой температуры — моноклиническая. Можно, впрочемъ, соблюдая нѣкоторыя мѣры предосторожности, нагрѣвать ромбическую сѣру такъ, что она начинаетъ плавиться при $t^0 = 112{,}8^0$, не превращаясь въ сѣру моноклиническую. Эта послѣдняя плавится значительно выше, именно при $119{,}25^0$. Кромѣ точекъ плавленія, обѣ формы различаютъ еще и по другимъ признакамъ; напримѣръ, онѣ имѣютъ различные удѣльные вѣса: ромбическая сѣра — 20,6, а моноклиническая — 1,96; затѣмъ, онѣ отличаются различною теплоемкостью. Это видно изъ прилагаемой таблицы 4 (см. стр. 243).

Броншт е д т ъ изслѣдовалъ растворимость обѣихъ формъ. Согласно правиламъ термодинамики, отношеніе растворимостей ромбической и моноклинической сѣры не зависитъ отъ природы растворителя и сохраняетъ постоянную величину, несмотря на замѣну одного растворителя другимъ. Броншт е д т ъ дѣйствительно опредѣлилъ, что при различныхъ растворителяхъ

Таблица 4.

Температуры	Теплоемкость	Вещества
0 — 32°	0,1719	ромбическая сѣра
0 — 54°	0,1728	»
0 — 94°	0,1751	»
0 — 33°	0,1774	моноклиническая сѣра
0 — 54°	0,1809	»
0 — 53°	0,1902	аморфная, нерастворимая сѣра

отношеніе растворимости обѣихъ модификацій выражается слѣдующими величинами, зависящими отъ температуры: при 0° это отношеніе равно 1,40, при 25,3° оно равно 1,28 и при 40° оно равно 1,2.



Фиг. 2.

Прилагаемый чертежъ (фиг. 2) указываетъ намъ области распространенія модификацій сѣры и указываетъ, кромѣ того, зависимость температуры плавленія отъ давленія. Точка A указываетъ моментъ превращенія ромбической сѣры въ моноклиническую. Точка B указываетъ естественную температуру плавленія моноклинической сѣры, именно 114,5, а C — температуру плавленія ромбической сѣры, именно 110,6. На діаграммѣ кривая $EABF$ обозначаетъ измѣненіе упругости паровъ сѣры; она близко лежитъ возлѣ оси абсциссъ. Линія AD указываетъ, какъ измѣняется моментъ перехода A при измѣненіи давленія, а линія BD обозначаетъ измѣненіе температуры плавленія моноклинической сѣры при увеличеніи давленія. Линіи AD и BD пересѣкаются въ точкѣ D. Она указываетъ моментъ одновременнаго существованія сѣры ромбической, моноклинической и жидкой. По опредѣленію Таммана этотъ моментъ наступаетъ при 151^0 и при давленіи 1320 *кг.* на 1 *кв. см.* Линія CDG указываетъ измѣненіе температуры плавленія ромбической сѣры при измѣненіи давленія.

Весьма интересно также изслѣдовать скорость, съ которой образуется кристаллическая сѣра изъ расплавленнаго состоянія. Гернезъ установилъ, что эта скорость зависитъ отъ той аллотропической формы, которая образовалась или была внесена въ ничтожномъ количествѣ въ переохлажденную сѣру. Скорость кристаллизаціи должна, конечно, зависѣть отъ температуры переохлажденія, именно, скорость эта увеличивается тѣмъ болѣе, чѣмъ сильнѣе охлаждена жидкость. На скорость кристаллизаціи весьма замѣтно вліяетъ температура и время нагрѣванія сѣры. Однако, это послѣднее явленіе можетъ быть объяснено соображеніями довольно сложнаго порядка. Въ жидкой сѣрѣ при повышенной температурѣ, какъ мы видѣли выше, образуется однородная система равновѣсія, въ которой участвуетъ и нерастворимая форма сѣры. Гернезъ наблюдалъ слѣдующее. Онъ, нагрѣвая, въ теченіе 5 минутъ поддерживалъ температуру сѣры до $129,5^0$. Затѣмъ въ теченіе 15 минутъ переохлаждая, ждалъ образованія кристалловъ. Скорость кристаллизаціи выразилась въ одномъ случаѣ числомъ 1,82 *см.*, а въ другомъ 2,00 *см.* Если же нагрѣваніе при $129,5^0$ длилось 35 минутъ, то скорость кристаллизаціи понижалась до 0,215 *см.*; наконецъ, при 60 минутахъ нагрѣванія скорость была 173 *см.* Въ данномъ случаѣ, вслѣдствіе увеличивающейся продолжительности нагрѣванія увеличивалось количество образовавшейся нерастворимой сѣры. Въ процессѣ кристаллизаціи она дѣйствуетъ, какъ посторонняя примѣсь, т. е. замедляетъ ее. При продолжительности же періода переохлажденія количество нерастворимой сѣры уменьшается, и потому увеличивается скорость кристаллизаціи сѣры. Такое же замедляющее или ускоряющее вліяніе на кристаллизацію оказываетъ не только продолжительность, но и температура, при которой совершается кристаллизація. Все зависитъ отъ количества образующейся нерастворимой формы сѣры. Гернезъ измѣрилъ также скорость превращенія ромбической сѣры въ моноклиническую. Оказалось, что превращеніе также зависитъ отъ температуры и продолжительности нагрѣванія жидкой сѣры. Таблица 5 (см. стр. 245) указываетъ, въ какой мѣрѣ скорость превращенія зависитъ отъ температуры.

Среди другихъ элементовъ фосфоръ даетъ весьма интересные случаи аллотропіи, но они значительно менѣе изучены, чѣмъ у сѣры. Съ достовѣрностью можно говорить о двухъ полимерныхъ формахъ, наблюдаемыхъ въ газообразномъ состояніи. Девиль и Тростъ установили, что при нагрѣваніи фосфора въ предѣлахъ $500^0 — 1040^0$ плотность пара его выражается числомъ 4,35 или 4,50. Эти числа соотвѣтствуютъ довольно хорошо величинѣ

Таблица 5.

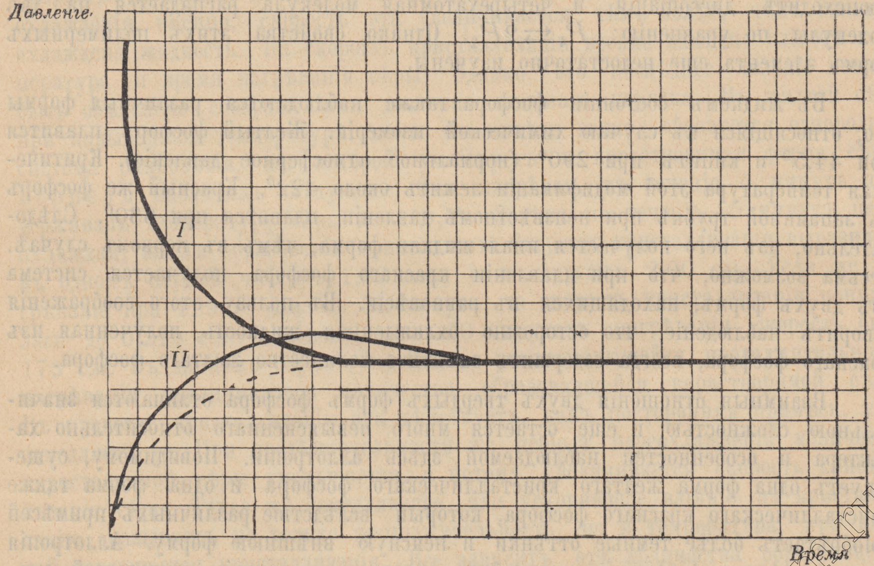
Температура	Скорость превращенія	Температура	Скорость превращенія
100,9°	0,0015 *см.*	108,9°	0,033 *см.*
105,6	0,0095	110,0	0,040
106,5	0,011	111,2	0,057
107,8	0,018		

молекулы фосфора, состоящей изъ 4-хъ атомовъ, P_4 (4,29). Кромѣ того, установлено, что такова же величина частицы въ растворенномъ состояніи, но при повышеніи температуры до 1484° и 1677° плотность пара фосфора падаетъ до 3,63 или 3,23. Слѣдовательно, подобно тому, что мы наблюдали у сѣры, происходитъ диссоціація, и четырехатомная молекула распадается на двѣ молекулы по уравненію: $P_4 \leftrightarrows 2P_2$. Однако, свойства этихъ полимерныхъ формъ элемента еще недостаточно изучены.

Въ жидкомъ состояніи фосфора также наблюдаются различныя формы его, относящіяся къ случаю химической изомеріи. Желтый фосфоръ плавится при 44,5° и кипитъ при 290° (нормальное атмосферное давленіе). Критическая температура этой модификаціи лежитъ около 422°. Красный же фосфоръ въ запаянной трубкѣ при неизвѣстномъ давленіи плавится при 630°. Слѣдовательно, изъ него получается иная жидкая форма, чѣмъ въ первомъ случаѣ. Весьма возможно, что при плавленіи краснаго фосфора получается система изъ двухъ формъ, находящихся въ равновѣсіи. Въ пользу этого соображенія говоритъ наблюденіе, что осторожно охлажденная жидкость, полученная изъ краснаго фосфора, всегда содержитъ замѣтное количество желтаго фосфора.

Взаимныя отношенія двухъ твердыхъ формъ фосфора отличаются значительною сложностью, и еще остается много невыясненнаго относительно характера и особенностей наблюдаемой здѣсь аллотропіи. Повидимому, существуетъ одна форма желтаго кристаллическаго фосфора и одна форма также кристаллическаго краснаго фосфора, который вслѣдствіе различныхъ примѣсей пріобрѣтаетъ болѣе темные оттѣнки и неясную внѣшнюю форму. Аллотропія твердыхъ формъ фосфора можетъ быть отнесена къ явленію химической изомеріи. Въ пользу этого говоритъ, между прочимъ, и то обстоятельство, что подъ вліяніемъ свѣта желтый фосфоръ превращается въ красный, т. е. происходитъ реакція, которая до сихъ поръ наблюдалась только при химическихъ превращеніяхъ. Между двумя твердыми формами часто устанавливается равновѣсіе. Красная форма болѣе устойчива и поэтому при пониженіи температуры равновѣсіе перемѣщается въ сторону этой формы. Напротивъ, при высокихъ температурахъ больше образуется желтаго фосфора, который и выдѣляется, главнымъ образомъ, при быстромъ охлажденіи паровъ. Надо, впрочемъ, замѣтить, что скорость превращенія одной формы въ другую очень невелика. Обѣ формы образуютъ совмѣстно твердый растворъ. Вслѣдствіе его образованія весьма сильно осложняется составъ того сложнаго вещества, которое обыкновенно называютъ краснымъ фосфоромъ. Въ составѣ такого продукта находится и указанный твердый растворъ двухъ аллотропическихъ формъ и, кромѣ того, смѣсь изъ этого раствора и краснаго кристаллическаго фосфора.

Реакція превращенія желтаго фосфора въ красный относится къ типу мономолекулярныхъ реакцій. Опредѣлить присутствіе той или другой модификаціи, однако, затруднительно, такъ какъ обѣ онѣ состоятъ изъ четырехатомныхъ частицъ (P_4); поэтому нельзя пользоваться для рѣшенія задачи методами опредѣленія плотности пара. Независимо отъ того, отъ какой изъ двухъ формъ мы исходимъ, въ парообразномъ состояніи мы получимъ совершенно одинаковое равновѣсіе. Нижеслѣдующій чертежъ (фиг. 3) показываетъ, что, если при нѣкоторой опредѣленной температурѣ и опредѣленномъ объемѣ мы станемъ нагрѣвать опредѣленное количество желтаго фосфора, то замѣтно станетъ, что высокая въ началѣ упругость пара его постепенно начнетъ падать (кривая I). Если же мы будемъ при сходныхъ условіяхъ нагрѣвать красный



Фиг. 3.

фосфоръ, то упругость пара его начнетъ постепенно повышаться (кривая II). Въ кривой II мы замѣчаемъ, впрочемъ, нѣкоторое уклоненіе отъ равномѣрнаго ея развитія. Это уклоненіе показываетъ, что упругость пара въ теченіе извѣстнаго времени можетъ быть выше, чѣмъ при конечномъ состояніи. Объясняется это повышеніе присутствіемъ среди красной модификаціи желтаго фосфора. Если она будетъ совершенно свободна отъ примѣси, то ходъ кривой будетъ иной, именно такой, какъ указываетъ пунктирная линія. Обѣ кривыя сливаются и указываютъ такимъ образомъ, что въ парообразномъ состоянiи образуется равновѣсiе обѣихъ формъ.

Нами разсмотрѣны всѣ наилучше изученные случаи аллотропiи. Но она наблюдается и среди другихъ элементовъ, кромѣ указанныхъ; однако, явленiе не такъ хорошо изучено, какъ у кислорода, сѣры и фосфора; тѣмъ не менѣе наблюденiя относительно аллотропiи нѣкоторыхъ элементовъ настолько интересны, что и о нихъ слѣдуетъ упомянуть, несмотря на недостаточную ихъ полноту и ясность. Обратимся, напримѣръ, къ аллотропiи селена.

На основанiи его сходства съ сѣрой можно было бы заранѣе сказать, что онъ проявитъ аллотропiю такого же сложнаго порядка, какъ и сѣра. И дѣйствительно, у селена наблюдается аллотропiя, относящаяся и къ случаямъ физической и химической изомерiи. Она, кромѣ того, проявляется здѣсь въ весьма большомъ числѣ модификацiй. Подобно сѣрѣ въ газообразномъ состоянiи селена наблюдается нѣсколько полимерныхъ формъ, образующихъ однородную систему равновѣсiя. При болѣе низкихъ температурахъ молекула газообразнаго селена должна состоять изъ 8 атомовъ. При высокой температурѣ она соотоитъ изъ двухъ атомовъ, и наконецъ, и, при очень высокой температурѣ молекула селена одноатомна. Распадъ молекулы происходитъ согласно уравненiямъ:

$$Se_8 \leftrightarrows 4Se_2 \quad \text{и} \quad Se_2 \leftrightarrows 2Se.$$

Это явленiе лучше иллюстрируется таблицей 6.

Таблица 6.

Температура	Молекулярный вѣсъ по наблюденiю
774	Se 2,6
815	Se 2,4
898	Se 2,2
918	Se 2,1
956	Se 2,1
969	Se 2
1165	Se 2
1750 — 1800	Se 2
2000	Se 1,5

Къ сожалѣнiю, до сихъ поръ не удалось установить, какое влiянiе оказываетъ на этотъ процессъ давленiе. Мы также ничего не знаемъ о свойствахъ каждой изъ полимерныхъ формъ.

Весьма интересна аллотропія твердаго селена. Существуетъ одна форма, называемая аморфнымъ стекловиднымъ селеномъ. Однако, ее нельзя считать особой модификаціей. Правильнѣе разсматривать ее, какъ жидкость переохлажденную, находящуюся въ метастабильномъ состояніи. Другія же формы твердаго селена, дѣйствительно, можно считать аллотропическими модификаціями элемента; элементъ, слѣдовательно, обладаетъ свойствами полиморфизма. Однѣ изъ формъ обладаютъ характеромъ металлоиднымъ, а другія металлическимъ. Металлоидныхъ формъ двѣ: онѣ имѣютъ красный цвѣтъ и обѣ кристаллизуются въ моноклинической системѣ. Одна форма обозначается буквой α, а другая β. Кристаллы первой выпадаютъ изъ нагрѣтаго сѣрнистаго углерода въ видѣ тонкихъ прозрачныхъ пластинокъ краснаго цвѣта и почти металлическаго блеска, но рядомъ съ ними выпадаютъ и кристаллы формы β, въ видѣ красныхъ короткихъ моноклиническихъ призмъ. Взаимное отношеніе этихъ двухъ модификацій намъ еще неизвѣстно.

Красный, моноклиническій селенъ, формы α, при $110^0 - 120^0$ превращается въ сѣрый металлическій. При быстромъ же нагрѣваніи можно избѣжать превращенія, и тогда при $t^0 = 170^0 - 180^0$ α-селенъ плавится. Другой же красный моноклиническій селенъ, именно селенъ-β, превращается въ сѣрый металлическій при $125^0 - 130^0$. При быстромъ нагрѣваніи онъ также, какъ α-форма, плавится при 180^0, не превращаясь въ металлическое видоизмѣненіе. Форма β отличается отъ формы-α неспособностью образовывать смѣшанные кристаллы съ сѣрой. Кромѣ этихъ кристаллическихъ модификацій селена, существуютъ еще двѣ, отличающіяся металлическимъ характеромъ. Одна изъ нихъ, селенъ A, образуется вслѣдствіе продолжительнаго нагрѣванія аморфнаго селена при 170^0. Онъ отличается металлическимъ характеромъ, имѣетъ сѣрый цвѣтъ и кристаллическую структуру. При обыкновенной температурѣ селенъ A оказываетъ очень значительное сопротивленіе электрическому току. Эта форма мало растворяется въ сѣрнистомъ углеродѣ, именно въ 100 *кб. см.* его можетъ раствориться 3 — 3,4 *мг.* Если селенъ нагрѣвать выше 170^0, то онъ превращается въ очень стойкую форму B, которая еще менѣе растворяется въ сѣрнистомъ углеродѣ; именно, въ 100 *кб. см.* растворяется 2 *мг.* его. Селенъ B отличается болѣе замѣтнымъ металлическимъ характеромъ, чѣмъ предыдущая форма. Именно, у него болѣе металлическая окраска, сѣро-синяя, и онъ хорошо проводитъ электричество. Нѣкоторыя наблюденія заставляютъ усумниться въ томъ, что селенъ B является особой аллотропической модификаціей элемента. Маркъ, близко изучавшій эту форму, склоненъ думать, что въ селенѣ B мы имѣемъ твердый растворъ двухъ химическихъ изомеровъ. Онъ быстро охлаждалъ B-селенъ, нагрѣтый предварительно до 200^0. Электропроводность такого быстро охлажденнаго селена не остается постоянной; она измѣняется, хотя температура можетъ и не измѣняться. Измѣненіе электроводности объясняется измѣненіемъ той системы равновѣсія, которая была въ формѣ B до ея нагрѣванія. Однако, переходъ къ иной системѣ равновѣсія совершается весьма медленно, въ особенности, если селенъ не содержитъ никакихъ примѣсей. Нѣкоторыя примѣси, напротивъ, дѣйствуя каталитически, значительно ускоряютъ процессъ установленія новаго равновѣсія.

Особенно выгодно въ этомъ отношеніи прибавленіе къ селену весьма небольшого количества серебра (0,1%). Такое же ускоряющее вліяніе оказываетъ треніе и слѣдующее за нимъ сжатіе вещества. Равновѣсіе, наблюдаемое въ селенѣ B, зависитъ не только отъ температуры, но и отъ освѣщенія его. Именно, свѣтъ сдвигаетъ равновѣсіе въ сторону той аллотропической формы, которая отличается наибольшею электропроводностью. При этомъ дѣйствіе свѣта не ограничивается только поверхностью освѣщаемаго селеноваго препарата, но измѣненіе наблюдается даже и внутри его, именно на глубинѣ $5 . 10^{-5}$ *мм.* отъ поверхности. Какъ извѣстно, благодаря способности селена B измѣнять электропроводность при измѣненіи освѣщенія, онъ сталъ примѣняться для многихъ научныхъ и практическихъ цѣлей. Къ сожалѣнію, до сихъ поръ почти ничего не извѣстно опредѣленнаго относительно тѣхъ отдѣльныхъ аллотропическихъ модификацій, которыя образуютъ систему равновѣсія въ селенѣ B. Селенъ находится въ той же группѣ періодической системы, что и сѣра; аллотропія его, поэтому, отчасти напоминаетъ аллотропію сѣры. Имѣются нѣкоторыя данныя, указывающія, что и у теллура наблюдается аллотропія, сходная съ разсмотрѣнными элементами. Въ этомъ случаѣ наблюдается подтвержденіе общаго правила, что элементы, находящіеся въ одной группѣ періодической системы, могутъ обнаруживать явленія аллотропіи сходнаго характера. Слѣдовательно, можно ожидать, что элементы, сходные съ фосфоромъ, будутъ также проявлять аллотропію, какъ и этотъ элементъ; и дѣйствительно, мы замѣчаемъ у мышьяка аллотропію, подобную аллотропіи фосфора. Въ газообразномъ состояніи при болѣе низкихъ температурахъ молекула мышьяка состоитъ изъ 4-хъ атомовъ, но при повышеніи температуры она диссоціируетъ по уравненію $AS_4 \leftrightarrows 2AS_2$. Зависимость диссоціаціи молекулы отъ температуры видна изъ слѣдующей таблицы 7.

Таблица 7.

Температура	Молекулярный вѣсъ	Формула	Температура	Молекулярный вѣсъ	Формула
644°	309	As 4,1	1325°	278	As 3,70
670°	308	As 4,1	1437°	189	As 2,52
764°	306	As 4,1	1715°	157	As 2,1
860°	295	As 3,93	1736°	160	As 2,1

Мышьякъ растворяется въ сѣрнистомъ углеродѣ, при чемъ въ растворѣ молекула остается четырехатомной. Если же мышьякъ будетъ растворенъ въ металлахъ, — напримѣръ, въ висмутѣ свинцѣ и кадміи, — то молекула его въ этихъ растворителяхъ распадается и можетъ быть даже одноатомной. Въ твердомъ состояніи мышьяка извѣстны три аллотропическія формы, которыя находятся одна къ другой въ отношеніи полиморфіи. Наиболѣе стойкая форма твердаго мышьяка имѣетъ сѣрый цвѣтъ и металлическія свойства. Мышьякъ въ этомъ видѣ является проводникомъ электричества. Другая же извѣстная форма мышьяка является очень нестойкой; она, вслѣдствіе этого, отличается и наибольшею растворимостью. Относительно растворимости этой модификаціи, извѣстной подъ названіемъ «желтаго мышьяка», имѣются слѣдующія данныя (таблица 8).

Таблица 8.

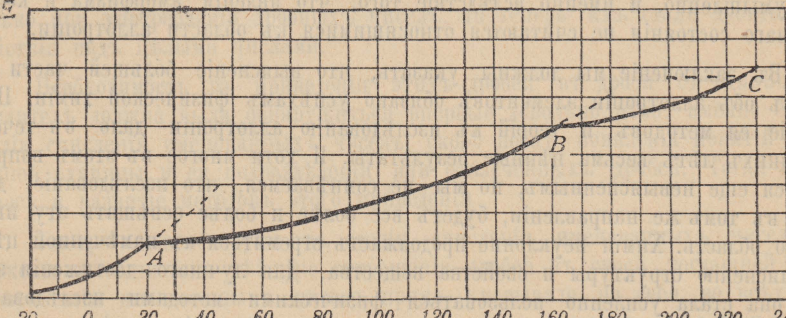
Температура	Желтый мышьякъ	Температура	Желтый мышьякъ
$+46^0$	11 *гр.*	-15^0	2,0 — 2,5 *гр.*
$18^0 - 20^0$	7,5 — 8,0 *гр.*	-60^0	0,8 — 1,0 *гр.*
12^0	5,5 — 6,0 *гр.*	-80^0	
0^0	3,8 — 4,0 *гр.*		

Нестойкость желтаго мышьяка проявляется въ томъ, что онъ уже при незначительномъ нагрѣваніи или освѣщеніи переходитъ въ третье видоизмѣненіе, именно въ «черный мышьякъ». Этотъ же послѣдній при высокой температурѣ превращается вновь въ сѣрый металлическій мышьякъ. Такой порядокъ превращенія формъ необратимъ. Желтый мышьякъ, какъ наименѣе стойкая форма, образуется прежде другихъ модификацій этого элемента. Такъ, напримѣръ, онъ образуется при быстрой конденсаціи паровъ мышьяка, или же при возстановленіи мышьяковистой кислоты въ растворѣ, и затѣмъ уже изъ него образуется черный и сѣрый мышьякъ. Черный мышьякъ также можно получить изъ паровъ элемента. Именно, при высокой температурѣ парообразный мышьякъ отлагается на стеклѣ въ видѣ чернаго зеркальнаго слоя, который при дальнѣйшемъ нагрѣваніи превращается въ сѣрый мышьякъ. Установлено, что молекула желтаго мышьяка состоитъ изъ 4-хъ атомовъ, но вслѣдствіе полиморфизма и другія аллотропическія формы мышьяка также должны состоять изъ четырехатомныхъ молекулъ.

Весьма интересныя явленія аллотропіи наблюдаются у олова. Извѣстны три аллотропическія модификаціи этого элемента, которыя находятся въ отношеніи полиморфіи. Одна изъ формъ извѣстна подъ названіемъ сѣраго олова. Она превращается въ бѣлое олово, а послѣднее превращается въ ромбическое. Первая и вторая формы олова принадлежатъ къ тетрагональной системѣ. Переходъ тетрагональной модификаціи въ ромбическую зависитъ прежде всего отъ температуры. При $18,9^0$ сѣры тетрагональное олово переходитъ въ бѣлое, этой же кристаллической формы. Переходъ же въ ромбическую форму совершается при 161^0. Эта послѣдняя форма плавится при 232^0. Температуры же плавленія тетрагональнаго олова мы не знаемъ. Можно, конечно, дѣйствуя осторожно, нагрѣвать каждую изъ модификацій выше предѣла ея существованія, и она при этомъ не перейдетъ въ слѣдующую форму. Но сильно перейти температурные предѣлы нельзя. Прилагаемый чертежъ (фиг. 4) указываетъ моменты перехода одной аллотропической формы олова въ другую. Они обозначены буквами

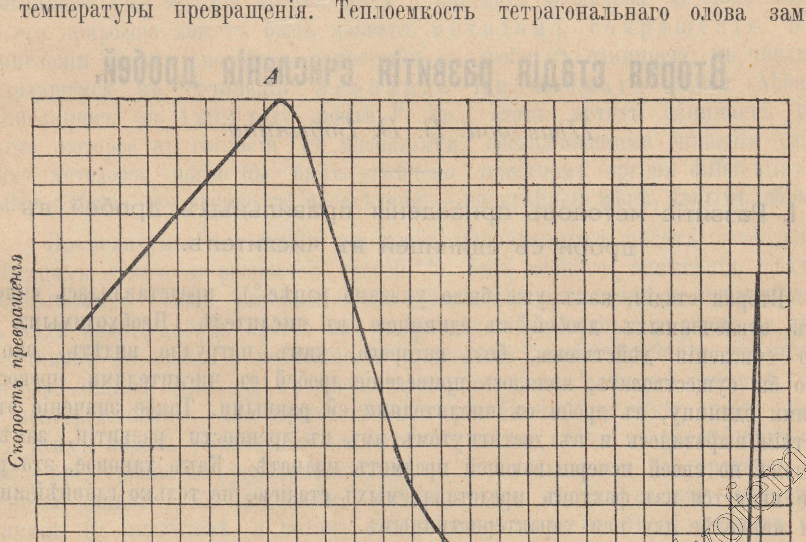
A, B и C. Пунктирныя линіи у точекъ A, B и C указываютъ въ какихъ предѣлахъ можно перейти за границы существованія отдѣльныхъ формъ.

Скорость превращенія одной формы въ другую измѣняется, понятно, съ измѣненіемъ температуры. Прилагаемый чертежъ (фиг. 5) указываетъ, что скорость



Фиг. 4.

увеличивается тѣмъ больше, чѣмъ дальше отстоитъ температура изслѣдованія отъ температуры превращенія. Теплоемкость тетрагональнаго олова замѣтно



Фиг. 5.

измѣняется съ измѣненіемъ температуры. Подобныхъ же данныхъ относительно ромбическаго олова мы не имѣемъ.

Въ предлагаемомъ очеркѣ мы далеко не исчерпали всего имѣющагося относительно аллотропіи элементовъ матеріала. Мы разсмотрѣли только случаи, наиболѣе изученные. Поэтому въ виду недостаточности изслѣдованій мы не коснулись весьма интереснаго вопроса объ аллотропіи углерода, кремнія, бора, желѣза и сурьмы. Кромѣ того, въ настоящей статьѣ не разсматривались вещества, находящіяся въ аморфномъ и коллоидальномъ состояніяхъ. Но это сдѣлано умышленно, и именно вслѣдствіе того, что явленія аморфизма и коллоидальнаго состоянія не считаются относящимися къ области аллотропіи.

Въ заключеніе мы должны указать, что выясненіе бо́льшей части вопросовъ объ аллотропіи элементовъ обязано успѣхамъ физической химіи. Примѣненіе ея методовъ и теорій къ изслѣдованію аллотропіи дало въ теченіе послѣднихъ лѣтъ весьма цѣнные результаты. И хотя многое въ этомъ вопросѣ остается еще невыясненнымъ, но мы не сомнѣваемся, что изслѣдованіе, двигаясь въ томъ же направленіи, будетъ все болѣе и болѣе освѣщать эту интересную область. Химія неуклонно продолжаетъ стремиться къ намѣченной цѣли: къ выясненію структуры и свойства вещества. Для лучшаго достиженія этой цѣли она стала усиленно пользоваться физическими методами изслѣдованія. Выяснивъ съ ихъ помощью многіе изъ случаевъ аллотропіи, химія разрѣшила часть своей широкой задачи о природѣ матеріи.

Вторая стадія развитія счисленія дробей.

Прив.-доц. В. В. Бобынина.

I. Развитіе методовъ приведенія правильныхъ дробей въ дроби съ единицей въ числителѣ.

Вторая стадія, какъ уже было указано ранѣе*), представлялась счисленіемъ отвлеченныхъ дробей съ единицею въ числителѣ. Необходимымъ для этого счисленія дѣйствіемъ, безъ котораго, какъ нетрудно видѣть, оно не могло бы существовать, являлось приведеніе дробей съ числителями, превосходящими единицу, въ дроби съ числителями, ей равными. Такое значеніе этого дѣйствія выразилось и въ достигнутомъ имъ въ древности развитіи, замѣчательномъ по своей исчерпывающей предметъ полнотѣ. Какъ таковое, это развитіе является изъ фактовъ, представляемыхъ стадіею, не только главнѣйшимъ, но и наиболѣе для нея характеристичнымъ.

Въ эпохи, когда счетъ въ своемъ употребленіи главныхъ ариѳметическихъ дѣйствій ограничивался въ качествѣ самостоятельныхъ только двумя основными изъ нихъ, т. е. сложеніемъ и вычитаніемъ, отвлеченныя дроби съ числителями, превосходящими единицу, появлялись въ результатахъ соверше-

*) В. В. Бобынинъ. — „Исторія первоначальнаго развитія счисленія дробей“. „Вѣстникъ“, № 535, стр. 177—184.

нія этихъ дѣйствій надъ дробными числами. Позднѣе, когда въ практикѣ счета совершилось присоединеніе къ двумъ основнымъ ариѳметическимъ дѣйствіямъ еще и двухъ производныхъ отъ нихъ, т. е. умноженія и дѣленія, въ качествѣ самостоятельныхъ, во второмъ изъ этихъ дѣйствій, дѣленіи, открылся новый, гораздо болѣе мощный, чѣмъ прежніе, источникъ образованія дробей съ числителями, превосходящими единицу. Если такія дроби получались прежде только при употребленіи дробныхъ чиселъ, то теперь ихъ стали доставлять и дѣйствія надъ цѣлыми числами.

Необходимость въ приведеніи этихъ дробей въ дроби съ единицею въ числителѣ должна была обнаружиться впервые довольно рано, именно еще въ стадіи счисленія именованныхъ чиселъ, скоро послѣ появленія понятій отвлеченной единицы и ея подраздѣленій или отвлеченныхъ дробей. Тогда же началось и развитіе методовъ этого приведенія.

Употреблявшееся уже въ стадіи счисленія именованныхъ чиселъ при сложеніи и вычитаніи дѣйствіе сокращенія дробей въ своей тогдашней формѣ превращенія именованныхъ чиселъ прямо указывало на себя во всѣхъ случаяхъ, когда числитель являлся дѣлителемъ знаменателя, какъ на средство приведенія дроби съ числителемъ, превосходящимъ единицу, въ дробь съ единицею въ числителѣ. Для этого приведенія, слѣдовательно, съ первыхъ временъ ознакомленія съ отвлеченными дробями въ распоряженіи счетчиковъ уже имѣлся методъ, хотя и частнаго характера, который согласно съ его природою можетъ быть названъ методомъ сокращенія. Въ перечисленіи восьми способовъ приведенія въ дроби съ единицею въ числителѣ, находящемся въ сочиненіи Леонарда Пизанскаго «Liber Abbaci» *) написанномъ въ 1202 году послѣ Р. Хр., этотъ методъ занимаетъ первое мѣсто, которое въ согласіи съ названіями, обозначающими описанія слѣдующихъ методовъ, могло бы быть отмѣчено терминомъ «prima differentia». Въ «Liber Abbaci» это однако же не сдѣлано, — по крайней мѣрѣ, явнымъ образомъ.

Практикуемое въ стадіи счисленія именованныхъ чиселъ оставленіе въ таблицахъ суммъ и разностей дробей **) безъ всякаго измѣненія тѣхъ изъ предлагаемыхъ суммъ, которыя послѣ совершенія вычисленія не представляются въ видѣ какого-нибудь одного изъ подраздѣленій единицы, не могло не навесть счетчиковъ на мысль о возможности приведенія данной дроби съ числителемъ, превосходящимъ единицу, въ дроби съ числителями, равными единицѣ, черезъ ея непосредственное или посредственное разложеніе на такія дроби. Первый изъ этихъ видовъ разложенія является въ то же время и простѣйшимъ, такъ какъ представляется усматриваемымъ съ перваго взгляда на предметъ разложеніемъ данной дроби на дроби, имѣющія при общемъ съ нею знаменателѣ единицы въ числителѣ, и потому всегда получаемыя въ числѣ, равномъ числителю данной дроби. Въ этой своей первоначальной формѣ и появился въ распоряженіи счетчиковъ другой основной способъ приведенія данной дроби съ числителемъ, превосходящимъ единицу, въ дроби съ числителями, ей равными,

*) Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo (2 тома in 4°. Римъ. 1857 и 1862. Т. I, p. 77 — 83).

**) В. В. Бобынинъ. — „Исторія первоначальнаго развитія счисленія дробей", стр. 181 — 182.

который можетъ быть названъ по своей природѣ методомъ непосредственнаго разложенія.

Легко усматриваемая при употребленіи метода непосредственнаго разложенія возможность разлагать числителя данной дроби не только на единицы, но и на другія числа, должна была привесть размышляющаго счетчика къ мысли производить разложенія числителя на слагаемыя такъ, чтобы къ получаемымъ результатамъ могъ быть примѣненъ методъ сокращенія. Благодаря этой мысли, передъ пришедшими къ ней счетчиками снова выступалъ, но уже въ опредѣлившемся вполнѣ выраженіи, второй изъ указанныхъ выше двухъ видовъ разложенія дроби, т. е. ея посредственное разложеніе на дроби съ единицею въ числителѣ. Къ двумъ простымъ основнымъ методамъ присоединился такимъ образомъ представляющій ихъ сочетаніе сложный методъ, который можетъ быть названъ методомъ посредственнаго разложенія или также методомъ соединенія разложенія съ сокращеніемъ. Важнымъ, особенно въ практическомъ отношеніи, результатомъ введенія этого метода въ употребленіе была замѣна малоудобныхъ рядовъ одинаковыхъ дробей имѣющими гораздо меньшія числа членовъ рядами различныхъ дробей съ неодинаковыми знаменателями и съ равными единицѣ числителями. Примѣромъ этого перваго по времени своего происхожденія сложнаго метода можетъ служить заимствованное изъ Папируса Ринда*) разложеніе дроби

$$\frac{7}{10}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}.$$

Этотъ методъ описанъ въ «Liber Abbaci» подъ именемъ «secunda differentia» на второмъ мѣстѣ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда числитель разлагаемой дроби не оказывается способнымъ къ разложенію на слагаемыя, равныя множителямъ знаменателя, эта способность иногда, если имѣть въ виду только дроби съ небольшими числителями и знаменателями, можетъ быть доставлена ему умноженіемъ обоихъ членовъ дроби на одно и то же число. Такъ, дробь $\frac{9}{26}$ послѣ умноженія ея членовъ на 2 представляется уже въ видѣ:

$$\frac{9}{26}=\frac{18}{52}=\frac{13+4+1}{52}=\frac{1}{4}+\frac{1}{13}+\frac{1}{52}.$$

Таковъ былъ первый, а потому и простѣйшій, способъ расширенія первоначальной области приложенія метода соединенія разложенія съ сокращеніемъ.

Методъ непосредственнаго разложенія уже при своемъ введеніи былъ общимъ методомъ. Что же касается болѣе удобнаго метода соединенія разло-

---

*) Написанъ гіератическими письменами за 1700 лѣтъ до Р. Хр. египетскимъ жрецомъ изъ класса писцовъ Амесомъ. Изданъ проф. Августомъ Эйзенлоромъ подъ заглавіемъ „Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter“ (Лейпцигъ, 1877; 2-ое изд. тамъ же, 1891). См. также статью В. В. Бобынина „Древне-египетская математика въ эпоху владычества Гиксовъ“ [Журналъ Министерства Народнаго Просвѣщенія, новая серія XXIII (1909, № 10) и XXIV (1909, № 11), отд. 2].

женія съ сокращеніемъ, то непосредственно онъ могъ прилагаться только къ дробямъ, имѣющимъ знаменателями сложныя числа, а числителями — числа, разлагающіяся на слагаемыя, равныя всѣмъ множителямъ знаменателя или только нѣкоторымъ изъ нихъ. Между случаями, когда изъ этихъ двухъ условій оказывается удовлетвореннымъ только одно первое, есть очень много такихъ, въ которыхъ способность, требуемая вторымъ условіемъ, можетъ быть доставлена числителю сообразованнымъ съ этою цѣлью преобразованіемъ дроби. Между различными частными случаями этого рода однимъ изъ простѣйшихъ вслѣдствіе своей доступности для самаго несложнаго умозрѣнія является *тотъ, въ которомъ числитель есть дѣлитель суммы двухъ взаимно-дополнительныхъ множителей знаменателя.* Въ этихъ случаяхъ, дѣйствительно, прямо усматривается, что для полученія въ числителѣ суммы двухъ взаимно-дополнительныхъ множителей знаменателя каждый изъ членовъ дроби долженъ быть умноженъ на цѣлое число, представляемое частнымъ, происшедшимъ отъ дѣленія суммы двухъ взаимно-дополнительныхъ множителей знаменателя на числителя. Выражающееся въ этомъ соображеніи приложеніе умозрѣнія можетъ быть представлено съ помощью знакоположенія новѣйшей науки въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{a}{bc} = \frac{a\cdot\frac{b+c}{a}}{bc\cdot\frac{b+c}{a}} = \frac{b+c}{bc\cdot\frac{b+c}{a}} = \frac{b}{bc\cdot\frac{b+c}{a}} + \frac{c}{bc\cdot\frac{b+c}{a}} =$$

$$= \frac{1}{c\cdot\frac{b+c}{a}} + \frac{1}{b\cdot\frac{b+c}{a}}.$$

Въ словесномъ выраженіи окончательный результатъ приведеннаго умозрѣнія можетъ быть представленъ въ видѣ слѣдующаго правила: *дробь, числитель которой есть дѣлитель суммы двухъ взаимно-дополнительныхъ множителей знаменателя, разлагается на двѣ дроби, имѣющія числителемъ единицу, а знаменателемъ произведеніе одного изъ двухъ взаимно-дополнительныхъ множителей даннаго знаменателя на частное, происшедшее отъ дѣленія суммы тѣхъ же множителей на даннаго числителя.* Изъ дошедшихъ до новѣйшаго времени памятниковъ математической литературы второй стадіи развитія счисленія дробей употребленіе этого правила въ практикѣ счисленія встрѣчается въ написанномъ въ VII — VIII вв. послѣ Р. Хр. греко-египетскомъ математическомъ папирусѣ изъ Акмима*). Примѣромъ находящихся здѣсь случаевъ приложенія указаннаго правила можетъ служить содержащееся въ задачѣ № 23 **) разложеніе дроби $\frac{2}{35}$.

*) Акмимъ, въ древности Панополисъ, некрополь въ Верхнемъ Египтѣ, въ одной изъ могилъ котораго и былъ найденъ упомянутый папирусъ, изслѣдованный первоначально г. *Балльe*. См. 1-й выпускъ IX тома „Mémoires publiés par les membres de la Mission archéologique française au Caire (Paris, 1892).

**) Тамъ же: I. *Baillet* — Le papyrus mathématique d'Akhmîm, p. 39 et 42.

Съ помощью новѣйшаго знакоположенія процессъ этого разложенія представляется въ видѣ:

$$\frac{2}{5\,.\,7}=\frac{2\,.\,\frac{5+7}{2}}{5\,.\,7\,.\,\frac{5+7}{2}}=\frac{1}{7\,.\,\frac{5+7}{2}}+\frac{1}{5\,.\,\frac{5+7}{2}}=\frac{1}{42}+\frac{1}{30}.$$

Въ самомъ же папирусѣ ему сообщено слѣдующее лишенное всякихъ объясненій выраженіе: «ищите $\frac{1}{35}$ отъ 2. Каковы множители 35? $5\times 7=35$; $5+7=12$; $12:2=6$; $6\times 5=30$; $6\times 7=42$. Искомое $\frac{1}{30}\,\frac{1}{42}$». Другого выраженія, болѣе полнаго и яснаго, конечно, и нельзя было ждать въ условіяхъ, создаваемыхъ господствомъ рецептообразно-догматическаго способа изложенія.

Въ группу дробей, въ которыхъ числитель есть дѣлитель суммы двухъ взаимно-дополнительныхъ множителей знаменателя входятъ, очевидно, также и дроби, имѣющія при сложномъ знаменателѣ числителемъ единицу. Всѣ такія дроби могутъ быть, слѣдовательно, разлагаемы на другія дроби съ числителями, равными единицѣ, при помощи вышеприведеннаго правила, какъ найденнаго для всей группы. За этимъ заключеніемъ, какъ за доставляющимъ легкое средство для превращенія одного разложенія на дроби съ числителями, равными единицѣ, въ другія, имѣющія болѣе значительныя числа членовъ, должно быть признано очень важное значеніе какъ въ теоретическомъ отношеніи, такъ и въ практическомъ. И, несмотря на это, изъ всѣхъ дошедшихъ до новѣйшаго времени памятниковъ математической литературы второй стадіи развитія счисленія дробей знаніе этого важнаго вывода и пользованіе имъ въ практикѣ встрѣчаются только въ акмимскомъ папирусѣ. Яркимъ выраженіемъ того и другого является въ немъ задача № 50, требующая «разложить $\frac{1}{12}$ на шесть дробей». Для примѣра достаточно, впрочемъ, привести изъ содержащихся въ рѣшеніи этой задачи разложеній разсматриваемаго рода только одно, и пусть имъ будетъ разложеніе дроби $\frac{1}{18}$. При употребленіи новѣйшаго знакоположенія процессъ этого разложенія представится въ видѣ:

$$\frac{1}{18}=\frac{1}{2\,.\,9}=\frac{2+9}{2\,.\,9\,.\,(2+9)}=\frac{1}{9\,.\,11}+\frac{1}{2\,.\,11}=\frac{1}{22}+\frac{1}{99}.$$

Что же касается выраженія того же процесса въ акмимскомъ папирусѣ, то во всемъ существенномъ оно не отличается отъ предыдущаго примѣра, какъ заимствованнаго изъ того же источника.

Приложеніе представленнаго сейчасъ процесса разложенія дроби съ единицею въ числителѣ и со сложнымъ числомъ въ знаменателѣ всегда даетъ въ разложеніи два члена, но болѣе, по легко понятной причинѣ, дать не можетъ. Чтобы получить трехчленное разложеніе, нужно приложить тотъ же процессъ къ одной изъ дробей найденнаго двучленнаго разложенія. При встрѣчающейся, напримѣръ, въ указанной уже задачѣ № 50 акмимскаго папируса необходимости разложить дробь $\frac{1}{22}$ на три дроби это разложеніе можно было бы вести на основаніи сказаннаго слѣдующимъ путемъ:

$$\frac{1}{22}=\frac{2+11}{2.11.13}=\frac{1}{11.13}+\frac{1}{2.13}=\frac{1}{143}+\frac{2+13}{2.13.15}=$$

$$=\frac{1}{143}+\frac{1}{13.15}+\frac{1}{2.15}=\frac{1}{30}+\frac{1}{143}+\frac{1}{195}.$$

Въ акмимскомъ папирусѣ этому прямому пути,— можетъ быть, вслѣдствіе стремленія получить членами разложенія дроби съ меньшими знаменателями,— предпочитался путь обходной, состоящій въ предшествующемъ употребленію главнаго процесса приложеніи метода соединенія разложенія съ сокращеніемъ. Чтобы при посредствѣ указаннаго уже выше способа (стр. 255) сдѣлать это приложеніе возможнымъ, оба члена разлагаемой дроби умножались на одно и то же выбранное соотвѣтствующимъ образомъ цѣлое число. Въ упомянутомъ уже разложеніи дроби $\frac{1}{22}$ этимъ цѣлымъ числомъ было 5, и весь избранный папирусомъ путь представлялся въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{1}{22}=\frac{5}{2.55}=\frac{5}{10.11}=\frac{2}{2.55}+\frac{3}{110}=\frac{1}{55}+\frac{3}{10.11}=$$

$$=\frac{1}{55}+\frac{3\cdot\frac{10+11}{3}}{10.11.\frac{10+11}{3}}=\frac{1}{55}+\frac{10+11}{10.11.7}=\frac{1}{55}+\frac{1}{70}+\frac{1}{77}.$$

Послѣ открытія процесса, приведшаго къ вышеприведенному правилу, должно было само собою появиться стремленіе къ распространенію этого процесса, хотя бы и съ нѣкоторыми измѣненіями, также и на случаи, въ которыхъ сумма двухъ взаимно-дополнительныхъ множителей знаменателя не дѣлится безъ остатка на числителя. Представившимся для этого средствомъ была замѣна помянутой суммы такою новою, дѣлящеюся на числителя, которая получалась бы отъ прежней черезъ умноженіе одного изъ ея слагаемыхъ на какое-нибудь цѣлое число. Умозрѣніе и опытъ должны были, отдѣльно или вмѣстѣ, показать счетчикамъ, что въ дробяхъ разложенія, получаемаго послѣ указанной сейчасъ замѣны, при прежнемъ составѣ знаменателей числитель одной есть единица, а другой — цѣлое число, взятое для произведеннаго, по вышесказанному, умноженія. Счетчики приводились такимъ образомъ къ познанію въ разсматриваемомъ случаѣ правила, отличающагося отъ соотвѣтствующаго правила въ предыдущемъ или основномъ случаѣ только тѣмъ, что числителемъ одной изъ двухъ дробей разложенія будетъ уже не единица, а то цѣлое число, которое было взято для упомянутаго умноженія. Такъ какъ этимъ числомъ наряду со всѣми другими цѣлыми числами можетъ быть и единица, то найденное сейчасъ правило является не болѣе какъ обобщеніемъ предыдущаго. Разложеніе, получаемое при употребленіи этого правила не будетъ, говоря вообще, окончательнымъ и для достиженія послѣдняго потребуется еще дополнительное разложеніе. Что же касается процесса разложенія, который является подобно доставляемому имъ правилу не болѣе какъ обобщеніемъ предыдущаго или основнаго, то онъ представляется при употребленіи новѣйшаго знакоположенія въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{a}{bc}=\frac{a\cdot\dfrac{b+mc}{a}}{b\,.\,c\,.\,\dfrac{b+mc}{a}}=\frac{b+mc}{bc\,.\,\dfrac{b+mc}{a}}=\frac{1}{c\,.\,\dfrac{b+mc}{a}}+\frac{m}{b\,.\,\dfrac{b+mc}{a}}.$$

Въ тѣхъ изъ частныхъ случаевъ разложенія, доставленнаго этимъ процессомъ, въ которыхъ числитель, превосходящій единицу, является дѣлителемъ одного изъ множителей знаменателя, искомое окончательное разложеніе достигается простымъ сокращеніемъ соотвѣтствующей дроби на ея числителя. Что же касается частныхъ случаевъ другого рода, т. е. не допускающихъ непосредственнаго приложенія метода сокращенія, то въ нихъ для полученія окончательнаго разложенія требуется уже не этотъ методъ, а какой-нибудь другой изъ числа употребляемыхъ въ соотвѣтствующую эпоху.

Соединенное съ употребленіемъ въ практикѣ вычисленій знакомство съ указанною сейчасъ обобщенною формою разсматриваемаго метода разложенія какъ въ ея общемъ видѣ, такъ и въ указанныхъ частныхъ случаяхъ, изъ всѣхъ дошедшихъ до новѣйшаго времени памятниковъ математической литературы второй стадіи развитія счисленія дробей встрѣчается только въ акмимскомъ папирусѣ. Доставляемые имъ примѣры соотвѣтствующаго рода находятся въ задачахъ подъ №№ 18, 39 и 40. Изъ этихъ примѣровъ достаточно привести находящееся въ задачѣ № 39 разложеніе дроби $\frac{7}{176}$, какъ пользующееся одновременно и обобщеніемъ разсматриваемаго метода разложенія и его вышеуказанными частными случаями. Съ помощью новѣйшаго знакоположенія процессъ этого разложенія въ его начальной части представляется въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{7}{11\times16}=\frac{7\times\dfrac{3\times11+16}{7}}{11\times16\times\dfrac{3\times11+16}{7}}=\frac{3\times11+16}{11\times16\times\dfrac{3\times11+16}{7}}=$$

$$=\frac{3}{16\times\dfrac{3\times11+16}{7}}+\frac{1}{11\times\dfrac{3\times11+16}{7}}=\frac{3}{112}+\frac{1}{77}.$$

Что же касается заключительной части, состоящей въ отдѣльномъ разложеніи дроби $\frac{3}{112}$, то она, какъ пользующаяся для этого методомъ, употребленнымъ въ первой части, представляется въ одинаковомъ съ нею видѣ, т. е. въ слѣдующемъ:

$$\frac{3}{7\times 16}=\frac{3\times\frac{2\times 7+16}{3}}{7\times 16\times\frac{2\times 7+16}{3}}=\frac{2\times 7+16}{7\times 16\times 10}=\frac{2}{16\times 10}+\frac{1}{70}=\frac{1}{80}+\frac{1}{70}.$$

Итакъ, окончательнымъ видомъ искомаго разложенія будетъ:

$$\frac{7}{176}=\frac{1}{70}+\frac{1}{77}+\frac{1}{80}.$$

Изложеніе приведеннаго примѣра, данное въ самомъ папирусѣ, таково: «ищите $\frac{1}{176}$ отъ 7. Каковы множители 176? 11×16; $3\times 11=33$; $33+16=49$; $49:7=7$; $7\times 11=77$; $7\times 16=112$. Ищите еще $\frac{1}{112}$ отъ 3. Каковы множители 112? 7×16; $2\times 7=14$; $14+16=30$; $30:3=10$; $10\times 7=70$; $10\times 16=160$ и возьмите $\frac{1}{160}$ отъ 2, что дастъ $\frac{1}{80}$. Повторный результатъ $\frac{1}{70}\,\frac{1}{77}\,\frac{1}{80}$».

Найденныя въ предыдущемъ правила — основное для дробей, въ которыхъ числитель есть дѣлитель суммы двухъ взаимно-дополнительныхъ множителей знаменателя, и представляющее его обобщеніе для дробей, числители которыхъ такимъ свойствомъ не обладаютъ, — могутъ быть разсматриваемы, очевидно, какъ представляющія вмѣстѣ методъ разложенія всѣхъ вообще дробей со сложными знаменателями. Этотъ методъ легко можетъ быть распространенъ также и на дроби, знаменатели которыхъ числа первыя, и тѣмъ сдѣлаться уже методомъ всеобщимъ. Для этого нужно только принять во вниманіе, что двумя взаимно-дополнительными множителями всякаго перваго числа, а вмѣстѣ съ нимъ и всякаго цѣлаго числа вообще, всегда являются единица и само число. Въ своемъ значеніи всеобщаго разсматриваемый методъ можетъ быть названъ методомъ разложенія всякой дроби по взаимно-дополнительнымъ множителямъ ея знаменателя.

Основное правило обнаружившагося сейчасъ метода можетъ быть въ силу изложенныхъ соображеній прямо приложено къ тѣмъ дробямъ съ простымъ или первымъ знаменателемъ, въ которыхъ числитель есть дѣлитель увеличеннаго единицею знаменателя. Не встрѣчающееся въ акмимскомъ папирусѣ, это приложеніе разсматриваемаго метода оказывается нашедшимъ себѣ мѣсто въ «Liber Abbaci» Леонарда Пизанскаго подъ именемъ «tertia differentia disgregationis». Какъ и слѣдовало ожидать въ виду господства въ соотвѣтствующія эпохи рецептообразно-догматическаго способа изложенія, оно представлено здѣсь не въ общемъ видѣ, а какъ лишенное всякихъ объясненій непосредственное приложеніе невысказаннаго правила къ частному случаю $\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6\,.\,11}$.

По сходству въ основномъ для настоящаго случая свойствѣ числителей Леонардъ привлекаетъ къ разсмотрѣнію здѣсь же также и такія дроби со сложнымъ числомъ въ знаменателѣ, въ которыхъ числитель есть дѣлитель увеличеннаго единицею знаменателя. Въ качествѣ примѣровъ онъ приводитъ здѣсь дроби $\frac{4}{63}$ и $\frac{3}{77}$. Для ихъ разложенія правиломъ, составляющимъ предметъ «третьей дифференціи», онъ однако же не пользуется, впадая этимъ въ явную непослѣдовательность. Вмѣсто него онъ употребляетъ методъ соединенія сокращенія съ разложеніемъ, дѣлая его приложеніе возможнымъ при посредствѣ способа, указаннаго уже выше (стр. 254) и состоящаго въ умноженіи членовъ дроби на одно и то же выбранное въ соотвѣтствіи съ преслѣдуемою цѣлью число. Этими числами онъ избираетъ въ первомъ примѣрѣ 2, а во второмъ 4. Выраженныя не въ видѣ одного конечнаго результата, а вполнѣ, оба разложенія представляются соотвѣтственно въ слѣдующихъ видахъ:

$$\frac{4}{63}=\frac{4}{7\,.\,9}=\frac{8}{14\,.\,9}=\frac{7}{14\,.\,9}+\frac{1}{14\,.\,9}=\frac{1}{2\,.\,9}+\frac{1}{14\,.\,9}=\frac{1}{18}+\frac{1}{126}.$$

$$\frac{3}{77}=\frac{3}{7\,.\,11}=\frac{12}{44\,.\,7}=\frac{11}{44\,.\,7}+\frac{1}{44\,.\,7}=\frac{1}{4\,.\,7}+\frac{1}{44\,.\,7}=\frac{1}{28}+\frac{1}{308}.$$

При употребленіи правила, составляющаго предметъ третьей дифференціи, разложенія тѣхъ же дробей были бы таковы:

$$\frac{4}{63}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16\,.\,63}=\frac{1}{16}+\frac{1}{1008},$$

$$\frac{3}{77}=\frac{1}{26}+\frac{1}{26\,.\,77}=\frac{1}{26}+\frac{1}{2002}.$$

Стремленіе избѣжать большихъ знаменателей въ дробяхъ разложеній и было вѣроятною причиною впаденія Леонарда Пизанскаго въ указанную непослѣдовательность.

Обладая знакомствомъ съ представляемымъ «третьею дифференціею» приложеніемъ метода разложенія дроби по взаимно-дополнительнымъ множителямъ ея знаменателя, Леонардъ не зналъ однако же трехъ другихъ его приложеній, какъ это прямо слѣдуетъ изъ отсутствія въ «Liber Abbaci» трехъ «дифференцій», которыя должны были бы имѣть предметами два приложенія къ дробямъ со сложными знаменателями и приложеніе къ тѣмъ изъ дробей съ простымъ или первымъ знаменателемъ, въ которыхъ числитель не есть дѣлитель увеличеннаго единицею знаменателя. Еще болѣе важное свидѣтельство въ пользу указаннаго заключенія даютъ содержащіеся въ третьей дифференціи и приведенные выше примѣры разложенія дробей со сложными знаменателями. Такъ какъ въ каждой изъ этихъ дробей числитель есть дѣлитель суммы двухъ взаимно-дополнительныхъ множителей знаменателя, то къ ихъ разложенію могло бы быть приложено правило, найденное для всей содержащей ихъ въ себѣ группы дробей со сложными знаменателями. И если бы Леонардъ это сдѣлалъ, то получилъ бы разложенія въ отношеніи величины знаменателей болѣе простыя, чѣмъ найденныя имъ въ дѣйствительности. При умѣніи ихъ найти онъ, конечно, ими бы и воспользовался. Вотъ эти разложенія:

$$\frac{4}{63}=\frac{4}{7.9}=\frac{16}{7.9.4}=\frac{7+9}{7.9.4}=\frac{1}{28}+\frac{1}{36},$$

$$\frac{3}{77}=\frac{3}{7.11}=\frac{7+11}{7.11.6}=\frac{1}{42}+\frac{1}{66}.$$

Примѣромъ приложенія разсматриваемаго общаго метода къ дробямъ, въ которыхъ при знаменателѣ, представляемомъ числомъ первымъ, числитель не есть дѣлитель знаменателя, увеличеннаго единицею, можетъ служить слѣдующій:

$$\frac{5}{23}=\frac{1+3.23}{23.14}=\frac{1}{23.14}+\frac{3}{14}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{322}.$$

Въ дошедшихъ до новѣйшаго времени произведеніяхъ математической литературы второй стадіи развитія счисленія дробей случаи этого рода однако же не встрѣчаются.

Процессъ разложенія всякой дроби на дроби съ единицей въ числителѣ всегда можетъ быть начатъ съ прямого опредѣленія одного изъ членовъ отыскиваемаго разложенія. Такимъ членомъ — и притомъ усматриваемымъ непосредственно — является въ случаѣ дробей со сложными знаменателями дробь, имѣющая при общемъ знаменателѣ съ данною дробью числителемъ одного изъ множителей знаменателя. Для превращенія этой дроби въ дробь съ единицею въ числителѣ достаточно сократить ее на упомянутаго множителя. Въ случаѣ дробей съ простыми или первыми знаменателями прямо усматриваемымъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, членомъ разложенія является дробь, имѣющая при общемъ знаменателѣ съ данною дробью единицу въ числителѣ. Получаемый въ обоихъ случаяхъ послѣ отдѣленія найденнаго члена разложенія отъ данной дроби остатокъ можетъ имѣть числителемъ или единицу или какое-нибудь другое цѣлое число. Въ первомъ случаѣ разложеніе кончено, во второмъ же оно должно быть продолжаемо при посредствѣ приложенія къ упомянутому остатку употребляемыхъ въ соотвѣтствующія эпохи методовъ разложенія.

Въ случаѣ дробей съ простыми или первыми знаменателями дробь, полученная послѣ отдѣленія отъ данной дроби найденнаго указаннымъ образомъ члена разложенія, можетъ имѣть числителемъ или дѣлителя увеличеннаго единицею знаменателя или какое-нибудь другое изъ цѣлыхъ чиселъ. Такъ какъ изъ этихъ двухъ случаевъ Леонардъ Пизанскій, по сказанному выше, зналъ только первый, то въ «Liber Abbaci» имъ однимъ подъ именемъ «quarta differentia disgregationis» онъ и занимается, доставляя этимъ новое свидѣтельство въ пользу высказаннаго выше заключенія о знаніи имъ изъ всѣхъ приложеній метода взаимно-дополнительныхъ множителей знаменателя только того одного, которое находило себѣ мѣсто въ случаѣ, имъ разсматриваемомъ. Разложеніе, доставляемое этимъ приложеніемъ, какъ нетрудно видѣть, будетъ всегда трехчленнымъ. Примѣромъ его Леонардъ выбираетъ разложеніе:

$$\frac{5}{11}=\frac{1}{11}+\frac{4}{11}=\frac{1}{11}+\frac{11+1}{11\cdot\frac{11+1}{4}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}.$$

Изъ безконечнаго множества частныхъ случаевъ, представляемыхъ дробями со сложными знаменателями въ отношеніи опредѣленія члена, находимаго въ отыскиваемомъ разложеніи непосредственно, Леонардъ Пизанскій зналъ только два, именно представляемые дробями съ четными знаменателями и дробями со знаменателями, кратными числу 3. Въ «Liber Abbaci» они излагаются первый, какъ quinta differentia, второй, какъ sexta differentia. Что же касается разложенія остатка, получаемаго отъ вычитанія найденнаго члена разложенія изъ разлагаемой дроби, то въ отношеніи его Леонардъ Пизанскій стоялъ на той же точкѣ зрѣнія, которая вслѣдствіе отсутствія яснаго пониманія и достаточнаго знанія обстоятельствъ и условій вопроса была совершенно непроизвольно и, можно даже сказать, безсознательно занята имъ въ случаѣ дробей съ простыми знаменателями. Какъ въ этомъ случаѣ, такъ и въ настоящемъ, слѣдуя образцу, представляемому первымъ, онъ занимается разложеніемъ упомянутаго остатка только тогда, когда числитель послѣдняго есть дѣлитель увеличеннаго единицею знаменателя. Здѣсь, какъ и тамъ, противный случай, обнимающій всѣ остальныя дроби со сложными знаменателями, для него не существовалъ. Приводимыми имъ примѣрами являются, поэтому, разложенія дробей въ quinta differentia $\frac{11}{26}$ и въ sexta differentia $\frac{17}{27}$. По сказанному выше, прямо усматриваемыми въ нихъ членами являются соотвѣтственно $\frac{2}{26}=\frac{1}{13}$ и $\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$, а остатками отъ ихъ вычитанія изъ разлагаемыхъ дробей $\frac{11}{26}-\frac{1}{13}=\frac{9}{26}$ и $\frac{17}{27}-\frac{1}{9}=\frac{14}{27}$. Какъ имѣющіе числителемъ дѣлителя знаменателя, увеличеннаго на единицу, эти остатки могутъ быть разложены съ помощью извѣстнаго Леонарду Пизанскому приложенія метода взаимно-дополнительныхъ множителей знаменателя. Вслѣдствіе этого разложенія, приводимыя Леонардомъ Пизанскимъ, и получили тѣ формы, въ которыхъ онъ ихъ представилъ, т. е. слѣдующія:

$$\frac{11}{26}=\frac{1}{13}+\frac{9}{26}=\frac{1}{13}+\frac{26+1}{26.3}=\frac{1}{13}+\frac{1}{3}+\frac{1}{78},$$

$$\frac{17}{27}=\frac{1}{9}+\frac{27+1}{27.2}=\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{1}{54}.$$

(Окончаніе слѣдуетъ).

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей привата-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 102 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sin^4 (x + 15^0) = \sin x \cos x.$$

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 103 (6 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x - y = 2,$$

$$\sqrt[3]{x + 14} - \sqrt[3]{y - 21} = 1.$$

А. Григорьевъ (Одесса).

№ 104 (6 сер.). Построить треугольникъ, зная положеніе центра O круга описаннаго и основаній D и E высоты AD и биссектрисы AE, проведенныхъ изъ общей вершины A.

Л. Богдановичъ (Н.-Новгородъ).

№ 105 (6 сер.). Найти общій видъ полиномовъ P третьей степени, удовлетворяющихъ тожеству

$$P'^2 (1 - x^2) = 9 (1 - P^2),$$

гдѣ P' — производная полинома P.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 73 (6 сер.). *Черезъ точку* P *проводятъ прямую, встрѣчающую данныя перпендикулярныя прямыя* Ox *и* Oy *въ точкахъ* A *и* B; *затѣмъ изъ* P *возставляютъ перпендикуляръ къ* AB, *встрѣчающій прямыя* Ox *и* Oy *въ точкахъ* A′ *и* B′, *а изъ* A′ *и* B′ *опускаютъ перпендикуляры на* OP, *отсѣкающіе на прямой* AB *отрѣзокъ* A″B″. *Доказать, что* AB = A″B″.

(Заимств. изъ *Journal des Mathématiques élémentaires* *).

Теорема будетъ доказана, если докажемъ, что средины прямыхъ AB'' и $A''B$ совпадаютъ, такъ какъ тогда $AA'' = BB''$ и, стало быть, $AB = A''B''$. Углы AOB' и APB' прямые, а потому четырехугольникъ $OAPB'$ есть вписанный въ кругъ діаметра AB'; слѣдовательно, перпендикуляръ къ хордѣ OP этого круга въ ея срединѣ M пройдетъ черезъ центръ круга, т. е. пересѣчетъ діаметръ AB' въ его срединѣ K, а такъ какъ перпендикуляры $B'B''$ и KM къ OP параллельны, то прямая MK пересѣчетъ и прямую AB'' въ ея срединѣ I. Разсуждая аналогичнымъ образомъ надъ четырехугольникомъ $OPBA'$, вписаннымъ въ кругъ діаметра $A'B$, мы убѣждаемся, что перпендикуляръ MK встрѣчаетъ, будучи параллеленъ прямой $A'A''$, и отрѣзокъ $A''B$ также въ его срединѣ, откуда, такъ какъ отрѣзки AB'' и $A''B$ лежатъ на одной прямой, вытекаетъ, что средина отрѣзка $A''B$ совпадаетъ съ срединой I отрѣзка AB''. Такимъ образомъ теорема доказана.

Н. Кирьяновъ (Петербургъ); *Р. Витвинскій* (Тирасполь).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

А. П. Грузинцевъ, профессоръ. *Термодинамика.* Курсъ лекцій. Съ 22 чертежами въ текстѣ. Харьковъ, 1913. Стр. VIII+184. Ц. 1 р. 80 к.

К. Н. Рашевскій, преподаватель Московскаго реальнаго училища Воскресенскаго. *Элементарная геометрія и методы рѣшенія задачъ на построеніе.* Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Изданіе 2-ое, переработанное. Москва, 1913. Стр. 288. Ц. 1 р. 25 к.

М. Н. Гильбурдъ. *Сборникъ ариѳметическихъ задачъ.* Для повторенія курса ариѳметики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Ровно, 1913. Стр. 37. Ц. 30 к.

*) Теорема эта принадлежитъ извѣстному французскому геометру Mannheim'у.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется