Обложка
ищется

Обложка
ищется

Второй серии II-го семестра № 4.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 616.

Къ вопросу о доказательствахъ теоремы Лагранжа о конечномъ приращеніи функціи.

По поводу статьи В. Шидловскаго „Замѣтка къ курсу анализа безконечно малыхъ въ средней школѣ", помѣщенной въ № 597 „Вѣстника".

Прив.-доц. В. Ф. Кагана.

Въ № 597 „Вѣстника" была помѣщена „Замѣтка" г. Шидловскаго, содержащая доказательство теоремы Лагранжа, которое, по мнѣнію автора „болѣе подходитъ къ курсу средней школы", чѣмъ отличающееся „искусственностью" аналитическое доказательство, приводимое въ большинствѣ курсовъ.

Печатая упомянутую статью, редакція „Вѣстника" въ подстрочномъ примѣчаніи указала, что доказательство г. Шидловскаго содержитъ принципіальную погрѣшность, и предложила читателямъ ее обнаружить. Помѣщая эту статью, несмотря на несомнѣнную погрѣшность, редакція руководилась тѣмъ, что ошибка эта довольно тонкаго свойства и принадлежитъ къ числу тѣхъ, полное выясненіе которыхъ служитъ только къ освѣщенію вопроса и, будучи проведено въ спокойномъ тонѣ, должно быть интересно и для автора. Очень часто строгое доказательство основного математическаго предложенія содержитъ разсужденія, на первый взглядъ, искусственныя или тяжеловѣсныя; но обыкновенно эти тяжелыя орудія точной мысли совершенно необходимы, такъ какъ замѣна ихъ легковѣсными, какъ будто бы очень заманчивыми разсужденіями, не достигаетъ цѣли; получается простое, иногда очень изящное построеніе, страдающее, однако, крупнымъ недостаткомъ: оно не доказываетъ предложенія, которое подлежитъ доказательству.

Въ отвѣтъ на предложеніе редакціи поступило 4 замѣтки отъ гг. И. Зюзина (Уфимская губ.), В. Гофмана (Проскуровъ), А. Киселева (Петроградъ) и В. Теръ-Оганезова (Петроградъ). Однако, никто изъ этихъ лицъ не указалъ основной погрѣшности въ доказательствѣ г. Шидловскаго. Вслѣдствіе этого редакторъ взялъ на себя подробно разобрать разсужденія г. Шидловскаго и указать скрывающійся въ нихъ дефектъ.

Доказательство г. Шидловскаго заключается въ слѣдующемъ. Теорему Лагранжа можно выразить посредствомъ равенства:

$$f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(c) \qquad (1)$$

гдѣ c есть нѣкоторое число, содержащееся между a и b; въ доказательствѣ этого соотношенія и заключается задача. Находя, что аналитическое доказательство этой теоремы, приводимое въ большинствѣ курсовъ отличается искусственностью, г. Шидловскій какъ уже сказано предлагаетъ свое доказательство, которое, по его мнѣнію, болѣе подходитъ къ курсу средней школы.

Г. Шидловскій беретъ два значенія x_0 и X независимой перемѣнной x и обозначаетъ черезъ y_0 и Y соотвѣтствующія значенія функціи y. Затѣмъ разность $X-x_0$ (пусть $X>x_0$) онъ дѣлитъ на произвольное число n равныхъ частей и обозначаетъ каждую изъ этихъ частей черезъ h, такъ что $X-x_0=nh$. Значеніямъ перемѣнной x

$$x_0,\ x_1=x_0+h,\ x_2=x_1+h=x_0+2h,\ x_3=x_2+h=x_0+3h,\ldots\ X=x_{n-1}+h=x_0+nh$$

будутъ соотвѣтствовать значенія функціи y

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\cdots\ Y.$$

Приращеніямъ перемѣнной x на h будутъ соотвѣтствовать последовательныя приращенія функціи $k_1,\ k_2,\ k_3,\ldots,k_n$, такъ что

$$f(x_1)-f(x_0)=k_1,\quad f(x_2)-f(x_1)=k_2,\ldots,f(X)-f(x_{n-1})=k_n. \qquad (2)$$

Складывая эти равенства, получаемъ:

$$f(X)-f(x_0)=Y-y_0=k_1+k_2+k_3+\cdots+k_n.$$

Поэтому

$$\frac{Y-y_0}{X-x_0}=\frac{k_1+k_2+\cdots+k_n}{nh}=\frac{\frac{k_1}{h}+\frac{k_2}{h}+\cdots+\frac{k_n}{h}}{n}. \tag{3}$$

При неограниченномъ возрастанiи n приращенiе h безконечно уменьшается; поэтому

$$\frac{k_1}{h}=f'(x_0)+\varepsilon_0, \tag{4}$$

гдѣ ε_0 есть величина безконечно малая, такъ какъ

$$\text{пред. } \frac{k_1}{h}=\text{пред. } \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}=f'(x_0). \tag{5}$$

Точно такъ же, говоритъ авторъ, будемъ имѣть:

$$\frac{k_2}{h}=f'(x_1)+\varepsilon_1,\ \frac{k_3}{h}=f'(x_2)+\varepsilon_2,\cdots,\frac{k_n}{h}=f'(x_{n-1})+\varepsilon_{n-1}, \tag{6}$$

гдѣ $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ldots,\ \varepsilon_{n-1}$ суть безконечно малыя величины.

Подставляя вмѣсто отношенiй k_i/h ихъ значенiя (6), получаемъ:

$$\frac{Y-y_0}{X-x_0}=\frac{f'(x_0)+f'(x_1)+f'(x_2)+\cdots+f'(x_{n-1})}{n}+\frac{\Sigma\varepsilon_i}{n}. \tag{7}$$

Иными словами, отношенiе $(Y-y_0)$ къ $(X-x_0)$ представлено въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ одно представляетъ среднюю ариѳметическую n значенiй производной $f'(x_0),\ f'(x_1),\ldots,$ $f'(x_{n-1})$, а второе слагаемое представляетъ среднюю ариѳметическую n величинъ $\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ldots,\ \varepsilon_{n-1}$.

Первое изъ этихъ слагаемыхъ содержится между наибольшимъ и наименьшимъ значенiемъ производной во всемъ промежуткѣ. Второе содержится между наибольшей и наименьшей изъ величинъ ε; поэтому, какъ и всѣ ε, оно стремится къ нулю, когда n неограниченно возрастаетъ.

Итакъ, при неограниченномъ возрастанiи n второе слагаемое въ правой части равенства (7) стремится къ нулю и потому

$$\frac{Y-y_0}{X-x_0}=\text{пред. } \frac{f'(x_0)+f'(x_1)+\cdots+f'(x_{n-1})}{n}.$$

Этотъ же предѣлъ не превышаетъ наибольшаго и не меньше наименьшаго значенiя производной въ интервалѣ отъ x_0 до X. Если поэтому производная непрерывна, то этотъ предѣлъ равенъ значенiю производной $f'(c)$ гдѣ $x_0\leqslant c\leqslant X$.

Таково разсужденiе г. Шидловскаго. Попутно, имѣя въ виду доказать, что второе слагаемое въ правой части равенства (7) стремится къ 0, г. Шидловскiй замѣчаетъ: „$\Sigma\varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n-1}$ есть величина безконечно малая и $\Sigma\varepsilon/n$ также есть величина безконечно малая“. Первое утвержденiе, что $\Sigma\varepsilon$ есть величина безконечно малая есть очевидный недосмотръ, lapsus linguae; оно, конечно, невѣрно, но оно никакого значенія для разсужденія автора не имѣетъ, ибо для него важно лишь, что къ нулю стремится $\frac{1}{n}\Sigma\varepsilon$. Между тѣмъ, всѣ лица, отозвавшіяся на наше приглашеніе указать погрѣшность, допущенную г. Шидловскимъ, именно въ этомъ утвержденіи видятъ корень зла. Что касается второго утвержденія (которое для автора только и существенно), что $\frac{1}{n}\Sigma\varepsilon$ стремится къ нулю, то оно играетъ коренную роль во всемъ доказательствѣ г. Шидловскаго, и къ его разбору мы теперь перейдемъ.

Какъ доказываетъ г. Шидловскій, что всѣ ε стремятся къ нулю, когда n неограниченно возрастаетъ? Онъ замѣчаетъ, что въ силу соотношенія (4)

$$\varepsilon_0=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0).$$

И такъ какъ $f'(x_0)$ есть предѣлъ отношенія $[f(x_0+h)-f(x)]:h$, то ε_0 есть разность между перемѣнной и ея предѣломъ, а потому стремится къ нулю, когда h неограниченно убываетъ, т. е. когда n безгранично возрастаетъ. Это разсужденіе безукоризненное и никакихъ возраженій не вызываетъ. Но вслѣдъ за этимъ авторъ замѣчаетъ, „точно такъ же будемъ имѣть“ соотношенія (6), „гдѣ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ суть безконечно малыя величины“. Это утвержденіе неправильно.

Что означаетъ это „точно такъ же“? Такое же разсужденіе должно привести къ равенствамъ (6) и къ выводу, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ суть безконечно малыя? Посмотримъ, такъ ли это. Если мы попытаемся примѣнить то же разсужденіе къ ε_1, то мы дѣйствительно сможемъ написать первое изъ соотношеній (6) въ видѣ:

$$\varepsilon_1=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{h}-f'(x_1)=\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}-f'(x_1). \tag{8}$$

Но сдѣлать отсюда выводъ, что ε_1 „точно такъ же“ есть величина безконечно малая было бы поспѣшно: вѣдь теперь $f'(x_1)$ вовсе не есть предѣлъ отношенія $[f(x_1+h)-f(x_1)]:h$. Въ самомъ дѣлѣ $f'(x_1)$ было бы предѣломъ этого отношенія, согласно опредѣленію производной, еслибы x_1 оставалось постояннымъ, когда h стремится къ нулю. Между тѣмъ, въ данномъ случаѣ $x_1=x_0+h$; x_1 мѣняется вмѣстѣ съ h, $f(x_1)$ при убываніи h представляетъ собою не постоянную, а перемѣнную величину; говорить поэтому, что $f(x_1)$ есть „предѣлъ“ отношенія $[f(x_2)-f(x_1)]:h$ не имѣетъ смысла, и заключить отсюда, что ε_1 есть безконечно малая, нельзя. Тѣмъ менѣе возможно „точно такъ же“ доказать, что $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ безгранично убываютъ, когда n неограниченно возрастаетъ. Все построеніе г. Шидловскаго падаетъ.

Однако, на первый взглядъ его нетрудно исправить. Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ равенство (8) въ такомъ видѣ:

$$\varepsilon_1 = \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} - f'(x_1) = \frac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h} - f'(x_0+h) =$$

$$= \frac{f(x_0+2h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0+h)}{h} - f'(x_0+h) =$$

$$= \frac{2\,[f(x_0+2h)-f(x_0)]}{2h} - \left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + f'(x_0+h)\right].$$

Когда h стремится къ нулю, то вмѣстѣ съ тѣмъ и $2h$ стремится къ нулю; въ послѣдней части этого равенства первый членъ (уменьшаемое) стремится къ предѣлу $2f'(x_0)$ и къ тому же предѣлу стремится вычитаемое, если производная $f'(x)$ непрерывна при $x = x_0$; разность ε_1 стремится къ нулю.

Болѣе того, совершенно такъ же дѣйствительно можно доказать, что ε_p, гдѣ p есть фиксированный, отъ n независящій индексъ, стремится къ нулю, когда n неограниченно возрастаетъ. Въ самомъ дѣлѣ

$$\varepsilon_p = \frac{f(x_p+h)-f(x_p)}{h} - f'(x_p) = \frac{f[x_0+(p+1)h]-f(x_0+ph)}{h} - f'(x_p) =$$

$$= \frac{f[x_0+(p+1)h]-f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0+ph)-f(x_0)}{h} - f'(x_p) =$$

$$= (p+1)\cdot\frac{f[x_0+(p+1)h]-f(x_0)}{(p+1)h} - \left\{ p\cdot\frac{f(x_0+ph)-f(x_0)}{ph} + f'(x_0+ph)\right\}.$$

Такъ какъ здѣсь p есть величина постоянная, т. е. независящая отъ n, то $(p+1)h$ и ph стремятся къ нулю вмѣстѣ съ h; въ послѣдней части равенства какъ уменьшаемое такъ и вычитаемое стремятся къ предѣлу $(p+1)f'(x_0)$, когда h стремится къ нулю, т. е. когда n неограниченно возрастаетъ. Слѣдовательно, ε_p также стремится къ нулю.

И при всемъ томъ это все таки не спасаетъ разсужденія, на которомъ построено доказательство г. Шидловскаго.

Мы могли бы утверждать, что средняя ариѳметическая

$$\frac{\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{n-1}}{n} \tag{11}$$

стремится къ нулю, если бы мы доказали, что каждое слагаемое, входящее въ составъ числителя, стремится къ нулю. Если бы въ этомъ числителѣ было постоянное число слагаемыхъ, скажемъ 5, то мы могли бы, конечно, утверждать, на основаніи доказаннаго, что не только дробь но даже ея числитель стремится къ нулю при неограниченномъ возрастаніи n. Здѣсь, однако, дѣло обстоитъ иначе. Здѣсь число слагаемыхъ возрастаетъ вмѣстѣ съ n и потому въ составъ суммы необходимо входятъ величины ε, имѣющія не постоянный индексъ, а зависящій отъ n; таковы ε_{n-1}, $\varepsilon_{n-2}\ldots$; если n проходитъ черезъ четныя значенія, то въ сумму входятъ величины $\varepsilon_{n/2}$ и т. п. Относительно этихъ величинъ, которыя имѣютъ индексъ, зависящій отъ n, мы на основаніи предыдущаго разсужденія не можемъ утверждать, что онѣ стремятся къ нулю, когда n неограниченно возрастаетъ, и поэтому мы не можемъ утверждать, что $\frac{1}{n}\Sigma\varepsilon$ стремится къ нулю; а это есть центральный моментъ въ разсужденiи г. Шидловскаго.

Приватъ-доценту Д. А. Крыжановскому я обязанъ слѣдующимъ простымъ примѣромъ, хорошо выясняющимъ суть дѣла. Пусть

$$\varepsilon_p(n) = \frac{(p+1)(n-p)}{n^2} = \frac{p+1}{n} - \frac{p(p+1)}{n^2}. \tag{12}$$

Мы пишемъ здѣсь $\varepsilon_p(n)$, чтобы подчеркнуть, что величина ε_p зависитъ отъ n, какъ это имѣетъ мѣсто во всемъ приведенномъ выше разсужденiи. Совершенно ясно, что здѣсь, при постоянномъ p, ε_p, стремится къ нулю когда n неограниченно возрастаетъ. Болѣе того, послѣднiя слагаемыя суммы $(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1})$

$$\varepsilon_{n-1} = \frac{1}{n}, \quad \varepsilon_{n-2} = \frac{2(n-1)}{n^2}$$

также стремятся къ нулю. Между тѣмъ

$$\sum_0^{n-1} \varepsilon_p = \frac{1}{n^2}\sum_0^{n-1}(p+1)(n-p) = \frac{1}{n^2}\sum_0^{n-1}(p+1)\left[(n+1)-(p+1)\right] =$$

$$\frac{1}{n^2}\left[(n+1)\sum_0^{n-1}(p+1) - \sum_0^{n-1}(p+1)^2\right] = \frac{1}{n^2}\left[(n+1)\sum_1^n p - \sum_1^n p^2\right] =$$

$$\frac{1}{n^2}\left[\frac{(n+1)n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{(n+1)(n+2)}{6n}.$$

А потому

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}\varepsilon_p = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}.$$

Когда n неограниченно возрастаетъ эта ариѳметическая средняя стремится къ 1/6. Причина этого кроется въ томъ, что въ составъ суммы $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n-1}$ неизбѣжно входятъ такiя, индексъ которыхъ зависитъ отъ n; и хотя даже ε_{n-1}, какъ мы видѣли, стремится къ нулю, то есть среди ε и такiя, которыя не стремятся къ нулю, когда n неограниченно возрастаетъ; напримѣръ $\varepsilon_{n/2} = (n+2):4n$ и не стремится къ нулю при неограниченномъ возрастанiи n.

Разсмотримъ еще такой, болѣе конкретный примѣръ. Представимъ себѣ неограниченный рядъ столбовъ, первый высотою въ 1 *м.*, второй въ 2 *м.*, третiй въ 3 *м.* и т. д. Представимъ себѣ, что на каждый столбъ начинаетъ подыматься движущаяся точка, именно на первый столбъ начинаетъ подыматься первая точка въ началѣ первой секунды; вторая точка начинаетъ подыматься на свой столбъ въ началѣ второй секунды, третья въ началѣ третьей и т. д. Положимъ, что каждая точка въ первую секунду своего пути подымается на половину своего столба, во вторую секунду она дѣлаетъ половину остатка и т. д. Пусть $\varepsilon_p(n)$ будетъ остатокъ столба, который остается пройти p-ой точкѣ въ началѣ n-ой секунды. Ясно, что $\varepsilon_p(p)$, т. е. значенiе величины $\varepsilon_p(n)$ въ началѣ p-ой секунды равняется p, далѣе $\varepsilon_p(p+1)$, т. е. значенiе величины $\varepsilon_p(n)$ въ началѣ $(p+1)$-ой секунды равняется $p/2$, и вообще

$$\varepsilon_p(n)=\frac{p}{2^{n-p}}.$$

Каждой точкѣ рано или поздно останется пройти сколь угодно малый путь; каждое $\varepsilon_p(n)$ при постоянномъ p стремится къ нулю, когда n безгранично возростаетъ. Но $\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_p$ есть среднiй путь который остается въ началѣ n-ой секунды пройти n точкамъ, находящимся въ пути. Этотъ среднiй путь все время будетъ оставаться больше 1 *м.*, потому что n-ой точкѣ, начинающей въ эту секунду свой путь, еще предстоитъ пройти n метровъ. Каждое ε_p при постоянномъ p неограниченно убываетъ съ нарастанiемъ n; но вмѣстѣ съ тѣмъ наростаетъ число этихъ величинъ и новыя слагаемыя могутъ быть таковы, что онѣ компенсируютъ убыль предшествующихъ; средняя ариѳметическая можетъ оставаться конечной, можетъ даже возрастать.

Если бы въ нашемъ примѣрѣ всѣ столбы были равны 1 *м.*, то дѣло обстояло бы иначе. Среднiй остаточный путь былъ бы равенъ:

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right):n$$

и стремился бы къ нулю при возрастанiи n.

Это обусловливается тѣмъ, что здѣсь убыванiе идетъ гораздо быстрѣе и присоединенiе новыхъ величинъ не компенсируетъ убыли первыхъ.

Если бы второй столбъ былъ вдвое меньше перваго, третiй вдвое меньше второго и т. д., то убыванiе шло бы конечно, еще скорѣе.

Итакъ, если данъ рядъ величинъ, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, зависящихъ отъ n, число которыхъ неограничено возрастаетъ вмѣстѣ съ n, и каждая изъ нихъ ε_p при зафиксированномъ, постоянномъ p стремится при этомъ возрастанiи n къ нулю, то изъ этого еще не слѣдуетъ, что средняя n величинъ также стремится къ нулю. Это иногда можетъ имѣть мѣсто, но можетъ быть и иначе.

Въ тѣсной связи съ разсматриваемымъ здѣсь вопросомъ находится понятiе, играющее въ исчисленiи безконечно малыхъ коренную роль. Чтобы это понятiе вполнѣ выяснить, мы должны войти въ еще болѣе детальныя разсужденiя по разсматриваемому вопросу. Когда мы говоримъ, что съ наростанiемъ n $\varepsilon_p(n)$ стремится къ нулю, то это означаетъ слѣдующее. Если намъ дано положительное (хотя бы и очень малое) число σ, то можно указать такое значенiе N_p аргумента n, начиная съ котораго ε_p остается меньше σ (по абсолютной величинѣ, мы всегда это будемъ подразумѣвать); это значитъ

$$|\varepsilon_p(n)|<\sigma,\ \text{коль скоро}\ n\geqslant N_p.$$

Но при томъ же σ это значенie N_p можетъ быть для различныхъ ε_p различно; оно можетъ даже возрастать вмѣстѣ съ p и это значитъ, что послѣдовательныя величины ε_p убываютъ все медленнѣе и медленнѣе.

Возвратимся къ приведенному выше примѣру точекъ, подымающихся на столбы наростающей высоты. На разстоянiи меньшемъ 0,01 *м* отъ вершины первая точка будетъ уже въ началѣ 8-ой секунды ($N_1 = 8$), вторая точка будетъ на разстоянiи меньшемъ 0,01 *м.* отъ вершины только въ началѣ 10-ой секунды ($N_2 = 10$); третья точка на столь же маломъ разстоянiи отъ вершины окажется только въ началѣ 12-ой секунды ($N_3 = 12$) и т. д. Наши величины убываютъ все медленнѣе и медленнѣе. При этомъ нельзя указать такой секунды, послѣ которой в с ѣ движущiяся точки будутъ находиться на разстоянiи меньшемъ 0,01 *м.* отъ вершины своихъ столбовъ, ибо въ началѣ $(n+1)$-ой секунды $(n+1)$-ая точка должна еще пройти весь свой столбъ, имѣющiй $(n+1)$ метровъ высоты, а дальнѣйшiя точки еще не начинаютъ движенiя. Не многимъ лучше обстоитъ дѣло въ случаѣ равныхъ столбовъ. Но въ случаѣ убывающихъ столбовъ (по закону указанному въ приведенномъ выше примѣрѣ) дѣло обстоитъ иначе. На разстоянiи меньшемъ 0,01 *м.* отъ вершины первая точка будетъ въ началѣ 8-ой секунды, вторая также въ началѣ 8-ой секунды, третья также въ началѣ 8-ой секунды и т. д. до 7-ой точки; наконецъ, всѣ точки послѣ 7-ой вообще будутъ имѣть подъемъ, меньшiй 0,01 *м.* Итакъ, въ этомъ случаѣ въ началѣ 8-ой секунды всѣ точки будутъ отстоять отъ вершины на разстоянiе меньшее 0,01 *м.*; иными словами, при всякомъ p

$$\varepsilon_p(n) < 0{,}01 \text{ если } n \geqslant 8.$$

Какъ мы видимъ, иногда бываетъ возможно для даннаго σ указать общее значенie N, начиная съ котораго всѣ ε_p, какой бы ни былъ индексъ p, уже будутъ меньше σ. Такъ бываетъ въ частности всегда, если при всякомъ n

$$|\varepsilon_1(n)| < |\varepsilon_2(n)| < |\varepsilon_3(n)| < |\varepsilon_4(n)| < \dots$$

При этихъ условiяхъ достаточно найти предѣлъ N_1, начиная съ котораго $\varepsilon_1(n) < \sigma$, и онъ можетъ служить уже такимъ же предѣломъ для $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ — для всего ряда величинъ.

Въ этомъ случаѣ говорятъ, что наши величины стремятся къ нулю р а в н о м ѣ р н о.

Г о в о р я т ъ, ч т о б е з к о н е ч н о м а л ы я в е л и ч и н ы $\varepsilon_1(n)$, $\varepsilon_2(n)$, $\varepsilon_3(n), \dots$, ч и с л о к о т о р ы х ъ н е о г р а н и ч е н н о в е л и к о, с т р е м я т с я к ъ н у л ю р а в н о м ѣ р н о с ъ в о з р а с т а н i е м ъ n, е с л и м о ж н о п р и в с я к о м ъ з а д а н н о м ъ п о л о ж и т е л ь н о м ъ ч и с л ѣ σ н а й т и т а к о е о б щ е е з н а ч е н i е N, ч т о в с ѣ в е л и ч и н ы с т а н о в я т с я п о а б с о л ю т н о й в е л и ч и н ѣ м е н ь ш е σ, к о л ь с к о р о n с т а н о в и т с я б о л ь ш е N, т. е. если при в с я к о м ъ p

$$|\varepsilon_p(n)| < \sigma, \text{ коль скоро } n \geqslant N.$$

Если величины ε_0, ε_1, $\varepsilon_2, \ldots$ стремятся къ нулю равномѣрно, то и средняя ариѳметическая любой группы этихъ величинъ стремится къ нулю при безграничномъ возрастанiи аргумента n. Въ самомъ дѣлѣ, если $n > N$ то всѣ величины станутъ меньше σ, а слѣдовательно, и средняя ариѳметическая любой группы ихъ станетъ меньше напередъ заданнаго числа σ.

Г. Шидловскiй въ своемъ разсужденiи, не доказалъ даже, что всѣ ε_p (хотя бы при постоянномъ p) стремятся къ нулю. Этотъ пробѣлъ, какъ мы видѣли восполняется безъ труда; доказать, что ε_p при постоянномъ p стремится къ нулю, дѣло простое. Но отсюда еще нельзя заключить, что и средняя ариѳметическая величинъ ε_0, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}$ тоже стремятся къ нулю. Такое заключенiе было бы законнымъ, если бы мы знали, что эти величины стремятся къ нулю равномѣрно. Но доказать, что всѣ ε_p стремятся къ нулю равномѣрно, задача сложная. Во всякомъ случаѣ намъ неизвѣстно такое доказательство, которое бы само уже не опиралось на теорему Лагранжа.

Въ результатѣ прибавимъ, что обычное доказательство теоремы Лагранжа, основанное на примѣненiи теоремы Ролля, мы рѣшительно не считаемъ искусственнымъ. Къ тому же оно освобождаетъ насъ отъ дополнительныхъ требованiй, которыя предъявляютъ къ функцiи разсужденiя г. Шидловскаго; напримѣръ, оно вовсе не предполагаетъ непрерывности производной, каковая необходима въ доказательствѣ г. Шидловскаго.

СЪѢЗДЫ.

Международная Комиссiя по преподаванiю математики.

Привѣтственная рѣчь на Парижскомъ Съѣздѣ Комиссiи *)

Г. Дарбу,

постояннаго секретаря Академiи Наукъ, представителя министра народнаго просвѣщенiя.

Милостивые государи!

Выбравъ въ качествѣ делегата на это вступительное засѣданiе одного изъ двухъ вицепрезидентовъ нашего Высшаго Совѣта, г. министръ желалъ показать этимъ, съ какимъ интересомъ онъ относится къ работамъ, которыя вы ведете въ общемъ уже шесть лѣтъ подъ высокопросвѣщеннымъ управленiемъ моего друга, Феликса Клейна.

*) Общiй отчетъ о Съѣздѣ, принадлежащiй профессору К. А. Поссе, см. № 607 „Вѣстника“.

Ваши труды касаются исключительно преподаванія математики, разсматриваемаго, правда, во всѣхъ его видахъ и на всѣхъ ступеняхъ; они охватываютъ всѣ цивилизованныя націи. Не заходя далеко въ запретную для меня область, я могу замѣтить, что націи съ теченіемъ времени становятся болѣе солидарными между собой*). Вездѣ одинаковыя проблемы возникаютъ почти одновременно, и вездѣ мы видимъ почти одинаковыя рѣшенія ихъ. Если тамъ или здѣсь въ принятыхъ рѣшеніяхъ и обнаруживаются какія-нибудь различія, обусловливаемыя, очевидно, особенностями національнаго духа, то все же въ этихъ рѣшеніяхъ больше сходства, больше точекъ соприкосновенія, чѣмъ можно было бы подумать съ перваго вздляда. Несмотря на кажущіяся противоположности, націи все болѣе сближаются между собой, онѣ все больше и больше стремятся образовать единое цивилизованное человѣчество, концертъ народовъ, въ которомъ каждая нація должна играть свою партію, содѣйствуя всеобщей гармоніи и благу.

Между вопросами, занимающими въ настоящее время ученыхъ и государственныхъ людей, нѣтъ болѣе важнаго, чѣмъ вопросъ о преподаваніи. Съ тѣхъ поръ какъ латинскій языкъ сталъ все болѣе и болѣе терять свою роль универсальнаго языка, общаго языка цивилизованныхъ народовъ, съ тѣхъ поръ какъ чудесныя научныя открытія преобразовали матеріальныя условія жизни народовъ, съ тѣхъ поръ какъ великіе геніи всѣхъ странъ внесли оригинальные вклады въ древнія сокровищницы греко-латинской цивилизаціи, съ тѣхъ поръ, можно сказать, вездѣ почувствовалась потребность въ коренной передѣлкѣ старыхъ, окаменѣвшихъ рамокъ, которыя въ теченіе столькихъ вѣковъ служили для преподаванія. Эти преобразованія, однако, встрѣтили сильное сопротивленіе, и многимъ наукамъ — исторіи, новымъ языкамъ, географіи — лишь съ трудомъ удалось занять то мѣсто, которое принадлежитъ имъ по праву.

Съ вашего позволенія я разскажу вамъ одно воспоминаніе изъ своей молодости. Около 50 лѣтъ тому назадъ мнѣ пришлось участвовать въ одной комиссіи; рядомъ со мной сидѣлъ одинъ знаменитый профессоръ гуманитарныхъ наукъ (lettres), который весьма холодно отвѣчалъ на всѣ мои обращенныя къ нему любезности. Мнѣ удалось, наконецъ, заставить его заговорить, и онъ сказалъ слѣдующее: „Эти «науки» **) хотятъ все захватить". Этотъ простой афоризмъ удивительно хорошо характеризуетъ настроеніе умовъ старыхъ учителей средней школы. Когда знаменитый математикъ Эрмитъ около 1840 г. проходилъ гимназическій курсъ въ нашей коллегіи Генриха IV, его учитель словесныхъ наукъ упрекалъ его за то, что онъ проявляетъ инте-

---

*) Какъ ни глубоко противорѣчіе между этими строками и переживаемыми событіями, редакція не сочла нужнымъ исключить изъ рѣчи эти вступительныя слова, такъ недавно еще звучавшія призывомъ къ единенію.

**) На французскомъ языкѣ sciences обозначаетъ математическія и естественныя, вообще, точныя науки въ отличіе отъ гуманитарныхъ — lettres.

ресъ къ курсу физики, преподававшемуся въ то время лишь въ самомъ зачаточномъ видѣ. Нѣтъ надобности напомнить вамъ, что прежде преподаватель математическихъ наукъ считался, такъ сказать, учителемъ низшаго порядка, подобно преподавателю гимнастики или рисованія. Въ перепискѣ Гаусса съ Шумахеромъ мы читаемъ объ одномъ заслуженномъ педагогѣ, который желалъ исключить математику изъ курса средней школы подъ предлогомъ, что въ математикѣ нѣтъ никакихъ моральныхъ элементовъ. На это Шумахеръ съ одобренія Гаусса, отвѣтилъ, что въ морали нѣтъ никакихъ математическихъ элементовъ. Несмотря на противодѣйствіе педагоговъ, точныя науки сумѣли завоевать себѣ мѣсто, и точно также современные языки и исторія. Но при этомъ возникли затрудненія, съ которыми борются въ настоящее время.

Хотя человѣческое знаніе безпрестанно расширяется, но учебному матеріалу, который долженъ оставаться энциклопедичнымъ, положены извѣстныя границы. Необходимо считаться съ тѣмъ, что ребенокъ растетъ и становится взрослымъ и не можетъ оставаться всю жизнь на школьной скамьѣ. Его способности ограничены и позволяютъ ему усвоить лишь опредѣленную дозу знаній. По этой причинѣ оказалось необходимымъ подумать о томъ, чтобы создать различные типы школы. Нужно было устроить такъ, чтобы каждый типъ удовлетворялъ условію, содержащему всю формулу преподваанія въ средней школѣ: сдѣлать ребенка человѣкомъ, который былъ бы въ состояніи съ помощью необходимыхъ средствъ осилить всѣ трудности и всѣ задачи въ той жизни, для которой онъ предназначенъ; главнымъ же образомъ необходимо, чтобы онъ былъ въ состояніи съ помощью пріобрѣтенныхъ знаній до конца своихъ дней развиваться и учиться у окружающихъ его людей и вещей. Рѣшеніе такой проблемы является дѣломъ нелегкимъ, даже если бы рѣчь шла о богатомъ ребенкѣ, скажемъ даже, о царственномъ ребенкѣ, которому можно дать лучшихъ наставниковъ. Но эта проблема становится безконечно болѣе трудной, когда желаютъ ее рѣшить для всѣхъ дѣтей одного класса или одного общества. Трудность возрастаетъ еще болѣе, если желаютъ установить одинаковую программу для всѣхъ дѣтей одной и той же націи. Одно время доходили даже до того, что хотѣли предписать для всѣхъ одинаковыя упражненія; это стремленіе къ единообразію было особенно сильно во Франціи, и очень часто приводятъ слова одного изъ нашихъ бывшихъ министровъ народнаго просвѣщенія, который сказалъ, посмотрѣвъ на часы: „Сейчасъ во всей Франціи пишутъ греческій переводъ съ одного и того же текста“.

Во Франціи первая попытка установить различные типы преподаванія въ средней школѣ восходитъ къ началу второй имперіи и извѣстна подъ именемъ бифуркаціи. По этой системѣ всѣ дѣти первыя пять лѣтъ обучались по одной и той же программѣ, а затѣмъ въ продолженіе послѣднихъ четырехъ лѣтъ одни проходили латынь и точныя науки, а другіе углублялись въ изученіе греческаго и латинскаго языковъ. Были также и общіе предметы для обоихъ отдѣленій. Но эта система не удалась. Мы не можемъ здѣсь вдаваться въ объясненіе причинъ, такъ какъ это было бы для насъ безполезно и потребовало бы слишкомъ много времени. Послѣ неудачнаго опыта съ энциклопедическимъ преподаванiемъ пришлось признать необходимымъ установить различные типы преподаванія въ средней школѣ. Въ 1899 году наша палата депутатовъ, всегда понимавшая всю важность вопросовъ преподаванія, избрала комиссію въ значительномъ составѣ и поручила ей разработать требуемую всѣми реформу преподаванія въ средней школѣ.

Эта комиссія подъ предсѣдательствомъ А. Рибо (Ribot) произвела весьма основательную и обширную анкету. Труды комиссіи опубликованы и обнимаютъ пять томовъ, которыя составятъ въ будущемъ весьма важный документъ для изученія вопросовъ преподаванія во всѣхъ странахъ. Были опрошены болѣе 200 человѣкъ, Торгово-промышленныя палаты (Chambres de commerce), генеральные совѣты (Conseils généraux). Результатомъ этой анкеты были произведенныя въ 1902 г. глубокія измѣненія въ строѣ нашихъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Современное положеніе вещей таково:

Первый циклъ, продолжительностью въ четыре года, состоитъ изъ двухъ отдѣленій: въ отдѣленіи А проходятъ латынь, въ отдѣленіи В латинскаго языка не учатъ, и удѣляютъ больше времени изученію точныхъ наукъ и новыхъ языковъ.

Второй циклъ, продолжительностью въ три года, обнимаетъ четыре отдѣленія:

А. Греческій и латинскій языки. — В. Латинскій и новые языки. С. Латинскій языкъ и точныя науки. — D. Точныя науки и новые языки.

Такимъ образомъ, точнымъ наукамъ удѣлено первенствующее значеніе въ отдѣленіяхъ С и D. Имъ отдаютъ 11 и 12 часовъ въ недѣлю въ первые два года, и 18 часовъ въ третій годъ.

Эта реформа 1902 года подверглась многочисленнымъ нападкамъ. Ее упрекаютъ, главнымъ образомъ, въ томъ, что она нанесла ущербъ изученію словесныхъ наукъ; и этотъ упрекъ несомнѣнно принимается во вниманіе многими изъ моихъ соотечественниковъ, которые помнятъ о своемъ латинскомъ происхожденіи и не безъ основанія придаютъ большое значеніе изученію классиковъ. Но съ принципіальной стороны реформа, кажется, не встрѣтила серьезныхъ возраженій. Большинство несогласныхъ съ ней склонно все-таки сохранить различные типы образованія и желаетъ лишь, чтобы нѣкоторые изъ этихъ типовъ считались низшаго порядка и — мнѣ это кажется недопустимымъ — были лишены извѣстныхъ правъ, которыя въ настоящее время предоставлены имъ въ отношеніи доступа къ свободнымъ профессіямъ и къ высшему образованію.

На мой взглядъ, лучше всего было бы не оспаривать болѣе законности реформы, которая вызвана реальной необходимостью, а, напротивъ, путемъ методическаго и точнаго изученія стараться поставить на твердыя основанія всѣ различныя отдѣленія преподаванія, удовлетворивъ возможно полнѣе тѣ требованія, которыми вызвано учрежденіе каждаго изъ этихъ типовъ. Какъ мнѣ кажется, значительное усовершенствованіе будетъ достигнуто также, если мы будемъ остерегаться соединять и смѣшивать въ одномъ и томъ же учрежденіи различныя секціи, на которыя раздѣлено преподаваніе.

Глубокое изученіе программъ преподаванія является задачей весьма обширной и несомнѣнно заманчивой для всѣхъ тѣхъ, которые интересуются святымъ дѣломъ преподаванія. Вы взяли на себя эту задачу, ограничившись тѣмъ предметомъ, въ которомъ вы являетесь наиболѣе компетентными: я разумѣю математику, которая въ настоящее время находится въ большомъ фаворѣ, даже въ большемъ, пожалуй, чѣмъ это было бы желательно для математиковъ по спеціальности. Физики, философы, медики, и даже сами словесники обращаются къ нашему содѣйствію. Иногда спрашиваешь себя съ нѣкоторымъ безпокойствомъ, откуда всѣ эти приверженцы, „которыхъ мы не вынесли въ своемъ чревѣ". Прибавлю, пользуясь избитымъ выраженіемъ, что мы находимся на поворотномъ пунктѣ нашей исторіи. Послѣ двухъ тысячъ лѣтъ старый Евклидъ потерялъ часть своей силы, всѣ планы нашего учебнаго предмета потерпѣли коренную ломку или находятся наканунѣ таковой. Удастся ли намъ возстановить ихъ? Я въ этомъ сильно сомнѣваюсь. Во всякомъ случаѣ, они не будутъ имѣть ни той прочности, ни долговѣчности, которой отличались ихъ предшественники. Въ эту новую эпоху, когда все находится въ процессѣ безпрерывнаго становленія, необходимо будетъ внимательно слѣдить за ними, видоизмѣнять ихъ по мѣрѣ надобности и приспособлять къ различнымъ и весьма разнообразнымъ цѣлямъ, которыя намъ задаются со всѣхъ сторонъ и въ каждый моментъ.

Рѣшенія этой задачи, столь же трудной, сколь и прекрасной, вы добиваетесь съ достойной удивленія настойчивостью и послѣдовательностью.

Привѣтствуя васъ отъ имени министра, я приглашаю васъ приступить безъ замедленія къ вашей работѣ и осмѣливаюсь предложить вашему вниманію наши программы 1902 года, въ разработкѣ которыхъ я имѣлъ честь участвовать.

Обсуждая вопросъ А, который составитъ предметъ вашихъ совѣщаній, вы можете убѣдиться, что въ этихъ программахъ, которыя существуютъ уже 12 лѣтъ, осуществлены нѣкоторыя изъ реформъ, которыми вы сейчасъ займетесь.

Не входя въ подробности, можно указать слѣдующія нововведенія въ преподаваніи математики со времени нашей реформы 1902 года.

1) Введеніе въ элементарное преподаваніе исчисленія производныхъ и даже нѣкоторыхъ свѣдѣній изъ интегральнаго исчисленія.

2) Систематическое пользованіе въ геометріи методами преобразованія (methodes de transformation), упрощающими изученіе и вносящими принципъ классификаціи.

3) Развитіе приложеній, указываемыхъ практикой, исключая тѣ проблемы, которыя не имѣютъ никакихъ корней въ дѣйствительности.

4) Возможно болѣе полное развитіе личной иниціативы у всѣхъ воспитанниковъ и неустанная забота о хорошемъ образованіи ума.

Хронологическій обзоръ главныхъ моментовъ эволюціи и развитія безпроволочной телеграфіи.

Изъ сочиненія Гибсона „Безпроволочный телеграфъ".

1831. Михаилъ Фарадей открылъ электромагнитную индукцію между двумя отдѣльными замкнутыми проводниками.

1837. Кукъ и Уитстонъ (въ Лондонѣ) и Морзъ (Сѣв.-Амер. Соедин. Штаты) получили первые патенты на электрическій телеграфъ.

1838. Штейнгель (Германія) открылъ что земля можетъ служить вмѣсто обратнаго провода. Онъ же предсказалъ, что при бо́льшей силѣ тока можно будетъ обойтись совершенно безъ прововодовъ.

1840. Джозефъ Генри (Сѣв.-Амер. Соед. Штаты) впервые получилъ электрическія колебанія высокой частоты и указалъ, что разрядъ конденсатора имѣетъ колебательный характеръ.

1844. Морзъ (Сѣв.-Амер. Соед. Штаты) произвелъ опыты безпроволочной электрической передачи по водѣ, черезъ Вашингтонскій каналъ и черезъ широкія рѣки.

1854. Джемсъ Боуманъ Линдсей (Шотландія) произвелъ подобные же опыты черезъ рѣку Тэй (Тау) при Дёнди (Dundee). Онъ же предложилъ планъ безпроволочнаго телеграфа черезъ Атлантическій океанъ.

1859. Боуманъ Линдсей демонстрировалъ свои опыты на съѣздѣ Британской Ассоціаціи, на которомъ присутствовали Фарадей и сэръ Вилліамъ Томсонъ (Лордъ Кельвинъ).

1859. Сэру Вилліаму Прису было поручено Обществомъ электрическаго телеграфа сдѣлать докладъ о системѣ Линдсея.

1864. Кларкъ Максвеллъ изложилъ свою теорію электромагнитныхъ волнъ въ эѳирѣ и предсказалъ существованіе тѣхъ электрическихъ волнъ, которыя мы въ настоящее время примѣняемъ для телеграфированія безъ проволокъ.

1870. Бецольдъ открылъ, что колебанія, вызываемыя въ проводникѣ разрядомъ конденсатора, даютъ явленія интерференціи.

1876. Эліу Томсонъ и Э. Т. Густонъ (Сѣв.-Амер. Соед. Штаты) изучили явленіе колебательныхъ разрядовъ.

1879. Гюггесъ произвелъ опыты настоящаго безпроволочнаго телеграфированія, но не опубликовалъ полученныхъ имъ результатовъ.

1882. Опыты Приса съ параллельными проводами (Бристольскій проливъ).

1883. Фицджеральдъ (Англія) на съѣздѣ Британской Ассоціаціи, высказалъ предположеніе, что электромагнитныя волны могутъ быть произведены посредствомъ разряда конденсатора. (Эти эѳирныя волны не удалось обнаружить).

1888. Герцъ (Германія) нашелъ методъ, дающій возможность обнаружить эти электрическія волны съ помощью маленькаго искрового промежутка.

1889. Элiу Томсонъ указалъ, что такiя электрическiя волны особенно пригодны для передачи электрическихъ сигналовъ черезъ туманы и матерiальныя преграды.

1890. Бранли (Францiя) показалъ, что подъ влiянiемъ эѳирныхъ волнъ опилки въ трубкѣ (когереръ) сцѣпляются. (Это было открыто еще раньше, въ 1838 г.) Лоджъ демонстрировалъ опыты съ синтотическими лейденскими банками.

1892. Круксъ написалъ свое замѣчательное пророчество о безпроволочномъ телеграфированiи

1893. Минчинъ на своей лекцiи въ Лондонскомъ Физическомъ обществѣ показалъ, что металлическiй порошокъ реагируетъ (сцѣпляясь) на электромагнитныя волны, производимыя на разстоянiи (въ предѣлахъ лекцiоннаго зала). Для открытiя волнъ онъ примѣнялъ батарею и гальванометръ, введенный въ цѣпь одновременно съ порошкомъ.

1894. Лоджъ прочиталъ въ Королевскомъ Институтѣ (въ Лондонѣ) свою лекцiю объ открытiи Герца.

1895. Поповъ (въ Россiи) произвелъ опыты безпроволочнаго телеграфированiя, примѣняя вертикальный проводникъ въ качествѣ антенны. Маркони (въ Италiи) началъ производить опыты въ маломъ масштабѣ на виллѣ своего отца. Рётгерфордъ доказалъ, что электрическiя волны могутъ быть обнаружены по ихъ магнитному дѣйствiю.

1896. 2-го iюня Маркони получилъ свой первый патентъ. Въ слѣдующемъ мѣсяцѣ онъ прибылъ въ Англiю и произвелъ опыты на Salisbury Plain и въ другихъ мѣстахъ.

1897. Маркони разработалъ свою систему въ окончательномъ видѣ и ввелъ соединенiе передатчика съ землей. Былъ взятъ патентъ на систему Лоджа-Мюиргида Фессенденъ (Сѣв.-Амер. Соед. Штаты) началъ производить опыты безпроволочнаго телеграфированiя; но патентъ онъ взялъ лишь въ 1899 г. Опыты Слаби (Германiя) въ Королевскихъ Ботаническихъ садахъ въ Потсдамѣ. Позже онъ сталъ работать вмѣстѣ съ графомъ Арко. Патенты Маркони куплены Обществомъ безпроволочнаго телеграфа и сигнализацiи, впослѣдствiи переименованномъ въ Общество безпроволочнаго телеграфа Маркони. Маркони установилъ безпроволочное сообщенiе черезъ Бристольскiй проливъ (8 миль) и между островомъ Уайтомъ и Бурнемугсомъ ($14^1/_2$ миль).

1898. Маркони ввелъ свою синтоничускую систему. Маркони устроилъ сообщенiе между Соутъ-Фореллендскимъ маякомъ (Ламаншъ) и Истъ Гудвинскимъ плавучимъ маякомъ (12 миль). Пюпинъ изобрѣлъ первый электролитическiй детекторъ.

1899. Фессенденъ патентовалъ свой магнитный детекторъ. Маркони телеграфировалъ черезъ Ламаншъ (32 мили); позже въ томъ же году ему удалось телеграфировать съ одного военнаго судна на другое на разстоянiи 85 миль. Во время Англо-Бурской войны Британскiй флотъ пользовался телеграфомъ Маркони въ бухтѣ Делагоа.

1900. Германскiе пароходы ввели аппаратъ Маркони для сигнализацiи Боркумскому маяку. Британское адмиралтейство предписало ввести аппараты для судовыхъ и береговыхъ станцій (Маркони). Бельгійскіе почтовые пароходы между Остенде и Дувромъ снабжены аппаратами Маркони, и на бельгійскомъ берегу воздвигнута станція.

1901. Маркони устроилъ сообщеніе между островомъ Уайтомъ и Лицардомъ (Lizard) (196 миль). Первыя британскія суда снабжены безпроволочнымъ телеграфомъ (Маркони). На британскомъ берегу выстроены шесть станцій Маркони. Станція для дальнихъ разстояній въ Польдгу (Корнуэльсъ). Станція въ Саре Cod (Сѣв.-Амер. Соед. Штаты). Открытіе школы Маркони въ Фринтонѣ (Frinton-at-Sea). Станціи на островѣ Уайтѣ и на Лицардѣ объявлены открытыми для коммерческаго пользованія. У Нью-Фаундленда были получены сигналы изъ Польдгу (Корнуэльсъ).

1902. Маркони на американскомъ пароходѣ получаетъ депеши изъ Польдгу на разстояніи до 1500 м. Устроено безпроволочное сообщеніе черезъ Атлантическій океанъ между Канадой и Великобританіей.

1903. Маркони взялъ патентъ на магнитный детекторъ. Впервые въ печати (Лондонскій „Times") помѣщены депеши, полученныя по безпроволочному телеграфу черезъ Атлантическій океанъ.

1904. Британскимъ правительствомъ изданъ законъ о безпроволочномъ телеграфѣ. Общество Маркони заключило контрактъ съ правительствами русскимъ, итальянскимъ, канадскимъ и черногорскимъ.

1905. Въ Клифденѣ (Ирландія) Общество Маркони устроило станцію большой мощности; взятъ патентъ на систему горизонтальныхъ воздушныхъ проводовъ. Фессенденъ соорудилъ трансатлантическія станціи у Махригенша (въ Шотландіи) и въ Брантъ-Рокѣ (Сѣв.-Амер. Соед. Штаты).

1906. Антенна Фессендской станціи при Махригеншѣ была снесена бурей; она не была выстроена вторично. Паульсенъ (въ Даніи) взялъ патентъ на свою систему съ вольтовой дугой въ качествѣ генератора незатухающихъ волнъ.

1907. Общество Маркони открыло трансатлантическій телеграфъ (между Клифеномъ и Ледянымъ заливомъ) для общественнаго пользованія (въ ограниченныхъ размѣрахъ).

1908. Трансатлантическій телеграфъ открытъ для всеобщаго пользованія.

1909. Судно „Slavonia", потерпѣвшее крушеніе у Азорскихъ острововъ, просило помощи по безпроволочному телеграфу. Суда, получившія сигналъ парохода о бѣдствіи, спасли его пассажировъ и команду (410 человѣкъ). Станціи Маркони на англійскомъ и ирландскомъ берегахъ перешли къ британскому правительству.

1910. Маркони во время своего путешествія въ Буэносъ-Айресъ получалъ безпроволочныя телеграммы изъ Клифдена (въ Ирландіи) на зстояніи 4000 миль днемъ и почти 7000 миль ночью.

1911. Система Лоджа-Мюирхеда пріобрѣтена Обществомъ Маркони. По безпроволочному телеграфу было сообщено о бѣдствіи линейнаго судна на которомъ находились герцогъ и герцогиня Файфъ, у мыса Спартель (Средиземное море). Благодаря быстро поданной помощи удалось спасти всѣхъ людей. Нѣкоторыя другія большія суда, терпѣвшія бѣдствіе, получили помощь пользуясь безпроволочнымъ телеграфомъ.

1912. Если бы не безпроволочные сигналы о бѣдствіи, катастрофа съ „Титаникомъ“ приняла бы гораздо бóльшіе размѣры. Норвежское правительство заключило съ Обществомъ Маркони контрактъ о трансатлантическихъ станціяхъ,

1913. Британское правительство рѣшило устроить имперскую сѣть безпроволочнаго телеграфа. Контрактъ былъ заключенъ съ Обществомъ Маркони; но когда возникъ вопросъ, благоразумно ли связать себя съ однимъ только Обществомъ, то для обсужденія этого дѣла была выбрана совѣщательная комиссія изъ безпристрастныхъ экспертовъ. Комиссія постановила утвердить контрактъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Къ вопросу объ активномъ азотѣ. Извѣстно, что испусканіе свѣта, сопровождающее прохожденіе электрическаго разряда черезъ газы, прекращается одновременно съ нимъ. Исключеніемъ изъ этого правила является азотъ который свѣтится послѣ выключенія тока при благопріятныхъ условіяхъ нѣсколько секундъ оранжевымъ свѣтомъ. Это явленіе было подробно изслѣдовано Стрётомъ (R. T. Strutt), который приписалъ свѣченіе распаденію активной модификаціи азона, образующейся, по его мнѣнію, при прохожденіи разряда. Стрётъ привелъ въ защиту своего взгляда аналогію съ озономъ; кромѣ того, ему удалось показать, что азотъ, подвергшійся дѣйствію разряда, обнаруживаетъ большую химическую активность; непосредственно онъ реагируетъ съ сѣрой, іодомъ, NO_2, кислородомъ, фосфоромъ и съ различными органическими тѣлами; въ послѣднемъ случаѣ образуются производныя синильной кислоты. Работы Стрёта вызвала большую полемику. Особенно рѣзко выступали противъ нея Тиде (E. Tiede) и Домке (E. Domcke), утверждавшіе что всѣ характерные явленія исчезаютъ, если удалить изъ азота послѣдніе слѣды кислорода. Они работали съ совершенно замкнутымъ стекляннымъ аппаратомъ, въ которомъ находилось нѣкоторое количество баріевой соли азотистоводородной кислоты (BaN_6), металлическаго натрія и окиси серебра. Аппаратъ тщательно эвакуировался, потомъ нагрѣваніемъ освобождали изъ BaN_6 нѣкоторое количество азота, который очищался натріемъ отъ послѣднихъ слѣдовъ кислорода. Этотъ азотъ не давалъ характернаго свѣченія; но оно сейчасъ же появлялось, если нагрѣваніемъ окиси серебра примѣшивали къ азоту нѣкоторое количество кислорода. На основаніи этихъ опытовъ Тиде и Домке отрицали существованіе активнаго азота, приписывая всѣ явленія Стрёта окисламъ азота. Однако, ихъ работа не осталась безъ возраженія. Кёнигъ (König) и Елёдъ (Elöd) повторили опыты Стрёта приблизительно съ такой же апаратурой, какъ и Тиде и Домке, и пришли къ заключенію, что отрицательный результатъ ихъ опытовъ объясняется дѣйствіемъ паровъ натрія, который соединяется съ активнымъ азотомъ, образуя нитридъ. Самъ Стрётъ вмѣстѣ съ Бэкеромъ (N. B. Baker) продѣлалъ вновь свои опыты съ большей тщательностью, однако, пришелъ къ прежнимъ результатамъ. Въ своей послѣдней работѣ, Стрётъ замѣчаетъ, что даже допуская вліяніе слѣдовъ кислорода на свѣченіе, нельзя объяснить ихъ присутствіемъ химическихъ реакцій активнаго азота, въ частности образованія значительныхъ количествъ производныхъ синильной кислоты. По этому вопросу было еще опубликовано нѣсколько французскихъ работъ, которыя тоже не дали окончательнаго рѣшенія. Наконецъ, чтобы положить конецъ полемикѣ Тиде и Домке отправились со своимъ аппаратомъ въ Лондонъ и повторили опыты совмѣстно съ Стрётомъ и Бэкеромъ. Результатъ этой работы, опубликованный въ іюнѣ въ „Nature", былъ слѣдующій. При благопріятной формѣ разряда свѣченіе можно наблюдать и въ самомъ чистомъ азотѣ; однако, слѣды кислорода значительно усиливаютъ его яркость, мѣняя, быть можетъ, условія разряда.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Медаль въ честь Пуанкаре. Воздавая должное памяти Анри Пуанкаре, рядъ ученыхъ, членовъ интернаціональнаго комитета, съ согласія семьи великаго ученаго, обратились къ его друзьямъ, сотрудникамъ и почитателямъ во всѣхъ странахъ съ предложеніемъ принять участіе въ интернаціональной подпискѣ съ цѣлью:

1) Выбить медаль въ честь Анри Пуанкаре;

2) основать фондъ, проценты съ котораго будутъ употреблены Французской Академіей Наукъ на вознагражденіе и поддержку молодыхъ ученыхъ, работающихъ въ тѣхъ отрасляхъ науки, для которыхъ столько сдѣлано Анри Пуанкаре, какъ-то: математическій анализъ, небесная механика, математическая физика, философія науки.

Организаціонный комитетъ въ составѣ П. Аппеля (P. Appell), Е. Лами (E. Lamy) и Г. Дарбу (G. Darboux) разослали циркуляръ, помѣченный іюнемъ текущаго года, подъ которымъ значатся уже имена выдающихся представителей науки всѣхъ странъ и народовъ. Скоро ли наступитъ пора, когда эти люди снова протянутъ другъ другу руки въ мирномъ и согласномъ служеніи наукѣ и въ безпристрастной оцѣнкѣ дѣятельности ея великихъ творцовъ?

БИБЛІОГРАФІЯ.

I. Рецензіи.

В. В. Стратоновъ, б. астрофизикъ Ташкентской астрономической и физической обсерваторіи. *Космографія* (Начала астрономіи). Учебникъ для среднихъ учебныхъ заведеній и руководство для самообразованія. Съ 230 рисунками и чертежами въ текстѣ, 10 многокрасочными и цвѣтными иллюстраціями, 4 стереоскопическими таблицами и звѣздной картой. VI + 169 стр. Москва, 1914.

Нѣтъ болѣе трудной задачи, чѣмъ написать учебникъ космографіи, который бы дѣйствительно годился, какъ руководство при преподаваніи этого предмета. Какъ извѣстно, программа гимназій отводитъ этому чрезвычайно важному въ образовательномъ отношеніи предмету только одинъ часъ въ недѣлю. Каждый преподаватель хорошо знаетъ, что одинъ недѣльный часъ, отведенный для преподаванія учебнаго предмета, превышаетъ нуль много менѣе, чѣмъ на 1. Въ немногихъ сравнительно болѣе свободныхъ школахъ преподаватель располагаетъ двумя часами въ недѣлю. Между тѣмъ основныя идеи, которыя здѣсь приходится уяснить, отнюдь не отличаются легкостью. Учащійся долженъ усвоить, рядъ идей, въ значительной мѣрѣ для него новыхъ, и это дается не легко. Въ виду этого задача руководства заключается въ томъ, чтобы отобрать дѣйствительно наиболѣе существенный матеріалъ, выдѣлить сравнительно небольшую совокупность понятій и фактовъ, выбрать ихъ такъ, чтобы они составляли небольшое, но ясно выраженное цѣлое. Книга не должна составлять с ж а т а г о курса астрономіи, т. е. сжатаго изложенія обширнаго матеріала, она должна дать к р а т к і й курсъ, т. е. освобожденный отъ всего что можно устранить, сохраняя лишь самую общую картину мірозданія. Между тѣмъ почти всѣ учебники космографіи представляютъ собой именно сжатые курсы астрономіи; просматривая многіе изъ нихъ, невольно думаешь: если бы все это твердо знали наши студенты на государственномъ экзаменѣ!

Передъ нами новое руководство, написанное лицомъ, завоевавшимъ видное мѣсто среди русскихъ астрономовъ. Какъ справился онъ со своею задачей?

Если разсматривать книгу всю, какъ одно цѣлое, то и она выходитъ далеко за предѣлы задачи учебника космографіи. Но книга напечатана въ два шрифта, при чемъ мелкимъ шрифтомъ отпечатана большая часть книги. То, что сохраняется, если этотъ мелкій шрифтъ опустить, представляетъ собою однородный цѣльный курсъ, дѣйствительно подходящій подъ уровень пониманія ученика нашей средней школы. Остальное предназначается для наиболѣе любознательныхъ учениковъ, для самостоятельно изучающихъ предметъ не за страхъ а за совѣсть, — словомъ — для самообразованія. Намъ кажется, что кое-что еще слѣдовало бы опустить изъ общаго курса, перенести изъ крупнаго шрифта въ мелкій, напримѣръ, эклиптикальную систему координатъ, астрономическую рефракцію, различіе между синодическимъ и сидерическимъ мѣсяцемъ, уравненіе времени, либрацію луны. Но это можетъ сдѣлать преподаватель.

Слѣдующія достоинства книги, на нашъ взглядъ настолько существенны, что ставятъ этотъ учебникъ на ряду съ лучшими нашими руководствами, а въ иныхъ отношеніяхъ и выше нѣкоторыхъ изъ нихъ. Во первыхъ отчетливость въ выраженіи основныхъ понятій, ясная и точная формулировка опредѣленій, одинаково удовлетворяющая астрофизика и математика. Во вторыхъ, удачный выборъ матеріала, выпукло рисующаго общую картину мірозданія. Въ третьихъ, ясность изложенія; очень много въ этомъ руководствѣ можно предложить ученикамъ самимъ прочесть и только при опросѣ потомъ, такъ сказать, доштриховать; взрослый юноша не встрѣтитъ ни малѣйшихъ затрудненій при чтеніи описанія планетъ, строенія солнца, метеоровъ, туманностей. А это огромное подспорье для учителя, когда ему нужно дорожить не только каждымъ часомъ, даже каждой минутой. Наконецъ, совершенно исключительнымъ достоинствомъ книги являются ея рисунки. Они выполнены превосходно, а нѣкоторыя изъ нихъ, какъ напримѣръ, изображенія луны, солнечной фотосферы, солнечныхъ факеловъ, пятенъ, протуберансовъ и фотосферы, марса, юпитера, сатурна и др. могли бы съ успѣхомъ украшать дорогія иллюстрированныя изданія.

Книга имѣетъ, конечно, и недостатки. Наиболѣе крупнымъ изъ нихъ мы считаемъ совершенное, можно сказать, отсутствіе историческаго матеріала, картины эволюціи системы міра. При всемъ сознаніи необходимости дорожить мѣстомъ и сокращать матеріалъ, даже скрѣпя сердце, мы считаемъ, что идеѣ эволюціи системы міра слѣдовало бы удѣлить больше мѣста, чѣмъ это сдѣлано въ главахъ 1 и 2, отдѣла VI. Съ совершенно недопустимой краткостью изложено объясненіе смѣны временъ года и климатическихъ поясовъ. Это вопросъ первостепенной важности, изъ курса географіи ученики выносятъ лишь самое смутное представленіе объ этомъ вопросѣ, а между тѣмъ учебникъ г. Стратонова посвящаетъ этому неполныя полторы страницы, на которыхъ учащійся не найдетъ ни одного слова, которое разъяснило бы и развило эти представленія: то что сказано въ учебникѣ можно найти и въ любомъ начальномъ курсѣ географіи.

Наконецъ, еще нѣсколько словъ по принципіальному вопросу. При объясненіи суточнаго движенія г. Стратоновъ правильно указываетъ, что „суточный оборотъ небесной сферы геометрически одинаково хорошо объясняется при двухъ предположеніяхъ“ вращенія земли и вращенія вселенной. Но затѣмъ авторъ прибавляетъ: „Доказательства, рѣшающія этотъ вопросъ, возможны и логическія и фазическія“. Логическія доказательства заключаются въ извѣстныхъ разсужденіяхъ о неизмѣримомъ множествѣ звѣздъ, колоссальности ихъ разстояній, невѣроятности ихъ согласованныхъ движеній и т. д. Мы не будемъ входить здѣсь въ диспутъ, которому послѣднее время удѣлялось столько споровъ и вниманія; мы не будемъ напоминать о существованіи только относительнаго движенія и т. д. Но если вопросъ заходитъ о логическомъ доказательствѣ вращенія земли, а не свода небеснаго, то мы должны категорически заявить, что нельзя доказывать логически того, что не имѣетъ логическаго содержанія; а утвержденіе, что изъ двухъ движущихся другъ относительно друга системъ, дѣйствительное движеніе совершаетъ именно одна, а не другая, такое утвержденіе логическаго содержанія не имѣетъ. Я не знаю, правъ ли проф. Гёфлеръ (Höfler), твердо настаивающій, чтобы ученикамъ выпускного класса этотъ фактъ выяснялся, такъ сказать, начисто. Но съ этой „логикой“ въ настоящее время надо обращаться много осторожнѣе.

Но если оставить логику и возвратиться къ мірозданію, то мы должны сказать, что книга г. Стратонова въ общемъ представляетъ очень хорошій учебникъ космографіи и мы совѣтуемъ каждому преподавателю съ нимъ познакомиться.

В. Каганъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 203 (6 сер.). Опредѣлить число такихъ сочетаній изъ m элементовъ по n, въ составъ которыхъ входитъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ данныхъ k элементовъ.

В. Шлыгинъ (Москва).

№ 204 (6 сер.). Найти число по слѣдующимъ даннымъ: сумма цифръ его квадрата вдвое больше суммы его цифръ; если же искомое число написать въ обратномъ порядкѣ, то получимъ сумму цифръ его квадрата.

М. Бабинъ (Могилевъ).

№ 205 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$15x^4 - 38x^3 + 11x^2 + 12x - 4 = 0.$$

Нина С. (Армавиръ).

№ 206 (6 сер.). Дана функція

$$f(x) = \sin \frac{\log x^{2\pi}}{\log 2}.$$

Найти, при данномъ x, значенія z, удовлетворяющія уравненію

$$f(z) = f(x),$$

и показать, что въ сколь угодно малой окрестности точки $x = 0$ функція $f(x)$ принимаетъ любое изъ возможныхъ значеній.

Н. С. (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 158 (6 сер.). *Въ углъ* B *треугольника* ABC *провести извѣстнаго направленія отрѣзокъ* XY *такъ, чтобы онъ былъ* 1^0 *равенъ суммѣ разстояній точекъ* X, Y *отъ прямой* AC *или же* 2^0 *находился въ данномъ отношеніи къ этой суммѣ.*

Предположимъ, что задача рѣшена, при чемъ мы предположимъ сперва, что точки X и Y лежатъ по одну сторону прямой AC. Опустимъ изъ точекъ X, Y и изъ средины M отрѣзка XY соотвѣтственно перпендикуляры XD, YE и MN. По условію $\frac{XY}{XD + YE} = k$, гдѣ k — данное отношеніе, выраженное вообще отношеніемъ двухъ данныхъ отрѣзковъ. Но $XY = 2MX$ и $XD + YE = 2MN$ такъ какъ фигура $XYED$ — трапеція. Поэтому $\frac{2MX}{2MN} = k$, или

(1) $\frac{MX}{MN} = k$, гдѣ k равно 1 или отлично отъ единицы.

Съ другой стороны, если разсмотрѣть совокупность всѣхъ отрѣзковъ, параллельныхъ данному направленію и пересѣкающихъ стороны даннаго угла, то середины ихъ m лежатъ всѣ, какъ извѣстно, на прямой, соединяющей вершину B съ серединой m какого-либо одного изъ нихъ. Такимъ образомъ прямую BM можно построить, и задача приводится къ построенію треугольника MXN по слѣдующимъ условіямъ: направленія сторонъ его MX и MN извѣстны, такъ какъ MX параллельно данному направленію и MN перпендикулярно къ AC; вершина его M лежитъ на прямой, которую можно построить, и отношеніе сторонъ MX и MN [см. (1)] также извѣстно. Эта задача рѣшается при помощи метода подобія, и такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему построенію. Изъ произвольной точки x одной изъ сторонъ угла ABC проводимъ отрѣзокъ даннаго направленія до встрѣчи съ другой стороной въ точкѣ y и соединяемъ середину его m прямой съ вершиной B; на перпендикулярѣ изъ точки m къ прямой AC откладываемъ отрѣзокъ mn, удовлетворяющій равенству $mx : mn = k$, т. е. отрѣзокъ $\frac{mx}{k}$; проводимъ прямую Bn

до встрѣчи съ AC въ точкѣ N и изъ N проводимъ прямую параллельно nx до встрѣчи въ точкѣ X съ AB; если изъ X провести прямую, параллельную данному направленію, то получимъ искомый отрѣзокъ X и Y между сторонами угла B. Анализъ и синтезъ построенія выводятся обычнымъ путемъ изъ подобія четырехугольниковъ $Bmnx$ и $BMNX$. Такъ какъ отрѣзокъ mn можно отложить на перпендикулярѣ къ AC въ ту или другую сторону, то вообще можно получить два рѣшенія, которыя отвѣчаютъ различнымъ положеніямъ отрѣзка XY. Назовемъ черезъ n_1 и n_2 два различныхъ положенія точки n; такъ какъ изъ двухъ прямыхъ Bn_1 и Bn_2 по крайней мѣрѣ одна навѣрно встрѣчаетъ прямую AC, то задача допускаетъ всегда не болѣе двухъ и не менѣе одного рѣшенія. До сихъ поръ мы полагали, что точки X и Y лежатъ по одну сторону прямой AC. Если предположить, что онѣ лежатъ по разныя стороны AC, то, опустивъ перпендикуляры XD и и YE на AC и отложивъ на продолженіи перпендикуляра XD равный YE отрѣзокъ DF, получимъ прямоугольникъ $EDFY$. Въ этомъ случаѣ изъ чертежа имѣемъ, называя черезъ P точку встрѣчи прямыхъ AC и XY,

$$\frac{XY}{XD+YE}=\frac{XY}{XD+DF}=\frac{XY}{XF}=\frac{1}{\sin\angle XYF}=\frac{1}{\sin\angle XPD}=k,$$

откуда

$$(2)\quad \sin\angle XPD=\frac{1}{k}.$$

Изъ равенства (2) слѣдуетъ, что разсматриваемый случай возможенъ лишь тогда, если $k\geqq 1$ и если данное постоянное направленіе образуетъ съ прямой AC острый (или прямой) уголъ α, опредѣляемый равенствомъ $\sin\alpha=\frac{1}{k}$. При соблюденіи этихъ условій любой отрѣзокъ, встрѣчающій сторону AC, даетъ рѣшеніе задачи. Слѣдуетъ еще замѣтить, что мы предполагали до сихъ поръ, что среди прямыхъ даннаго постояннаго направленія есть такія, которыя встрѣчаютъ обѣ стороны даннаго угла. Если это условіе не соблюдено, то задача, буквально понимаемая, невозможна. Однако, толкуя условіе задачи распространительно, а именно, разыскивая отрѣзокъ XY даннаго направленія, удовлетворяющій условію задачи, такъ, чтобы концы его лежали на сторонахъ угла B или на ихъ продолженіи, мы всегда можемъ рѣшить задачу, если только замѣнимъ при построеніи уголъ B, въ случаѣ надобности, смежнымъ ему угломъ.

С. Конюховъ (Томскъ); *П. Безчеревныхъ* (Благовѣщенскъ).

V **№ 159** (6 сер.). *Разстояніе* d_x, d_y, d_z *центра круга радіуса* R, *описаннаго около нѣкотораго треугольника, отъ сторонъ этого послѣдняго суть соотвѣтственно стороны правильныхъ многоугольниковъ объ* x, y *и* z *сторонахъ, вписанныхъ въ кругъ радіуса* $\frac{R}{2}$. *Опредѣлить численныя значенія* x, y *и* z.

Пусть O — центръ круга, описаннаго около треугольника ABC; опустимъ перпендикуляры $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ изъ центра O соотвѣтственно на стороны BC, CA, AB, и положимъ $O\alpha=d_x$, $O\beta=d_y$, $O\gamma=d_z$. Итакъ $O\alpha$ есть по условію сторона правильнаго многоугольника объ x сторонахъ, вписаннаго въ кругъ радіуса $\frac{R}{2}$, а потому $2O\alpha$ есть сторона правильнаго x-угольника, вписаннаго въ кругъ радіуса R. Поэтому $2O\alpha=2R\sin\frac{2\pi}{2x}$, или

$$(1)\quad O\alpha=R\sin\frac{\pi}{x}.$$

Въ каждомъ изъ прямоугольныхъ треугольниковъ αBO и αCO гипотенуза равна радіусу R описаннаго круга, а отрѣзокъ Oa является катетомъ. Поэтому изъ равенства (1) слѣдуетъ, что

$$(2)\quad \angle OBa = \frac{\pi}{x},\quad \angle OCa = \frac{\pi}{x},$$

и подобнымъ же образомъ находимъ, что

$$(3)\quad \angle OC\beta = \frac{\pi}{y},\quad \angle OA\beta = \frac{\pi}{y};\qquad (4)\quad \angle OA\gamma = \frac{\pi}{z},\quad \angle OB\gamma = \frac{\pi}{z}.$$

Если центръ O лежитъ внутри треугольника ABC, т. е. если этотъ треугольникъ остроугольный, то сумма шести угловъ OBa, OCa, $OC\beta$, $OA\beta$, $OA\gamma$, $OB\gamma$ составляетъ сумму угловъ треугольника ABC. Слѣдовательно въ разсматриваемомъ случаѣ, сложивъ шесть равенствъ (2), (3), (4), получимъ

$$\frac{2\pi}{x} + \frac{2\pi}{y} + \frac{2\pi}{z} = \pi,\quad \text{или}\quad (5)\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

Пусть теперь центръ O лежитъ внѣ треугольника ABC. Предполагая, для большей опредѣленности, что центръ O лежитъ въ этомъ случаѣ внутри угла C и внѣ остальныхъ угловъ треугольника ABC, сложимъ четыре равенства (2) и (3) и вычтемъ почленно сумму двухъ равенствъ (4); тогда въ лѣвой части опять получимъ сумму угловъ треугольника. Поэтому

$$\frac{2\pi}{x} + \frac{2\pi}{y} - \frac{2\pi}{z} = \pi,\quad \text{или}\quad (6)\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

Итакъ задача приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненій (5) и (6) относительно x, y и z. Неопредѣленное уравненіе (5) рѣшается на основаніи слѣдующихъ соображеній [см. рѣшеніе задачи № 751 (4 сер.), напечатанное въ № 442 „Вѣстника"; условіе ея помѣщено въ № 416 „Вѣстника]. Нельзя предположить одновременно, чтобы было $x > 6$, $y < 6$, $z > 6$, такъ какъ тогда лѣвая часть равенства (5) была бы меньше $\frac{1}{2}$. Такъ какъ x, y, z — числа сторонъ правильныхъ многоугольниковъ, то $x \geqq 3$, $y \geqq 3$, $z \geqq 3$. Итакъ, одно изъ чиселъ x, y, z, напримѣръ, x должно равняться 3, 4, 5 или 6. При $x = 3$ равенство (5) даетъ

$$(7)\quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6},$$

откуда слѣдуетъ, что одно изъ чиселъ y и z по крайней мѣрѣ меньше 12; напримѣръ, $y = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$. Выбирая изъ этихъ значеній тѣ, при которыхъ изъ равенства (7) получаются цѣлыя значенія для z, и устраняя остальныя значенія y, приходимъ къ пяти рѣшеніямъ:

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{c} x=3,\ y=7,\ z=42;\quad x=3,\ y=8,\ z=24;\quad x=3,\ y=9,\ z=18; \\ x=3,\ y=10,\ z=15;\quad x=3,\ y=12,\ z=12. \end{array} \right.$$

Подобнымъ же образомъ, полагая $x = 4$, приходимъ послѣ ряда аналогичныхъ разсужденій къ тремъ новымъ рѣшеніямъ:

$$(9)\quad x=4,\ y=5,\ z=20;\quad x=4,\ y=6,\ z=12;\quad x=4,\ y=8,\ z=8.$$

Разсуждая такъ же при $x = 5$ и $x = 6$, получимъ еще два рѣшенія уравненія (5)

$$(10)\quad x=5,\ y=5,\ z=10;\quad x=6,\ y=6,\ z=6.$$

Представивъ уравненіе (6) въ видѣ

$$(11)\qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}+\frac{1}{z},$$

заключаемъ, что невозможно допустить одновременно неравенствъ $x>4$ и $y>4$. Поэтому одно изъ чиселъ x и y, напримѣръ, x можетъ принимать лишь значенія 3 и 4. При $x=3$ и (4) находимъ соотвѣтственно изъ уравненія (11), что

$$(12)\quad \frac{1}{y}=\frac{1}{6}+\frac{1}{z},\qquad (13)\quad \frac{1}{y}=\frac{1}{4}+\frac{1}{z},$$

откуда вытекаетъ соотвѣтственно, что $y<6$, $y<4$. Итакъ, при $x=3$ надо положить $y=3$, 4, 5, а при $x=4$ — положить $y=3$; каждому изъ этихъ предположеній отвѣчаетъ цѣлое значеніе z, но четвертое изъ полученныхъ такимъ путемъ рѣшеній совпадаетъ (если считать безразличными обозначенія неизвѣстныхъ, какъ это и сдѣлано всюду, черезъ x, y или z) съ первымъ. Такимъ образомъ уравненіе (6) имѣетъ три рѣшенія:

$$(14)\quad x=3,\ z=6;\quad x=3,\ y=14,\ z=12;\quad x=3,\ y=5,\ z=30.$$

Итакъ, всѣ рѣшенія предложенной задачи выражаются таблицами (8), (9), (10), (14).

С. Конюховъ (Томскъ); *М. Бабинъ* (Минскъ); *П. Безчеревныхъ* (Благовѣщенскъ).

№ 160 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^2-5x-4\sqrt{x}+13=0.$$

Представивъ уравненіе въ видѣ $x^2-6x+9+x-4\sqrt{x}+4=0$, или $(x-3)^2+(\sqrt{x}-2)^2=0$, мы видимъ, что лѣвая часть разлагается на множителей вида $(x-3)+i(\sqrt{x}-2)$ и $(x-3)-i(\sqrt{x}-2)$, гдѣ $i=\sqrt{-1}$. Такимъ образомъ данное уравненіе распадается на два квадратныхъ относительно $\sqrt{x}$ уравненія

$$x+i\sqrt{x}-(3+2i)=0,\quad x-i\sqrt{x}-(3-2i)=0.$$

Рѣшая ихъ, находимъ

$$\sqrt{x}=\frac{-i\pm\sqrt{11+8i}}{2},\quad \sqrt{x}=\frac{i\pm\sqrt{11-8i}}{2},$$

откуда, возвышая въ квадратъ, находимъ четыре мнимыхъ корня

$$x_{1,2}=\frac{5+4i\pm i\sqrt{11+8i}}{2},\quad x_{3,4}=\frac{5-4i\pm i\sqrt{11-8i}}{2}.$$

С. Конюховъ (Томскъ); *П. Безчеревныхъ* (Благовѣщенскъ); *М. Софроновъ* (Уральскъ); *А. Ильинъ* (Кіевъ); *М. Бабинъ* (Могилевъ); *А. Иткинъ* (Петроградъ).

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“ — Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
пщется

Обложка
ищется